KRAWATTENPROBLEM

ANNETT PÜTTMANN

ZUSAMMENFASSUNG. Es wird durch Angabe eines Algorithmus gezeigt, daß $\frac{2}{3}n^2$ eine obere Schranke für das Krawattenproblem mit n Kugeln ist.

1. Problemstellung

In n Eimern befinden sich jeweils zwei nummerierte Kugeln. Ein Zug besteht aus der Vertauschung zweier Kugeln aus benachbarten Eimern. Gesucht ist die minimale Anzahl von Zügen $z(n)$, um die Ausgangssituation, in der im j-ten Eimer jeweils zwei Kugeln mit den Zahlen $n-j+1$ liegen, komplett zu ordnen, d.h. der j-te Eimer enthält zwei Kugeln mit den Zahlen j.

Wir beschreiben die Verteilung der $2n$ Kugeln auf die n Eimer durch eine $2 \times n$-Matrix, in deren j-ter Spalte die Zahlen der Kugeln im j-ten Eimer stehen. Die Ausgangsverteilung ist

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Zielverteilung ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

2. Bekannte Resultate

Es sind mindestens $\frac{1}{3}n(2n-1)$ Züge nötig, um die Ausgangsverteilung zu ordnen. Für einige (kleine) Kugelanzahlen, zum Beispiel $n = 1, 2, \ldots, 5$ sind optimale Zugfolgen bekannt.

Ordnet man die Zeilen der Matrix getrennt, so benötigt man $n^2 - n$ Züge. Dies ist eine obere Schranke für $z(n)$.

3. Zweistufiger Algorithmus

Um die Abschätzung $z(n) \leq \frac{2}{3}n^2$ zu beweisen, betrachten wir einen zweistufigen Algorithmus. Im ersten Schritt werden die Kugeln innerhalb der rechten Hälfte in eine sichere Startposition und innerhalb der linken Hälfte in eine gespiegelte sichere Startposition gebracht. Im zweiten Schritt bewegt man die Kugeln durch Vertauschungen, an denen nur Kugeln aus verschiedenen Ausgangshälften beteiligt sind, direkt auf ihre Zielposition.

Date: 12. Januar 2009.

3.1. **Aufteilung der Hälften.** Wenn n gerade ist, also $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so besteht die linke Hälfte aus den Spalten (Eimern) 1 bis m und die rechte Hälfte aus den Spalten (Eimern) $m+1$ bis $2m$.

Wenn n ungerade ist, also $n = 2m+1$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so besteht die linke Hälfte aus den Spalten (Eimern) 1 bis m und die rechte Hälfte aus den Spalten (Eimern) $m+1$ bis $2m+1$.

3.2. **Hälftenabstand von Ausgangs- und Zielverteilung.** Der Hälftenabstand $h(n)$ ist die Anzahl der Züge, die man braucht, um die Kugeln der linken Hälfte auf ihre Zielposition in der rechten Hälfte zu bringen.

Falls $n = 2m$, so gilt

$$\begin{aligned} h(n) = h(2m) = 2(1+3+\ldots+(2m-3)+(2m-1)) &= 2\left(\sum_{j=1}^{2m} j - \sum_{j=1}^{m} 2j\right) \\ = 2\left(\frac{2m(2m+1)}{2} - 2\frac{m(m+1)}{2}\right) &= 2m^2. \end{aligned}$$

Falls $n = 2m+1$, so gilt

$$h(n) = h(2m+1) = 2(2+4+\ldots+(2m-2)+(2m)) = 2\sum_{j=1}^{m} 2j = 2m(m+1).$$

3.3. **Sichere Startposition.** Wir betrachten eine $2 \times l$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} l+r & l-1+r & \cdots & 2+r & 1+r \\ l+r & l-1+r & \cdots & 2+r & 1+r \end{pmatrix}$$

für ein $r \in \mathbb{N}$ wie zum Beispiel die linke und rechte Hälfte der Ausgangsverteilung. Eine sichere Startposition ist eine $2 \times l$-Matrix $B = (b_{ij})$, die aus A durch Vertauschungen entsteht mit $b_{1,2j} = r + j = b_{1,2j-1}$ und $b_{2,2j-1} = r + l + 1 - j = b_{2,2j}$. Zum Beispiel: Die sichere Startposition zu

$$A = \begin{pmatrix} l & l-1 & \cdots & 2 & 1 \\ l & l-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots \\ l & l & l-1 & l-1 & l-2 & l-2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Wenn linke und rechte Hälfte in sicherer Startposition sind, dann braucht man nur noch $h(n)$ Züge, um die Zielposition zu erreichen, da sich $h(n)$ durch Vertauschungen innerhalb einer Hälfte nicht ändert.

Es sei $s(l)$ die Anzahl der Züge, die man benötigt, um aus der Verteilung A die sichere Startposition B zu erreichen. Wir bestimmen eine obere Schranke für $s(l)$. Dazu müssen wir drei Fälle unterscheiden $l = 3k$, $l = 3k+1$ und $l = 3k+2$:

$l = 3k$: Die Zahlen in den Spalten $2k+1, \ldots, 3k$ werden nacheinander in die richtige Spalte getauscht. Dabei werden von den Zahlen $> k+r$ immer die kleineren zuerst nach rechts verschoben. Aus diesem Verfahren folgt

$$s(l) = s(3k) \leq 1+2+4+5+\ldots+(3k-2)+(3k-1) = \frac{3}{2}(k(3k+1)-k(k+1)) = 3k^2.$$

$l = 3k+1$: In diesem Fall müssen die Zahlen in den Spalten $2k+1, \ldots, 3k$ alle einen Schritt weiter nach links getauscht werden als im Fall $l = 3k$. Daraus folgt

$$s(l) = s(3k+1) \leq 3k^2 + 2k.$$

$l = 3k+2$: In diesem Fall müssen zuerst die Zahl $k+1+r$ in Spalte $k+1$ eine Position nach links verschoben und dann die Zahlen in den Spalten $2k+1,\dots,3k$ alle zwei Schritte weiter nach links getauscht werden als im Fall $l = 3k$. Daraus folgt

$$s(l) = s(3k+1) \le 3k^2 + 1 + 4k.$$

3.4. **Zusammensetzung der Abschätzungen.**

- Wenn $n = 2m$, dann $z(n) = z(2m) \le 2s(m) + h(2m) = 2s(m) + 2m^2$.
  - Wenn $m = 3k$, dann
$$\begin{aligned} z(n) &\le 6k^2 + 2(3k)^2 = 24k^2 \\ &= \frac{24}{36}(6k)^2 = \frac{2}{3}n^2. \end{aligned}$$
  - Wenn $m = 3k+1$, dann
$$\begin{aligned} z(n) &\le 6k^2 + 4k + 2(3k+1)^2 = 24k^2 + 16k + 2 \\ &= \frac{2}{3}(6k+2)^2 - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}n^2. \end{aligned}$$
  - Wenn $m = 3k+2$, dann
$$\begin{aligned} z(n) &\le 6k^2 + 8k + 2 + 2(3k+2)^2 = 24k^2 + 32k + 10 \\ &= \frac{2}{3}(6k+4)^2 - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}n^2. \end{aligned}$$
- Wenn $n = 2m+1$, dann $z(n) = z(2m+1) \le s(m) + s(m+1) + h(2m+1) = s(m) + s(m+1) + 2m(m+1)$.
  - Wenn $m = 3k$, dann
$$\begin{aligned} z(n) &\le 3k^2 + 3k^2 + 2k + 6k(3k+1) = 24k^2 + 8k \\ &= \frac{2}{3}(6k+1)^2 - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}n^2. \end{aligned}$$
  - Wenn $m = 3k+1$, dann
$$\begin{aligned} z(n) &\le 3k^2 + 2k + 3k^2 + 4k + 1 + 2(3k+1)(3k+2) \\ &= 24k^2 + 24k + 5 \\ &= \frac{2}{3}(6k+3)^2 - 1 = \frac{2}{3}n^2 - 1. \end{aligned}$$
  - Wenn $m = 3k+2$, dann
$$\begin{aligned} z(n) &\le 3k^2 + 4k + 1 + 3(k+1)^2 + 2(3k+2)(3k+3) \\ &= 24k^2 + 40k + 16 = \frac{2}{3}(6k+5)^2 - \frac{2}{3} < \frac{2}{3}n^2. \end{aligned}$$

4. Mögliche Verbesserungen

Der zweite Schritt des Algorithmus kann auch funktionieren, wenn beide Hälften im ersten Schritt nicht in eine sichere Startposition gebracht wurden. Zum Beispiel sind folgende Aufstellungen durch $\frac{1}{3}n(2n-1) - h(n)$ Züge erreichbar und trotzdem so gut, daß der zweite Schritt in $h(n)$ Zügen zur vollständigen Ordnung der Kugeln führt, z.B. für $n = 8$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 8 & 4 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

für $n = 10$

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 & 6 & 6 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 9 & 8 & 9 & 10 & 5 & 4 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum
E-mail address: annett.puettmann@rub.de