David Müller

Zusatzmaterialien zu Investitionsrechnung und Investitionscontrolling

Relation von Spielklassen

Im Lehrbuch (Abschn. 6.2 auf S. 465–469) werden Eigenschaften und Klassen von Spielen vorgestellt. Diese Darstellungen sind nicht abschließend, so dass von Seiten der Studierenden oftmals Fragen nach der Relation dieser Klassen und der Klasse der – später eingeführten (Abschn. 6.4.1.2 auf S. 483) – balancierten Spiele auftreten. Zur Beantwortung bzw. zur Vermeidung dieser Fragen werden im Folgenden die Relationen der Teilmengen von kooperativen Spielen noch einmal diskutiert. Dazu werden folgende Eigenschaften herangezogen:

1. Monotonie,
2. Superadditivität,
3. Wesentlichkeit,
4. Konvexität und
5. Balanciertheit.

Für die im Buch betrachteten Spiele gilt die Nicht-Negativitäts-Bedingung (vgl. S. 466).

Eigenschaft 1 *Das Ergebnis keiner Koalition ist negativ. Es gilt:* $v(S) \geq 0$ *für alle* $S \subseteq N$.

Die Nicht-Negativität ist für die Beziehung der folgenden Spielklassen bzw. Eigenschaften wichtig. Ebenso wichtig ist der Hinweis auf die Definition 6.2, in der der Wert der leeren Menge mit Null angegeben wird. Dies ist für sämtliche folgende Ausführungen zu beachten. Als erste Eigenschaft ist die **Monotonie** einzuführen. Diese beschreibt, dass der Beitritt eines neuen Spielers der Koalition nicht schadet.

Eigenschaft 2 *Ein Spiel* $\Gamma(N, v)$ *ist monoton, wenn:* $v(S) \leq v(R)$ *für alle* $S \subseteq R \subseteq N$.

Mit einer Kooperation wird angestrebt, dass der Gewinn der Kooperation mindestens genauso groß, wenn nicht noch größer ist als die Einzelgewinne der teilnehmenden Koalitionäre. Dies wird als **Superadditivität** bezeichnet.

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

Eigenschaft 3 *Ein Spiel $\Gamma(N, v)$ ist superadditiv, wenn gilt:*

$$v(S \cup R) \geq v(S) + v(R) \forall R, S \subseteq N \quad mit \quad S \cap R = \emptyset.$$

Für Koalitionsfunktionen mit nicht-negativen Werten folgt aus der Superadditivität die Monotonie, d. h. jedes superadditive Spiel ist gleichzeitig auch monoton.

Es sei (Monotonie):	$v(R)$	$\geq v(S)$ für alle $S \subseteq R \subseteq N$
Es gilt für Superadditivität:	$v(R \cup S)$	$\geq v(R) + v(S) \forall R, S \subseteq N$ mit $R \cap S = \emptyset$
Dann gilt:	$v(R)$	$= v(S \cup (R \backslash S))$
	$v(R)$	$\geq v(S) + v(R \backslash S)$
So dass folgt:	$v(R)$	$\geq v(S)$

Das folgende Beispiel zeigt, dass diese Beziehung bei negativen Werten nicht gültig ist.

Beispiel 1 *Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } S = \{A\} \textit{ oder } S = \{B\} \textit{ oder } S = \{B, C\}, \\ -1 & \textit{wenn } S = \{C\}, \\ 3 & \textit{für } S = N, \\ 2 & \textit{ansonsten.} \end{cases}$$

Das Spiel ist zwar superadditiv, jedoch nicht monoton.

Als weitere Eigenschaft wird im Buch die **Konvexität** eingeführt (vgl. S. 467).

Eigenschaft 4 *Ein Spiel $\Gamma(N, v)$ ist konvex, wenn für:*

a) *alle $R, S \subseteq N$ gilt: $v(S \cup R) + v(S \cap R) \geq v(R) + v(S)$*

oder

b) *alle $i \in N$ und $S \subseteq R \subseteq N \backslash \{i\}$ gilt: $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(R \cup \{i\}) - v(R)$.*

Bei Verwendung der ersten Definition der Konvexität kann gezeigt werden, dass jedes konvexe Spiel – mit nicht-negativen Werten – auch superadditiv ist.

Wenn für alle $R, S \subseteq N$ gilt:

$$v(S \cup R) + v(S \cap R) \geq v(R) + v(S)$$

folgt für $S \cap R = \emptyset$:

$$v(S \cup R) \geq v(R) + v(S)$$

Dies wird in der Abb. 1 deutlich.

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

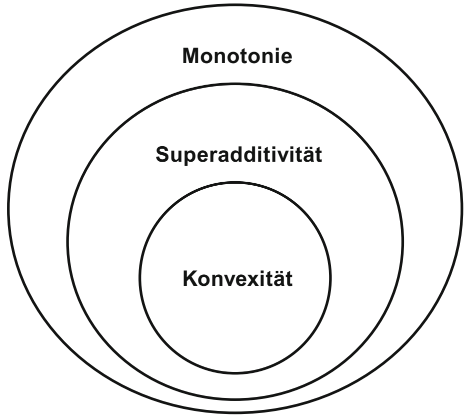

Abb. 1 Relation von Monotonie, Superadditivität und Konvexität. Quelle: Eigene Darstellung

Mit Blick auf die Eigenschaft 3 wird im Buch auf S. 467 festgehalten, dass für den Fall $v(R \cup S) = v(R) + v(S) \forall R, S \subseteq N$ weder ein Synergiegewinn, noch ein Verteilungsproblem resultiert. Das Ergebnis der großen Koalition ist $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$. Deshalb wurde die Klasse der wesentlichen Spiele eingeführt.

Eigenschaft 5 *Ein Spiel $\Gamma(N, v)$ ist wesentlich, wenn:* $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass Wesentlichkeit keine der bisher beschriebenen Eigenschaften impliziert. Umgekehrt muss auch festgehalten werden, dass keine der bisher beschriebenen Eigenschaften die Wesentlichkeit zwingend nach sich zieht. Das wird in der Abb. 2 ersichtlich.

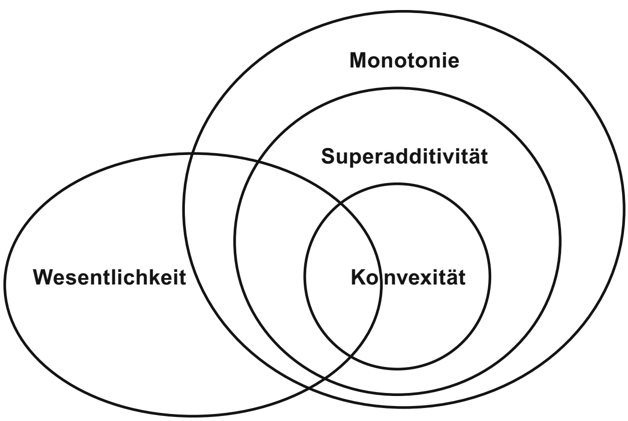

Abb. 2 Relation von Monotonie, Superadditivität, Konvexität und Wesentlichkeit. Quelle: Eigene Darstellung

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

Der Grund für diesen Zusammenhang besteht:

- einerseits darin, dass zur Erfüllung der Wesentlichkeit in der Beziehung zwischen $v(N)$ und $\sum_{i \in N} v(\{i\})$ eine strikte Größer-als-Relation gelten muss, während bei den anderen Eigenschaften die Größer-gleich-Relation gilt und
- andererseits darin, dass bei der Feststellung der Wesentlichkeit lediglich die Werte der Einzelspieler betrachtet werden, wohingegen bei den anderen Eigenschaften auch sämtliche Teilkoalitionen zu überprüfen sind.

Die Betrachtungen im Lehrbuch sind auf wesentliche Spiele begrenzt, da nur bei diesen Spielen ein Verteilungsproblem besteht. Die Abb. 6.2 auf S. 469 des Lehrbuches ist durchaus missverständlich, da sie zu implizieren scheint, dass wesentliche Spiele immer superadditiv und monoton sind.

Im Buch wird die Klasse der balancierten Spiele vorgestellt (vgl. S. 483–487). Es konnte schon frühzeitig gezeigt werden, dass die Eigenschaft der Balanciertheit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines nicht-leeren Kerns ist.

In der Eigenschaft 6.9 auf S. 484 des Lehrbuches wird gezeigt, dass Konvexität eine **hinreichende** – jedoch **keine notwendige** – Bedingung für die Existenz eines nicht-leeren Kerns ist. Daraus folgt die Beziehung von balancierten und konvexen Spielen in der Abb. 3.

Demzufolge ist jedes konvexe Spiel gleichzeitig auch:

- superadditiv,
- monoton und
- balanciert.

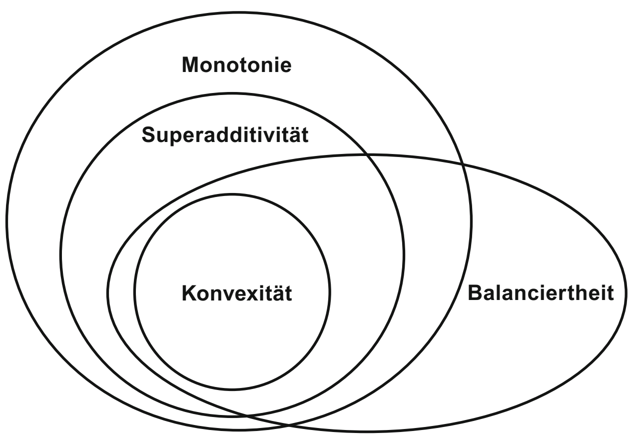

Abb. 3 Relation von Monotonie, Superadditivität, Konvexität und Balanciertheit. Quelle: Eigene Darstellung

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

Im Folgenden soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie die Relation der balancierten Spiele zu den übrigen Klassen gestaltet ist.

Beispiel 2 *Ein 4-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:*

$$v(S) = \begin{cases} 7 & \text{wenn } S = \{A, B\} \text{ oder } S = \{A, C\}, \\ 8 & \text{für } S = N, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Das Spiel ist balanciert und wesentlich, jedoch nicht:

- *monoton,*
- *superadditiv und*
- *konvex.*

Beispiel 3 *Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 5 & \text{für } S = N, \\ 2 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Das Spiel ist balanciert und monoton, jedoch nicht:

- *wesentlich,*
- *superadditiv und*
- *konvex.*

An diesem Beispiel wird deutlich, dass Balanciertheit nicht Wesentlichkeit impliziert.

Beispiel 4 *Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } S = \{A\}, \\ 2 & \text{für } S = \{B\} \text{ oder } S = \{C\}, \\ 6 & \text{für } S = N, \\ 5 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

Das Spiel ist wesentlich und monoton, jedoch nicht:

- *balanciert,*
- *superadditiv und*
- *konvex.*

Demzufolge impliziert Wesentlichkeit nicht Balanciertheit. Das letzte Beispiel soll zeigen, dass auch nicht wesentliche Spiele die übrigen Anforderungen erfüllen können.

Beispiel 5 *Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } S = \{A\}, \\ 2 & \textit{für } S = \{B\} \textit{ oder } S = \{C\}, \\ 4 & \textit{für } S = \{B, C\}, \\ 5 & \textit{für } S = N, \\ 3 & \textit{ansonsten.} \end{cases}$$

Das Spiel ist ***nicht wesentlich****, erfüllt jedoch die folgenden Eigenschaften:*

- *Konvexität und damit gleichzeitig*
- *Balanciertheit,*
- *Superadditivität und*
- *Monotonie.*

Zum Schluss wird ein Spiel vorgestellt, welches lediglich balanciert ist.

Beispiel 6 *Ein 3-Personen-Spiel weist folgende Koalitionsfunktion auf:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } S = \{A\}, \\ 2 & \textit{wenn } S = \{B\} \textit{ oder } S = \{C\} \\ 5 & \textit{für } S = N, \\ 0 & \textit{ansonsten.} \end{cases}$$

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

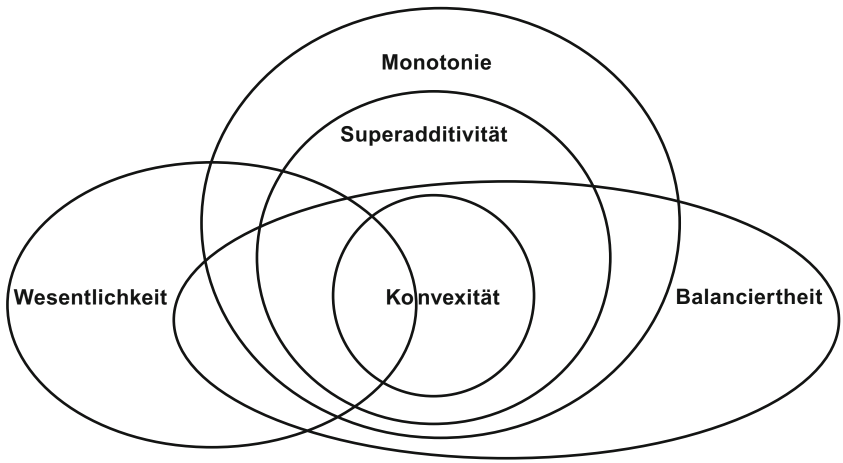

Abb. 4 Zusammenfassende Darstellung der Relationen. Quelle: Eigene Darstellung

Das Spiel ist balanciert, jedoch ist es nicht:

- *wesentlich,*
- *monoton,*
- *superadditiv und*
- *konvex.*

In der Abb. 4 ist die Beziehung der Spielklassen zusammenfassend dargestellt.

Zusatzmaterialien zu D. Müller, *Investitionsrechnung und Investitionscontrolling*
ISBN 978-3-662-57608-3, ISBN 978-3-662-57609-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-57609-0

http://www.springer.com/978-3-662-57608-3

Investitionsrechnung und Investitionscontrolling
Müller, D.
2019, XXII, 695 S. 161 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-57608-3