Ritter, Voß: Erfolgreich starten ins Ingenieurstudium, Lösungen zu den Übungsaufgaben

Kapitel 1

Aufgabe 1.1

a) Die schriftliche Division von 1 durch 9 liefert:

$$\begin{array}{l} 1:9 = 0.11\ldots \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ .. \end{array}$$

b) Es ist $x = 0.125 = \frac{125}{1000} = \frac{25\cdot 5}{25\cdot 40} = \frac{5}{5\cdot 8} = \frac{1}{8}$. Für $x = 0.\overline{12}$ folgt $100\cdot x = 12.\overline{12}$ und Subtrahieren von $x = 0.\overline{12}$ ergibt $99 \cdot x = 12$. Also gilt $x = \frac{12}{99}$.

c) Es ist $x_1 = \frac{7}{16} + \frac{5}{8} = \frac{7}{16} + \frac{10}{16} = \frac{17}{16}$. Weiter ist $x_2 = \frac{7}{16} + \frac{2}{3} = \frac{21}{48} + \frac{32}{48} = \frac{53}{48}$. Ferner ist $x_3 = \frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{6}$.

d) Es gilt $z_1(x) = \left(\frac{x+3}{x+7}\right) : \left(\frac{x^2-9}{4}\right) = \frac{x+3}{x+7} \cdot \frac{4}{(x+3)(x-3)} = \frac{4}{(x+7)(x-3)}$ und $z_2 = \frac{5x^2-35x}{(2x+1)\cdot(x-7)} = \frac{5x(x-7)}{(2x+1)\cdot(x-7)} = \frac{5x}{2x+1}$.

Aufgabe 1.2

Es ist zweckmäßig, zuerst den Bruch im Zähler mit nur einem Bruchstrich zu schreiben:

$$\begin{aligned} C_b &= \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_0\epsilon_r A} + \frac{d-d_1}{\epsilon_0 A}} \\ &= \frac{1}{\frac{d_1+\epsilon_r(d-d_1)}{\epsilon_0\epsilon_r A}} && \text{auf Hauptnenner bringen und addieren} \\ &= \frac{\epsilon_0\epsilon_r A}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)} && \text{Kehrbruch bilden.} \end{aligned}$$

Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{C_b}{C_a} &= \frac{\frac{\epsilon_0\epsilon_r A}{d_1+\epsilon_r(d-d_1)}}{\epsilon_0 \frac{A}{d}} \\ &= \frac{\epsilon_0\epsilon_r A}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)} \cdot \frac{d}{\epsilon_0 A} && \text{multiplizieren mit Kehrbruch} \\ &= \frac{\epsilon_r d}{d_1 + \epsilon_r(d-d_1)} && \text{multiplizieren und kürzen.} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.3

a) Es ist $x = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$ und $y = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$.

b) Es gilt $z(x) = \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)^6}{(x+1)^{12}}} = \frac{(x^2-1)^{6/3}}{(x+1)^{12/3}} = \frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2\cdot(x+1)^2}{(x+1)^4} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$.

c) Aus $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ folgt durch Quadrieren $T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{l}{g}$ und weiter $l = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot g = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot g$.

d) Es ist $V = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8}\pi = \frac{\pi}{6}d^3$.

Aufgabe 1.4

a) Aus $\frac{4}{3}r^3\pi > 1$ folgt $r^3 > \frac{3}{4\pi}$ und $r > \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$.

b) Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1: $x \geq 5$: Die Ungleichung lautet $x - 5 < 3 \Rightarrow x < 8$, also $\mathbb{L}_1 = \{5 \leq x < 8\}$.
Fall 2: $x < 5$: Die Ungleichung lautet $5 - x < 3 \Rightarrow x > 2$, also $\mathbb{L}_2 = \{2 < x < 5\}$.
Es ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{2 < x < 8\}$.

c) Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1: $12y + 4 \geq 0$ bzw. $y \geq -\frac{1}{3}$: Die Ungleichung lautet $12y + 4 > 5 \Rightarrow y > \frac{1}{12}$, also $\mathbb{L}_1 = \{y > \frac{1}{12}\}$.
Fall 2: $y < -\frac{1}{3}$: Die Ungleichung lautet $-12y - 4 > 5 \Rightarrow 12y < -9 \Rightarrow y < -\frac{9}{12}$ bzw. $y < -\frac{3}{4}$, also $\mathbb{L}_2 = \{y < -\frac{3}{4}\}$.
Es ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{y : \quad y > \frac{1}{12}$ oder $y < -\frac{3}{4}\}$.

Aufgabe 1.5

a) Es ist $\log_7(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(7)} = 1.1833\ldots$

b) Aus $\lg((4x)^2) = 5$ folgt $2\lg(4x) = 5 \Rightarrow \lg(4x) = \frac{5}{2} \Rightarrow 4x = 10^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{10^{\frac{5}{2}}}{4} = 79.06$.

c) Aus $y = \mathrm{e}^{f(x)} = x^{x^2}$ folgt durch Logarithmieren $f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$.

Kapitel 2

Aufgabe 2.1

a) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 4, links

b) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 4, rechts

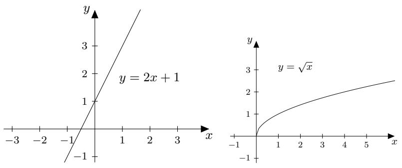

Abb. 4 Die Funktionen aus Aufgabe 2.1 a) links und b) rechts

Aufgabe 2.2

a) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 5, links

b) Es ist $y = f(x) = \begin{cases} -4, & x < -4 \\ x, & -4 \leq x \leq 4 \\ 4 & x > 4 \end{cases}$

Das Schaubild finden Sie in Abbildung 5, rechts.

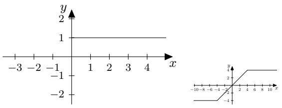

Abb. 5 Die Funktionen aus Aufgabe 2.2 a) links und b) rechts

Aufgabe 2.3

a) Die Funktionsvorschrift lautet $f_1(x) = 35 \cdot x$. $f_1(x)$ ordnet der Anzahl von Tagen x die Menge an verbrauchtem Heizöl (in Litern) zu.

b) Die Funktionsvorschrift lautet $f_2(x) = 0.8 \cdot x$. $f_2(x)$ ordnet der Menge x an Heizöl (in Litern) die Kosten in Euro zu.

c) Die Verkettung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ lautet $g(x) = f_1(f_2(x)) = 35 \cdot (0.8 \cdot x) = 28 \cdot x$. $g(x)$ ordnet der Anzahl von Tagen x die Heizkosten in Euro zu.

Aufgabe 2.4

Die Verkettung der Funktionen $y = g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ mit $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $y = f(x) = x^2 + 2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = [2, \infty)$ ist gegeben durch

$$y = h(x) := g(f(x)) = g(x^2+2) = \frac{1 + (x^2+2)}{1 - (x^2+2)} = -\frac{3 + x^2}{1 + x^2}$$

mit $D(h) = \mathbb{R}$ und $W(h) = [-3, -1)$.

Aufgabe 2.5

a) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 6, links. Man muss die Normalparabel $y = x^2$ mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multiplizieren (stauchen) und danach um $y = 1$ nach oben verschieben.

b) Das Schaubild finden Sie in Abbildung 6, rechts. Man muss die Wurzel $y = \sqrt{x}$ mit dem Faktor 2 multiplizieren (strecken) und danach um 1 nach links verschieben.

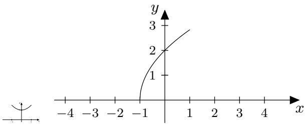

Abb. 6 Die Funktionen aus Aufgabe 2.5 a) links und b) rechts

Aufgabe 2.6

a) Die Funktion ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert, d.h. $D = \mathbb{R}$. Für ein beliebiges $x \in D$ gilt

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x)^4 = x^2 + 2x^4 = f(x),$$

d.h. die Funktion $y = f(x)$ ist in D gerade bzw. symmetrisch zur y-Achse.

b) Der Definitionsbereich der Funktion ist durch die Werte der Variablen x bestimmt, für die keine negativen Radikanden der Wurzeln auftreten. Für $x \in [0,1]$ gilt $1+x > 0$ und $1-x \geq 0$, d.h. die Radikanden sind positiv und $D = [0,1]$ ist der Definitionsbereich. Damit gilt für $x \in D$

$$f(-x) = \sqrt{1+(-x)} - \sqrt{1-(-x)} = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -f(x),$$

d.h. die Funktion ist ungerade bzw. symmetrisch zum Ursprung.

c) Es ist $D(f) = \mathbb{R}$. Weiter gilt

$$f(-x) = (-x)^5 - (-x)^7 = (-1)^5 x^5 - (-1)^7 x^7 = -(x^5 - x^7) = -f(x),$$

also ist f ungerade.

d) Es ist $D(f) = \mathbb{R}$. Weiter gilt

$$f(-x) = 1 + 2(-x)^2 = 1 + 2x^2 = f(x),$$

also ist f gerade.

Aufgabe 2.7

a) Das Polynom $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ hat die Nullstelle $x_0 = 0$. Es gilt $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x^2 - 3x + 2)$. $x^2 - 3x + 2$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ (quadratische Gleichung). Es folgt $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$.

b) Das Polynom $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2$ besitzt die Nullstellen $x_0 = 1$ und $x_1 = -1$. Polynomdivision $\frac{P_4(x)}{(x-1)\cdot(x+1)}$ liefert $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+2)$. Wegen $x^2 + 2 > 0$ gibt es keine weiteren Nullstellen.

c) Das Polynom $P_4(x) = x^4 - 1$ besitzt die Nullstellen $x_0 = 1$ und $x_1 = -1$. Die Polynomdivision $\frac{P_4(x)}{(x-1)\cdot(x+1)}$ liefert $P_4(x) = x^4 - 1 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)$. Wegen $x^2 + 1 > 0$ gibt es keine weiteren Nullstellen.

Aufgabe 2.8

a) Für $R(x) = \dfrac{x+2}{x \cdot (x-2)}$ sind die Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 2$ Polstellen, jeweils mit Vorzeichenwechsel.

b) Für $R(x) = \dfrac{x+2}{2x^2 + 4x}$ sind die Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = -2$ kritisch. Wegen $R(x) = \dfrac{x+2}{2x^2+4x} = \dfrac{x+2}{2x \cdot (x+2)} = \dfrac{1}{2x}$ ist $x_0 = 0$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel und $x_1 = -2$ ist eine Lückenstelle. Setzt man $R(-2) := -\frac{1}{4}$, kann man die Lücke schließen.

Aufgabe 2.9

Die Bedingung für die Nullstelle liefert die Gleichung $b \cdot 1^2 - 4 \doteq 0 \Rightarrow b = 4$. Mit der Zerlegung des Nenners $x^2 - a = (x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a})$ und der Bedingung für den Pol in $x = 2$ folgt für a die Gleichung $2 - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$, d.h. $a = 4$.

Wir erhalten

$$R(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}.$$

Durch die Faktorisierung des Zählers (Polynomdivision) $4x^2 - 4 : (x-1) = 4x + 4$ folgt eine weitere Nullstelle bei $x = -1$. Mit der Faktorisierung des Nenners $(x+2) \cdot (x-2)$ erhalten wir einen weiteren Pol bei $x = -2$ (Abb. 7).

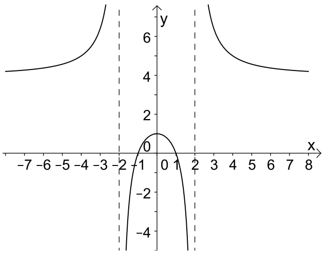

Abb. 7 Die Funktion $R(x) = \frac{4x^2-4}{x^2-4}$ aus Aufgabe 2.9

Aufgabe 2.10

a) Es gilt $T(t) = (T_0 - T_u)\, e^{k\,t} + T_u$ mit $T_0 < T_u$.

b) Die Funktion der Biertemperatur lautet $T(t) = (20-4)\, e^{-0.014 \cdot t} + 4$. Es ist $T(t_0) = 6 \Leftrightarrow 6 \doteq 16e^{-0.014t_0} + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \doteq e^{-0.014t_0} \Leftrightarrow t_0 = -\frac{1}{0.014} \ln\left(\frac{1}{8}\right) = 148.54$. Man muss das Bier ca. 2 Stunden und 30 Minuten vor dem Spiel in den Kühlschrank legen.

Aufgabe 2.11

Mit den Additionstheoremen des Sinus $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ und Kosinus $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ sowie mit dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ erhält man:

a)

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (1-2\sin^2(x))\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) \cdot \sin(x) = \cos(x) - 4\sin^2(x)\cos(x) \\ &= \cos(x) - 4(1-\cos^2(x))\cos(x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.12

a) Für $y = f(x) = 3\sin(4x-2) = 3\sin(4(x-\frac{1}{2}))$ ist die Amplitude $a = 3$, die Periode $p = \frac{\pi}{2}$, die Verschiebung (Nulldurchgang) $x_0 = \frac{1}{2}$ und die Phase $\varphi = -2$.

b) Für $y = f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ ist die Amplitude $a = \frac{1}{2}$, die Periode $p = \pi$, die Verschiebung (Nulldurchgang) $x_0 = 0$ und die Phase $\varphi = 0$.

Aufgabe 2.13

a) Mit $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ und $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}\left((e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x} - (e^{2x}-2+e^{-2x})\right) = 1.\end{aligned}$$

b) Das Additionstheorem für den Hyperbelsinus lautet:

$$\begin{aligned}&\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\ &= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{y-x}-e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}+e^{y-x}-e^{-x-y}}{4}\\ &= \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

Aufgabe 2.14

Aus $y = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ folgt mit $w = e^x$ die Gleichung $2y = w - w^{-1}$ und Multiplikation mit $w > 0$ liefert die quadratische Gleichung $w^2 - 2wy - 1 = 0$ mit der Lösung

$$w_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

Wegen $w > 0$ und $\sqrt{y^2+1} > y$ scheidet das Minuszeichen aus. Also gilt:

$$w = e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Die Auflösung nach x liefert $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ und Umbenennen ergibt:

$$y = \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Aufgabe 2.15

Für die Funktion $y = f(x) = |x+3| - |x-2|$ gilt:

i) $x < -3$: Hier sind in beiden Beträgen die Argumente negativ und es gilt:

$$y = f(x) = |x+3| - |x-2| = -(x+3) - (-1)\cdot(x-2) = -5$$

ii) $-3 \le x \le 2$: hier ist das Argument in $|x-2|$ negativ (oder 0) und das Argument in $|x+3|$ ist positiv (oder 0). Es gilt:

$$y = f(x) = |x+3| - |x-2| = (x+3) - (-1)\cdot(x-2) = 2x+1$$

iii) $x > 2$: Hier sind in beiden Beträgen die Argumente positiv und es gilt:

$$y = f(x) = |x+3| - |x-2| = (x+3) - (x-2) = 5$$

Wir erhalten also (vgl. Abb. 8):

$$y = f(x) = \begin{cases} -5, & x < -3 \\ 2x+1, & -3 \leq x \leq 2 \\ 5, & x > 2 \end{cases}$$

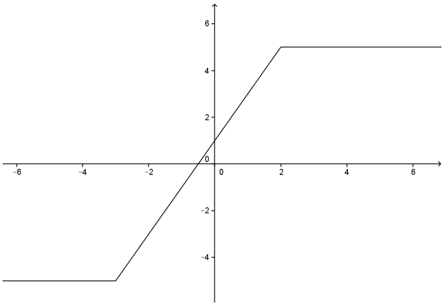

Abb. 8 Die Funktion $y = f(x) = |x+3| - |x-2|$ aus Aufgabe 2.15

Kapitel 3

Aufgabe 3.1

a) $x^2 - 6x + 4 = 0$ ist eine quadratische Gleichung. Die p/q-Formel liefert $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-4} = 3 \pm \sqrt{5}$.

b) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ ist eine biquadratische Gleichung. Substitution $z = x^2$ liefert die quadratische Gleichung $z^2 - 2z - 8 = 0$ mit den Lösungen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 = 4, -2$. Da $z = x^2 \geq 0$ ist scheidet -2 aus. Für $z = x^2 = 4$ ergeben sich die Lösungen $x_{1,2} = \pm 2$.

c) $x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0$. Wir raten die Lösung $x_0 = 1$: $1 - 2 + 3 - 2 = 0$. Polynomdivision ergibt $(x^3 - 2x^2 + 3x - 2) : (x - 1) = x^2 - x + 2$. Wegen $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq 0$ ist $x_0 = 1$ die einzige Lösung.

d) $\frac{x^2+2x}{x-1} = 5x$. Die Gleichung gilt nur für $x \neq 1$. Multiplikation mit $x - 1$ liefert $x^2 + 2x = 5x^2 - 5x$ bzw. $x \cdot (4x - 7) = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{7}{4}$.

Aufgabe 3.2

Wir formen um:

$$
\begin{aligned}
(1-p)R_1 &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} && | \cdot (R_1 + R_2) \\
(1-p)R_1(R_1 + R_2) &= R_1 R_2 && \text{links ausmultiplizieren} \\
(1-p)R_1^2 + (1-p)R_1 R_2 &= R_1 R_2 && | - R_1 R_2 - (1-p)R_1^2 \\
-pR_1 R_2 &= -(1-p)R_1^2 && | \cdot : (-pR_1) \\
R_2 &= \frac{(1-p)}{p} R_1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.3

a) $\sqrt{x+1} = x$. Da $\sqrt{\ldots} \geq 0$ ist, muss $x \geq 0$ sein. Quadrieren ergibt $x + 1 = x^2$ bzw. $x^2 - x - 1 = 0$. Die p/q-Formel liefert $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Wegen $x \geq 0$ folgt $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) $x - 2 = \sqrt{x}$. Da $\sqrt{\ldots} \geq 0$ ist, muss $x \geq 2$ sein. Quadrieren ergibt $x^2 - 4x + 4 = x$ bzw. $x^2 - 5x + 4 = 0$. Die p/q-Formel liefert $x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{2} = 4, 1$. Wegen $x \geq 2$ scheidet $x = 1$ aus und es verbleibt $x = 4$ als Lösung.

c) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=2$. Quadrieren ergibt $x-1+x+1+2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}=4$ bzw. $2\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}=4-2x$ oder nach Kürzen $\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}=2-x$. Nochmals Quadrieren ergibt $(x-1)\cdot(x+1)=4-4x+x^2$ bzw. $x^2-1=4-4x+x^2$ oder $4x=5$, also $x=\frac{5}{4}$. Durch Einsetzen bestätigt man die Lösung.

Aufgabe 3.4

a) $\log_{10}(x)=\frac{3}{2}$ bedeutet $10^{3/2}=x$, also $x=31.623\ldots$

b) $3^x=15$. Anwendung des ln auf beiden Seiten liefert $\ln(3^x)=\ln(15)\Rightarrow x\cdot\ln(3)=\ln(15)$ also $x=\frac{\ln(15)}{\ln(3)}=2.465\ldots$

c) $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x-3=0$. Substitution $z=\mathrm{e}^x$ liefert die quadratische Gleichung $z^2-2z-3=0$ mit den Lösungen $z_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2=3,-1$. Wegen $z=\mathrm{e}^x\geq 0$ scheidet -1 aus. Also $z=\mathrm{e}^x=3\Rightarrow x=\ln(3)=1.0986\ldots$

d) Für große t strebt $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ gegen 0 und $y(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ stebt gegen 1. Die zu lösende Gleichung lautet $1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}=0.63$ bzw. $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}=0.37$. Logarithmieren liefert $-\frac{t}{2}=\ln(0.37)$ bzw. $t=-2\cdot\ln(0.37)=1.989\ldots$

Aufgabe 3.5

a) Wegen $\mathrm{e}^{\cdots}>0$ sind die Nullstellen von $y(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cdot\sin(2t)=0$ bestimmt durch $\sin(2t)=0$. Wegen $\sin(x)=0\Leftrightarrow x_k=k\cdot\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$, folgt $t_k=\frac{k}{2}\cdot\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

b) $\sin^2(x)-2\sin(x)-1=0$. Substitution $z=\sin(x)$ liefert die quadratische Gleichung $z^2-2z-1=0$ mit den Lösungen $z_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$. Wegen $z=\sin(x)$ gilt $|z|\leq 1$ und somit $z=1-\sqrt{2}$. Es folgt $x=\arcsin(1-\sqrt{2})$ und wegen der Mehrdeutigkeit erhalten wir die Lösungen $x_{1,k}=\arcsin(1-\sqrt{2})+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$. Aus Symmetriegründen sind auch die $x_{2,k}=\pi-x_{1,k},\quad k\in\mathbb{Z}$, Lösungen der Gleichung.

Da quadriert wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen zu prüfen. Aufgrund der 2π-Periode reicht jeweils ein Wert: $\sin^2(x_{1,0})-2\sin(x_{1,0})-1=(1-\sqrt{2})^2-2(1-\sqrt{2})-1=1-2\sqrt{2}+2-2+2\sqrt{2}-1=0$. Also sind die $x_{1,k}$ tatsächlich Lösungen der Gleichung. Entsprechend gilt $\sin^2(x_{2,0})-2\sin(x_{2,0})-1=\sin^2(3.5687)-2\sin(3.5687)-1=0$. Also sind die $x_{2,k}$ ebenfalls Lösungen. Abbildung 9, links, zeigt die Lösungen im Intervall $[0,2\pi]$: Der Punkt A entspricht $x_{2,0}=\pi-x_{1,0}$ und B entspricht $x_{1,1}$.

c) Die Vereinheitlichung von $\sin(x)+2\cos(x)=1$ zu $\sin(x)$ liefert $\sin(x)+2\sqrt{1-\sin^2(x)}=1$ bzw. $\sin(x)-1=-2\sqrt{1-\sin^2(x)}$. Quadrieren ergibt $\sin^2(x)-2\sin(x)+1=4(1-\sin^2(x))$ bzw. $5\sin^2(x)-2\sin(x)-3=0$

oder normiert $\sin^2(x) - \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{3}{5} = 0$. Substitution $z = \sin(x)$ ergibt die quadratische Gleichung $z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{3}{5} = 0$ mit der Lösung $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{15}{25}}$ bzw. $z_{1,2} = \frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} = 1, -\frac{3}{5}$. Aus $z_1 = 1$ folgt $x_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ und mit der Periodizität des Sinus erhalten wir die Lösungen $x_{1,k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Aus $z_2 = -\frac{3}{5}$ folgt $x_2 = \arcsin(-\frac{3}{5})$ und mit der Periodizität des Sinus erhalten wir die Lösungen $x_{2,k} = \arcsin(-\frac{3}{5}) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Aus Symmetriegründen sind auch $x_{3,k} = \pi - x_{2,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, potenzielle Lösungen der Gleichung.
Da quadriert wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen zu prüfen. Aufgrund der 2π-Periode reicht jeweils ein Wert: $\sin(x_{1,0}) + 2\cos(x_{1,0}) - 1 = 0$. Also sind die $x_{1,k}$ tatsächlich Lösungen der Gleichung. Entsprechend gilt $\sin(x_{2,0}) + 2\cos(x_{2,0}) - 1 = -\frac{3}{5} + 2\sqrt{1 - \frac{3^2}{5^2}} = -\frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = 0$, also sind die $x_{2,k}$ ebenfalls Lösungen. Einsetzen von $x_{3,1} = 3.7851$ zeigt, dass $x_{3,1}$ die Gleichung nicht löst, d.h. die $x_{3,k}$ sind keine Lösungen der Gleichung.
Abbildung 9, rechts, zeigt die Lösungen im Intervall $[0, 2\pi]$: Der Punkt A entspricht $x_{1,1}$ und B entspricht $x_{2,1}$.

Alternativ: Die Vereinheitlichung von $\sin(x) + 2\cos(x) = 1$ auf $\cos(x)$ liefert $\sqrt{1 - \cos^2(x)} + 2\cos(x) = 1$ bzw. $\sqrt{1 - \cos^2(x)} = 1 - 2\cos(x)$. Quadrieren ergibt $1 - \cos^2(x) = 1 - 4\cos(x) + 4\cos^2(x)$ bzw. $5\cos^2(x) = 4\cos(x)$. Für den Fall $\cos(x) = 0$ folgen die Lösungen $x_{1,k} = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$. Beim Test durch Einsetzen bleiben nur die $x_{1,k}$ mit geradem k als Lösungen übrig. Für den Fall $\cos(x) \neq 0$ folgt die Gleichung $\cos(x) = \frac{4}{5}$ mit den Lösungen $x_{2,k} = \arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$, sowie aus Symmetriegründen $x_{3,k} = -\arccos(\frac{4}{5}) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Beim Test durch Einsetzen erweisen sich die $x_{2,k}$ als Scheinlösungen, d.h. sie erfüllen die Ausgangsgleichung nicht. Die $x_{3,k}$ sind Lösungen der Ausgangsgleichung.

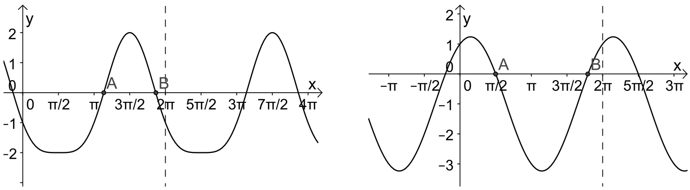

Abb. 9 Die Funktionen aus Aufgabe 3.5 b) links und c) rechts

Kapitel 4

Aufgabe 4.1

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1}{\lim_{x\to 3}(x^2-4)} = \dfrac{1}{9-4} = \dfrac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)\cdot(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x\cdot(3-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{3-\frac{1}{x}} = \dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-2x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{x+1} = 1$

Aufgabe 4.2

a) Es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot(x+2)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$$

Für $x \neq 0$ ist $y = f(x)$ durch die Funktionsgleichung erklärt. Setzt man $f(0) := 2$, so ist die Funktion für alle x stetig.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+1-1}{x^2\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ ist $y = f(x)$ durch die Funktionsgleichung erklärt. Setzt man $f(0) := \frac{1}{2}$, so ist die Funktion für alle x stetig.

c) $y = f(x)$ ist zusammengesetzt aus stetigen Funktionen. Daher ist nur die Nahtstelle $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ zu untersuchen. Es gilt:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} (a-x^2) = a - \frac{\pi^2}{4}, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \cos(x) = 0$$

Wir wählen nun a so, dass $a-\dfrac{\pi^2}{4} \doteq 0$, d.h. $a = \dfrac{\pi^2}{4}$. Dann stimmen links- und rechtsseitiger Funktionenlimes an der Nahtstelle überein und die Funktion ist stetig.

Aufgabe 4.3

a) $\left(\sin(x) + x^{\frac{1}{2}}\right)' = \cos(x) + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

b) $\left(2\mathrm{e}^{x} - \cosh(x) + x^2\right)' = 2\mathrm{e}^{x} - \sinh(x) + 2x$

c) $\left(4x^2 - 7x^{\frac{2}{3}} + 3\right)' = 8x - \dfrac{14}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

Aufgabe 4.4

a) $(\sin(x)\cdot\cos(x))' = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$

b) $(2x\cdot\mathrm{e}^{x})' = 2\mathrm{e}^{x} + 2x\mathrm{e}^{x} = 2\mathrm{e}^{x}(1+x)$

c) $\left(\mathrm{e}^{2x}\cdot\sin(x)\right)' = 2\mathrm{e}^{2x}\cdot\sin(x) + \mathrm{e}^{2x}\cdot\cos(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(2\sin(x)+\cos(x)\right)$

d) $(\sin(x)\cdot\cos(2x))' = \cos(x)\cdot\cos(2x) - 2\sin(x)\cdot\sin(2x)$

e) $\left(6x\cdot\mathrm{e}^{2x}\right)' = 6\mathrm{e}^{2x} + 12x\cdot\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}(1+2x)$

f) $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}\right)' = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} - \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$

g) $\left(\dfrac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{2x}{\sin(x)} - \dfrac{x^2\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}$

h) $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sin(x)}\right)' = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\sin(x) - \mathrm{e}^{x}\cos(x)}{\sin^2(x)}$

i) $\left(\dfrac{\sin(2x)}{3x^2}\right)' = \dfrac{2\cos(2x)\cdot 3x^2 - 6x\sin(2x)}{9x^4} = \dfrac{2x\cos(2x) - 2\sin(2x)}{3x^3}$

j) $\left(\dfrac{x-1}{\sin(2x)}\right)' = \dfrac{\sin(2x) - 2(x-1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$

Aufgabe 4.5

a) Die Ableitung von $y = f(x) = x^x$ erhält man mit der Darstellung $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$ über die Kettenregel:

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln(x)}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln(x)}\cdot\left(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\cdot(\ln(x)+1)$$

b) $\left(\sin(x^4)\right)' = \cos(x^4)\cdot 4x^3$

c) $\left((x^2-1)^4\right)' = 4(x^2-1)^3\cdot 2x = 8x\cdot(x^2-1)^3$

d) $\left(\ln(x^2+2)\right)' = \dfrac{1}{x^2+2}\cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2+2}$

e) $\left(\mathrm{e}^{3x+1}\right)' = 3\mathrm{e}^{3x+1}$

f) $\left(\cos(x^3)\right)' = -\sin(x^3)\cdot 3x^2 = -3x^2\sin(x^3)$

g) $\left(\cos(x)^3\right)' = 3\cos^2(x)\cdot(-\sin(x)) = -3\sin(x)\cos^2(x)$

Aufgabe 4.6

a) Für die Funktion $y = f(x) = x^3 + x^2$ gilt $f'(x) = 3x^2 + 2x = x \cdot (3x + 2)$ und $f''(x) = 6x + 2$. Es ist $f'(x) = x \cdot (3x + 2) = 0$ für $x_1 = -\frac{2}{3}$ und für $x_2 = 0$, dort besitzt der Graph eine horizontale Tangente. Weiter gilt $f''(x_1) = 6 \cdot (-\frac{2}{3}) + 2 = -2 < 0$ und deshalb ist x_1 ein lokales Maximum. Aus $f''(x_2) = 2 > 0$ folgt, dass x_2 ein lokales Minimum ist.

b) Für $f(x) = (2x+1) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$ folgt $f'(x) = 2\mathrm{e}^{1-x} - (2x+1)\mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e}^{1-x}(1-2x)$ und $f''(x) = -2\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{1-x}(1-2x) = -\mathrm{e}^{1-x}(3-2x)$. Aus $f'(x) = 0$ folgt $x_0 = \frac{1}{2}$ und mit $f''(\frac{1}{2}) = -\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}}(-1+3) < 0$ erweist sich $(x_0, f(x_0)) = (\frac{1}{2}, 2\sqrt{\mathrm{e}})$ als lokales Maximum.

c) Für $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ folgt $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ und $f''(x) = 6x - 12$. Aus $f'(x) = 0$ bzw. $3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ folgt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 3,\ 1$. Wegen $f''(3) = 6 > 0$ erweist sich $(3, -2)$ als lokales Minimum. Wegen $f''(1) = -6 < 0$ handelt es sich bei $(1, 2)$ um ein lokales Maximum.

d) Für $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$ folgt $f'(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1)$ und $f''(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x)+1)^2 + \mathrm{e}^{x\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}$. Aus $f'(x) = 0$ bzw. $\mathrm{e}^{x\ln(x)} \cdot (\ln(x)+1) = 0$ folgt wegen $\mathrm{e}^{\cdots} > 0$ die Bedingung $\ln(x) + 1 = 0$, also $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Wegen $f''(\frac{1}{\mathrm{e}}) = 0 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}} \cdot \mathrm{e} > 0$ erweist sich $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}})$ als lokales Minimum.

Aufgabe 4.7

a) Der Flächeninhalt ergibt sich aus $F(x) = 2x \cdot (16 - x^2) = 32x - 2x^3$. Weiter folgt $F'(x) = 32 - 6x^2$ und aus $F'(x) \doteq 0$ folgen die kritischen Stellen $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{32}{6}} = \pm\sqrt{\dfrac{16}{3}} = \pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Mit $F''(x) = -12x$ folgt $F''(x_1) < 0$, d.h. $x_1 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ist ein Minimum.
Es ergibt sich $F(\frac{4}{\sqrt{3}}) = \frac{256}{3\sqrt{3}} = 49.2672\ldots$ Das Rechteck hat die Länge $\frac{8}{\sqrt{3}}$ und die Höhe $16 - \frac{4^2}{3} = \frac{32}{3}$.

b) Aus $x + y = 72$ und der Bedingung $x^3 \cdot y \doteq \max$ erhalten wir die Funktion $f(x) = x^3 \cdot (72 - x)$ deren Maximum wir suchen. Aus $f'(x) = 216x^2 - 4x^3 \doteq 0$ folgen die kritischen Stellen $x_1 = 0$ (uninteressant) und $x_2 = 54$. Wegen $f''(x_2) = -11664 < 0$ ist x_2 tatsächlich ein Maximum von $f(x)$. Also ist $x = 54$ und $y = 18$.

c) Für das Volumen des Schüttgutbehälters gilt $V = V_{\text{Zyl}} + V_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r^2 \cdot 5 + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot l$. Aus der Angabe der Seitenlinie des Kegels berechnet man mit dem Satz von Pythagoras $r^2 + l^2 = 15^2$, also $r^2 = 225 - l^2$. Somit folgt

$$V(l) = 5\pi \cdot (225 - l^2) + \frac{1}{3}\pi \cdot (225 - l^2) \cdot l$$

mit $V'(l) = -10\pi \cdot l + 75\pi - \pi \cdot l^2$ und $V''(l) = -10\pi - 2\pi \cdot l$. Aus der Bedingung $V'(l) = 0$ bzw. $l^2 + 10l - 75 = 0$ mit den Lösungen $l_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 + 75} =$

$-5 \pm 10 = -15;\ 5$ folgt $l_1 = 5$ m. Die negative Lösung der quadratischen Gleichung ergibt keinen Sinn. Mit $V''(5) = -20\pi < 0$ wird das Volumen für die Wahl von $l_1 = 5\,\text{m}$ maximal. Mit $r = \sqrt{225 - 25} = \sqrt{200} = 14.142\,\text{m}$ ist das maximale Volumen des Behälters $V_{\max} = V(5) = \frac{4000}{3}\pi = 4188.8\,\text{m}^3$.

Aufgabe 4.8

a) Für $f(x) = \sqrt{3 + \mathrm{e}^x}$, $x \in [0, \infty)$ ist $f(0) = \sqrt{3 + \mathrm{e}^0} = 2$. Mit der Kettenregel berechnen wir die 1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{3 + \mathrm{e}^x}} \quad \text{sowie} \quad f'(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}.$$

Mit der Quotientenregel folgt:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{3 + \mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^x \cdot \frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{3+\mathrm{e}^x}}}{\left(\sqrt{3 + \mathrm{e}^x}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\mathrm{e}^x(3 + \mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^{2x}}{\left(\sqrt{3 + \mathrm{e}^x}\right)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^x}{\left(\sqrt{3 + \mathrm{e}^x}\right)^3}.$$

Die Taylor'sche Formel erster Ordnung um $x_0 = 0$ mit dem Restglied von Lagrange lautet:

$$f(x) = \sqrt{3 + \mathrm{e}^x} = 2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\frac{\mathrm{e}^{2\xi} + 6\mathrm{e}^\xi}{\left(\sqrt{3 + \mathrm{e}^\xi}\right)^3}\cdot x^2, \quad 0 \le x < \infty$$

Falls $0 < x < \infty$ ist, gilt für die Zwischenstelle $0 < \xi < x$.

b) Es ist $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(2x)}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x)$, $f''(x) = 4\mathrm{e}^{\sin(2x)} \cdot (\cos^2(2x) - \sin(2x))$. Mit $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ und $f''(0) = 4$ ergibt sich

$$p_2(x) = 1 + 2x + \frac{4}{2!}x^2 = 1 + 2x + 2x^2.$$

c) Für die Funktion $f(x) = \tan(x)$ lauten die 1. und 2. Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad f''(x) = \frac{-2\cos(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^4(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}.$$

Mit dem Taylor'schen Polynom 1. Ordnung, dem Restglied in der Form von Lagrange sowie dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhält man:

$$\tan(x) = \tan(0) + \frac{1}{\cos^2(0)}\cdot x + \frac{2\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)}\cdot\frac{x^2}{2} = x + \frac{2\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)}\cdot\frac{x^2}{2}, \quad 0 < \xi < x \le \frac{\pi}{4}$$

Da im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ der Sinus monoton steigt und der Kosinus monoton fällt, erhalten wir die Abschätzung

$$|\tan(x) - x| \le \left|x^2 \cdot \frac{\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)}\right| = x^2 \cdot \frac{\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)} \le x^2 \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos^3(\frac{\pi}{4})} = x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})}$$

und eine gesuchte Konstante C ist gegeben durch $C = \dfrac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4})} = 2$.

Aufgabe 4.9

a) Mit der Regel von l'Hospital (Typ $\frac{0}{0}$) gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)}{1}=3.$$

b) Die mehrmalige Anwendung der Regel von l'Hospital (Typ $\frac{0}{0}$) liefert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sinh(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cosh(x)}{2}=-\frac{1}{2}$$

c) Die Regel von l'Hospital (Typ $\frac{0}{0}$) und Kürzen liefern:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^9+1}{x^7+1}=\lim_{x\to -1}\frac{9x^8}{7x^6}=\frac{9}{7}$$

d) Hier liegt zunächst der Fall $\frac{\infty}{\infty}$ vor:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\frac{1}{\cos^2(3x)}}{5\frac{1}{\cos^2(5x)}}=\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(5x)}{\cos^2(3x)}$$

Nun haben wir einen Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(5x)}{\cos^2(3x)} &= \frac{3}{5}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos(5x)\cdot(-\sin(5x))\cdot 5}{2\cos(3x)\cdot(-\sin(3x))\cdot 3}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(5x)\cdot\sin(5x)}{\cos(3x)\cdot\sin(3x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-5\cdot\sin^2(5x)+5\cdot\cos^2(5x)}{-3\cdot\sin^2(3x)+3\cdot\cos^2(3x)}\\ &= \frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(5x)-\cos^2(5x)}{\sin^2(3x)-\cos^2(3x)}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

e) Vor Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel formen wir die Funktion um:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}$$

Weiter gilt

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-1-x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}x(\mathrm{e}^x-1)=0,$$

d.h. es liegen die Voraussetzungen für die Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel vor:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-1}$$

Erneut liegen die Voraussetzungen für die Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel vor, denn es ist $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-1)=0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-1)=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}\text{ und damit}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\frac{1}{2}$$

f) Es liegt ein unbestimmter Ausdruck der Form 1^∞ vor. Umformen ergibt

$$(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \ln(\sin(x))}.$$

Für den Exponenten $\dfrac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}$ gilt $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos^2(x) = 0$. Demzufolge sind die Voraussetzungen für die Anwendung der 1. l'Hospital'schen Regel erfüllt:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{-2\cos(x) \cdot \sin(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-2\sin^2(x)} = -\frac{1}{2}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir damit den gesuchten Grenzwert:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \ln(\sin(x))\right)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Kapitel 5

Aufgabe 5.1

a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$
b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$
c) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
d) $\int \mathrm{e}^{3x}dx = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + c$
e) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + c$

Aufgabe 5.2

Zunächst beschreiben wir den Spannungsverlauf mithilfe einer Funktionsgleichung. Es handelt sich um eine Gerade, die die u-Achse bei $\frac{\hat{u}}{2}$ schneidet und die Steigung $\frac{\hat{u}}{2T}$ hat:

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}}{2}, \quad 0 \le t \le T$$

Damit ist nach der 1. binomischen Formel:

$$u^2(t) = \left(\frac{\hat{u}}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}}{2}\right)^2 = \frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot t^2 + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}^2}{4}$$

Für $\int\limits_0^T u^2(t)\,dt$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^T u^2(t)\,dt &= \int\limits_0^T \left(\frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot t^2 + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot t + \frac{\hat{u}^2}{4}\right) dt \\
&= \left[\frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot \frac{t^3}{3} + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{\hat{u}^2}{4} \cdot t\right]_0^T && \text{Stammfunktionen} \\
&= \frac{\hat{u}^2}{4T^2} \cdot \frac{T^3}{3} + \frac{\hat{u}^2}{2T} \cdot \frac{T^2}{2} + \frac{\hat{u}^2}{4} \cdot T && \text{Grenzen einsetzen} \\
&= \frac{7}{12}\hat{u}^2 \cdot T && \text{zusammenfassen.}
\end{aligned}$$

Damit ist $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T u^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{7}{12} \cdot \hat{u}^2 \cdot T} = \sqrt{\frac{7}{12}}\,\hat{u} \approx 0.764\,\hat{u}$.

Aufgabe 5.3

Mit der 2. binomischen Formel folgt:

$$u^2(t) = \left(U\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_0\right)^2 = U^2\mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}} + 2UU_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_0^2$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_0^T u^2(t)\,dt &= \int_0^T \left(U^2 \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}} + 2UU_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_0^2\right) dt \\
&= \left[U^2 \cdot \left(\frac{-\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}} + 2UU_0 \cdot (-\tau)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_0^2 \cdot t\right]_0^T \\
&= -\frac{U^2 \cdot \tau}{2} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{2T}{\tau}} - 1\right) - 2UU_0 \cdot \tau \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}} - 1\right) + U_0^2 \cdot T \\
&= \frac{U^2 \cdot \tau}{2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2T}{\tau}}\right) + 2UU_0 \cdot \tau \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}\right) + U_0^2 \cdot T
\end{aligned}$$

Weiter folgt $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{U^2 \cdot \tau}{2T} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2T}{\tau}}\right) + \frac{2UU_0 \cdot \tau}{T} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{\tau}}\right) + U_0^2}.$

Aufgabe 5.4

a) Die partielle Integration mit $u(x) = x$, $v'(x) = \sin(3x)$ und $u'(x) = 1$, $v(x) = -\frac{\cos(3x)}{3}$ liefert

$$\int x \cdot \sin(3x)\,dx = \frac{1}{9}\sin(3x) - \frac{1}{3} x \cos(3x) + c.$$

b) Die partielle Integration mit $u(y) = y$, $v'(y) = \cos(y)$ und $u'(y) = 1$, $v(y) = \sin(y)$ liefert

$$\int y \cdot \cos(y)\,dy = \cos(y) + y \sin(y) + c.$$

c) Die partielle Integration mit $u(x) = x$, $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ liefert

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,dx = \frac{1}{4}(-1 + 2x)\,\mathrm{e}^{2x} + c.$$

d) Die partielle Integration mit $u(t) = t^2$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$ und $u'(t) = 2t$, $v(t) = \mathrm{e}^t$ liefert $\int t^2 \cdot \mathrm{e}^t\,dt = t^2\mathrm{e}^t - 2\int t \cdot \mathrm{e}^t\,dt$. Eine weitere partielle Integration mit $u(t) = t$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$ und $u'(t) = 1$, $v(t) = \mathrm{e}^t$ liefert schließlich

$$\int t^2 \cdot \mathrm{e}^t\,dt = (2 - 2t + t^2) \cdot \mathrm{e}^t + c.$$

Aufgabe 5.5

a) Die Substitution $u(x) = 2x + 1$, $du = 2dx$ liefert

$$\int (2x+1)^3\,dx = \int \frac{u^3}{2}\,du = \frac{u^4}{8} + c = \frac{1}{8}(1+2x)^4 + c.$$

b) Die Substitution $u(t) = t^2 + 1$, $du = 2t\,dt$ liefert

$$\int t \cdot \cos(t^2+1)\,dt = \int \frac{1}{2}\cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + c = \frac{1}{2}\sin(t^2+1) + c.$$

c) Die Substitution $u(t) = t^3$, $du = 3t^2\,dt$ liefert zunächst unbestimmt

$$\int t^2 \cdot \mathrm{e}^{t^3}\,dt = \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{u}\,du = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{u} + c = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t^3} + c,$$

und Einsetzen der Grenzen ergibt

$$\int_0^2 t^2 \cdot \mathrm{e}^{t^3}\,dt = \frac{\mathrm{e}^8}{3} - \frac{1}{3}.$$

d) Die Substitution $u(x) = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$ liefert

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c.$$

e) Die Substitution $u(x) = \sin(x)$, $du = \cos(x)\,dx$ liefert

$$\int \cos(x)\cdot \mathrm{e}^{\sin(x)}\,dx = \int \mathrm{e}^{u}\,du = \mathrm{e}^{u} + c = \mathrm{e}^{\sin(x)} + c.$$

f) Die Substitution $u(x) = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}\,dx$ liefert

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + c = \frac{1}{2}\ln^2(x) + c.$$

g) Die Substitution $u(x) = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$ liefert

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) + c = \ln(x^2+1) + c.$$

h) Die Substitution $u(x) = \cos(x)$, $du = -\sin(x)\,dx$ liefert

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \int \frac{-1}{u}\,du = -\ln(u) + c = -\ln|\cos(x)| + c.$$

Aufgabe 5.6

a) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\int \frac{3x+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{5}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.$$

b) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{(x-3)\cdot(x^2-1)}\,dx &= \int \left(-1\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= -\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + c.\end{aligned}$$

c) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\int \frac{2x}{(x^2-4)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right)\,dx = \ln|x-2| + \ln|x+2| + c = \ln|x^2-4| + c.$$

d) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx &= \int \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)\,dx = x + \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx \\ &= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + c.\end{aligned}$$

e) Die Partialbruchzerlegung ergibt

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+1}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - 5\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x-2}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| - 5\ln|x-1| + \frac{9}{2}\ln|x-2| + c.\end{aligned}$$

Aufgabe 5.7

a) $\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$. Die partielle Integration $u(x) = \ln(x), v'(x) = x^2$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{x^3}{3}$ liefert $\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\ln(x) - \frac{x^3}{9} + c.$

b) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$. Die Substitution $z = e^x + 1$, $dz = e^x\,dx$ liefert $\int \frac{z-1}{\sqrt{z}}\,dz = \int \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)\,dz = \frac{2}{3}z^{3/2} - 2z^{1/2} + c = \frac{2}{3}\left(e^x+1\right)^{3/2} - 2\left(e^x+1\right)^{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}\cdot(e^x - 2) + c.$

c) $\int e^{3x} \cdot \sin(x)\,dx$. Die partielle Integration $u(x) = e^{3x}, v'(x) = \sin(x)$ mit $u'(x) = 3e^{3x}, v(x) = -\cos(x)$ liefert $\int e^{3x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{3x}\cdot\cos(x) + 3\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx$. Eine weitere partielle Integration mit $u(x) = e^{3x}, v'(x) = \cos(x)$ mit $u'(x) = 3e^{3x}, v(x) = \sin(x)$ liefert $\int e^{3x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{3x}\cdot\sin(x) - 3\int e^{3x}\cdot\sin(x)\,dx$. Insgesamt ergibt sich:
$\int e^{3x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{3x}\cdot\cos(x) + 3\left(e^{3x}\cdot\sin(x) - 3\int e^{3x}\cdot\sin(x)\,dx\right)$ bzw.
$10\int e^{3x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{3x}\cdot\cos(x) + 3e^{3x}\cdot\sin(x) + c$ oder
$\int e^{3x}\cdot\sin(x)\,dx = -\frac{1}{10}e^{3x}\cdot\cos(x) + \frac{3}{10}e^{3x}\cdot\sin(x) + c$

d) $\int \frac{x+2}{x(x+4)}\,dx$. Die Partialbruchzerlegung liefert $\frac{x+2}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$ mit $A = B = \frac{1}{2}$. Somit folgt $\int \frac{x+2}{x(x+4)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}\,dx = \frac{1}{2}(\ln(|x|) + \ln(|x+4|)) + c$.

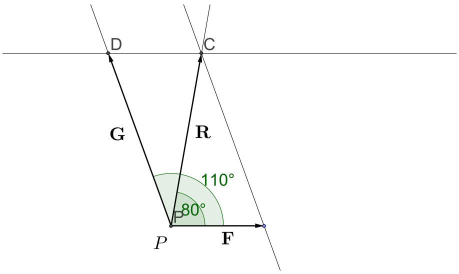

Abb. 10 Kräftezerlegung aus Aufgabe 6.1

Kapitel 6

Aufgabe 6.1

Im Endpunkt von $\boldsymbol{F}$ wird eine zu $\boldsymbol{G}$ parallele Gerade eingezeichnet und mit der Richtung von $\boldsymbol{R}$ geschnitten. Dadurch ergibt sich die Länge von $\boldsymbol{R}$. Dann wird eine zu $\boldsymbol{F}$ parallele Gerade durch den Endpunkt von $\boldsymbol{R}$ gezeichnet und mit der Richtung von $\boldsymbol{G}$ geschnitten. Dadurch ergibt sich die Länge von $\boldsymbol{G}$. Ausmessen ergibt $|\boldsymbol{G}| = 9.85\,\mathrm{N}$, $|\boldsymbol{R}| = 9.40\,\mathrm{N}$ (vgl. Abb. 10).

Aufgabe 6.2

Es ist $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

Aufgabe 6.3

a) Sei $a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{9 + 64 + 1.2^2}$. Der Vektor

$$\frac{\boldsymbol{a}}{a} = \frac{1}{\sqrt{74,44}} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

hat die Länge 1 und zeigt in Richtung von $\boldsymbol{a}$. Daher hat

$$\boldsymbol{b} = 12 \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \frac{12}{\sqrt{74,44}} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.17 \\ 11.13 \\ 1.67 \end{pmatrix}$$

die gewünschte Länge von 12 und die Richtung von $\boldsymbol{a}$.

b) Berechnet man die Länge von $\boldsymbol{b}$, erhält man $b = \sqrt{144} = 12$.

Aufgabe 6.4

a) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2$

b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 2 \cdot (1 + \lambda) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7 + 2\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{7}{2}$

Aufgabe 6.5

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{a} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{z} \perp \boldsymbol{a}$.
Bildung des Skalarprodukts mit $\boldsymbol{a}$ liefert:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \underbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{z}}_{=0} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{a} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.6

a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, $\lambda \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Daraus folgt $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ oder $\lambda = 0$ bzw. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. Mindestens einer der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ist der Nullvektor.

b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\vartheta)$ und $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\sin(\vartheta)|$. Aus der Bedingung $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ folgt $\cos(\vartheta) = |\sin(\vartheta)|$ und damit $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, oder einer der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ist der Nullvektor.

c) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\vartheta)$. Aus der Forderung $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2$ folgt $|\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2 \cdot \cos^2(\vartheta) = |\boldsymbol{a}|^2 \cdot |\boldsymbol{b}|^2$, also $\cos^2(\vartheta) = 1$ und somit $\cos(\vartheta) = \pm 1$ bzw. $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ zeigen in dieselbe oder in entgegengesetzte Richtung, oder einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor.

Aufgabe 6.7

a) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Also ist $\boldsymbol{v} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}$ liefert die Bedingung $6 + 3p - q = 0$ und $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$ liefert die Bedingung $3 + 4q = 0$. Die Lösung des Gleichungssystems ist $p = -\frac{9}{4}$, $q = -\frac{3}{4}$.

Aufgabe 6.8

Aus $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$ folgt $\lambda \boldsymbol{b} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}$.

Bildung des Skalarprodukts mit $\boldsymbol{b}$ und Beachtung von $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ liefert:

$$\lambda \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \Rightarrow \lambda = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}} = -\frac{1}{14}.$$

Wir erhalten $\boldsymbol{x} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{14}\boldsymbol{b} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 \\ -25 \\ 43 \end{pmatrix}$

Kapitel 7

Aufgabe 7.1

a) Es ist $\left[\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\cdot(II) \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 14 & -16 \\ 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} :14 \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ +3\cdot(I) \end{array} \to$
$\left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & -\frac{8}{7} \\ 1 & 0 & \frac{11}{7} \end{array}\right]$. Die Lösung lautet $x_1 = \frac{11}{7}$ und $x_2 = -\frac{8}{7}$.

b) Es ist $\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} -4\cdot(II) \\ \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} +2\cdot(III) \\ -(III) \\ \end{array} \to$
$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & -7 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} :(-7) \\ \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2\cdot(I) \\ +(I) \end{array} \to \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{24}{7} \end{array}\right].$
Die Lösung lautet $x_1 = -\frac{6}{7}$, $x_2 = \frac{24}{7}$ und $x_3 = -\frac{4}{7}$.

Aufgabe 7.2

Es ist $\left[\begin{array}{rr|r} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -\alpha & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} -2\cdot(II) \\ \end{array} \to \left[\begin{array}{rr|r} 0 & 3+2\alpha & 2 \\ 1 & -\alpha & 1 \end{array}\right]$. Für $3+2\alpha \neq 0$ bzw. $\alpha \neq -\frac{3}{2}$ besitzt das LGS eine eindeutige Lösung und zwar $y = \frac{2}{3+2\alpha}$ und $x = 1 + \alpha y = \frac{3+4\alpha}{3+2\alpha}$.
Für $\alpha = -\frac{3}{2}$ lautet die erste Zeile im zweiten Schema $0 \cdot y = 2$. Dies ist für kein y erfüllbar. Deshalb existiert keine Lösung. Jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist einem der beiden Fälle (eindeutige Lösung oder keine Lösung) zugeordnet. Daher kann der Fall mit unendlich vielen Lösungen nicht eintreten.

Aufgabe 7.3

a) Es ist $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 1 \\ 6 & 16 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 9 & 14 \end{pmatrix}$ und

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 18 \end{pmatrix}.$$

c) Bei $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ stimmt die Anzahl der Spalten der ersten Matrix (d.h. 2) nicht überein mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix (d.h. 1).

d) Hier folgt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7.4

Aus der Formel (7.2) für die Inverse einer 2×2-Matrix liest man direkt ab: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.5

Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ mit $\det(A) = -5 - 6 = -11$ und $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ mit $\det(A_1) = -20 - 6 = -26$ sowie $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ mit $\det(A_2) = 2 - 8 = -6$. Wegen $\det(A) = -11 \neq 0$ liefert die Cramer'sche Regel $x = \frac{26}{11}$ und $y = \frac{6}{11}$.

Kapitel 8

Aufgabe 8.1

Für $z_1 = 2 + \mathrm{j}$ und $z_2 = 1 + 3\mathrm{j}$ folgt:

a) $z_1 + z_2 = 3 + 4\mathrm{j}$

b) $z_1 - z_2 = 1 - 2\mathrm{j}$

c) $z_1 \cdot z_2 = -1 + 7\mathrm{j}$

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+\mathrm{j}}{1+3\mathrm{j}} \cdot \frac{1-3\mathrm{j}}{1-3\mathrm{j}} = \frac{5-5\mathrm{j}}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}$

e) $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+3\mathrm{j}}{2+\mathrm{j}} \cdot \frac{2-\mathrm{j}}{2-\mathrm{j}} = \frac{5+5\mathrm{j}}{5} = 1 + \mathrm{j}$

f) $z_2^* \cdot z_1 = (1 - 3\mathrm{j}) \cdot (2 + \mathrm{j}) = 5 - 5\mathrm{j}$

g) $z_2 \cdot z_2^* = (1 + 3\mathrm{j}) \cdot (1 - 3\mathrm{j}) = 10$

Aufgabe 8.2

a) $\frac{2+z}{4\mathrm{j}} = 7\mathrm{j} \Rightarrow z = 7\mathrm{j} \cdot 4\mathrm{j} - 2 = -30$

b) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\mathrm{j}} = 3 \Rightarrow \frac{1}{z} = 3 - \frac{1}{\mathrm{j}} = 3 + \mathrm{j} \Rightarrow z = \frac{1}{3+\mathrm{j}} \cdot \frac{3-\mathrm{j}}{3-\mathrm{j}} = \frac{3-\mathrm{j}}{10}$

c) $\frac{3z}{4z+2} = 4\mathrm{j} \Rightarrow 3z = 16z\mathrm{j} + 8\mathrm{j} \Rightarrow (3-16\mathrm{j})z = 8\mathrm{j} \Rightarrow z = \frac{8\mathrm{j}}{3-16\mathrm{j}} \cdot \frac{3+16\mathrm{j}}{3+16\mathrm{j}} = \frac{-128+24\mathrm{j}}{265}$

d) $z + 2z^* = 25 + 3\mathrm{j} \Rightarrow (x + \mathrm{j}y) + 2(x - \mathrm{j}y) = 25 + 3\mathrm{j} \Rightarrow 3x - \mathrm{j}y = 25 + 3\mathrm{j} \Rightarrow$
$x = \frac{25}{3},\ y = -3$, also $z = \frac{25}{3} - 3\mathrm{j}$

Aufgabe 8.3

Es folgt:

a) $z_1 = \frac{4-3\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} \cdot \frac{1-\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \frac{1-7\mathrm{j}}{2}$

b) $z_2 = (1 + \mathrm{j}) \cdot (3 - \mathrm{j}) = 4 + 2\mathrm{j}$

c) $z_3 = \sqrt{2}\left(\sin(\frac{\pi}{4}) - \mathrm{j}\cos(\frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \mathrm{j}$

d) $z_4 = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}}{1+\mathrm{j}} = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}}{\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}} = \sqrt{2}$

Aufgabe 8.4

a) $z_1 = 2 + 3\mathrm{j}$, $r = \sqrt{13}$, $\varphi = \arctan(\frac{3}{2})$, $z_1 = \sqrt{13} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\frac{3}{2})}$, $z_2 = -2 - 4\mathrm{j}$,
$r = \sqrt{20}$, $\varphi = \arctan(2) + \pi$, $z_2 = \sqrt{20} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\arctan(2)+\pi)}$ und $z_3 = -7 = 7 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$

b) Mit $z_1 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}$ und $z_2 = 5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}$ folgt:

$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}} \cdot 5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}} = 10 \cdot \mathrm{e}^{(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4})\mathrm{j}} = 10 \cdot \mathrm{e}^{\pi\mathrm{j}} = -10$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}}{5\cdot\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}} = \frac{2}{5} \cdot \mathrm{e}^{(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4})\mathrm{j}} = \frac{2}{5} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{j}} = -\frac{2}{5}\mathrm{j}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5\cdot\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}}{2\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}} = \frac{5}{2} \cdot \mathrm{e}^{(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})\mathrm{j}} = \frac{5}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{j}} = \frac{5}{2}\mathrm{j}$

$z_1^3 = \left(2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{j}}\right)^3 = 2^3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}$

$z_2^7 = \left(5 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}\mathrm{j}}\right)^7 = 5^7 \cdot \mathrm{e}^{\frac{21\pi}{4}\mathrm{j}} = 5^7 \cdot \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{j}}$

Aufgabe 8.5

Beide Seiten müssen in derselben Darstellungsform vorliegen. Hier bietet es sich an, die linke Seite in die kartesische Form zu bringen:

$$(x+yj)^2 = x^2 + 2jxy - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyj$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt:

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{und} \quad 2xy = 4$$

Aus der zweiten Beziehung ergibt sich $y = \frac{2}{x}$. Eingesetzt in die erste Beziehung erhält man $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$, woraus man x bestimmen kann:

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 && \text{ist eine biquadratische Gleichung} \\ u^2 - 3u - 4 &= 0 && \text{nach Substitution } x^2 = u \\ u_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also gibt es zwei Möglichkeiten für u, nämlich $u_1 = 4$ und $u_2 = -1$. Das ergibt vier mögliche Lösungen für x: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = j$, $x_4 = -j$. Zu jeder Lösung für x bestimmt man den passenden y-Wert $y = \frac{2}{x}$: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = \frac{2}{j} = -2j$, $y_4 = -\frac{2}{j} = 2j$. Da aber $x, y \in \mathbb{R}$ gesucht sind, sind die Paare x_3, y_3 und x_4, y_4 keine Lösungen der Aufgabe.

Aufgabe 8.6

$\underline{Y}$ muss in kartesische Darstellung gebracht werden, damit man den Imaginärteil ablesen kann. Dazu muss der Nenner des Bruchs reell gemacht werden:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L} + j\omega C && \text{konjugiert komplex erweitern} \\ &= \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C && \text{ausmultiplizieren} \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C && \text{aufteilen in Real- und Imaginärteil} \\ &= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right) && \text{sortieren} \end{aligned}$$

Es ist also

$$\operatorname{Im}(\underline{Y}) = \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Nullsetzen und Auflösen nach ω ergibt:

$$\begin{aligned}
\omega\left(C-\frac{L}{R^2+\omega^2L^2}\right) &= 0 && \omega \text{ ausklammern}\\
\omega\left(C-\frac{L}{R^2+\omega^2L^2}\right) &= 0 && |:\omega \text{ da nur } \omega\neq 0 \text{ sinnvoll ist}\\
C &= \frac{L}{R^2+\omega^2L^2} && \text{auflösen nach } \omega^2\\
\omega^2L^2C+CR^2 &= L\\
\omega^2 &= \frac{L-CR^2}{L^2C} && \text{Wurzel ziehen}\\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}} && \text{nur } \omega>0 \text{ sinnvoll}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.7
Es gilt:

$$\begin{aligned}
y_1(t)-y_2(t) &= \cos(\omega_0 t)+\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)-(\cos(\omega_0 t)-\mathrm{j}\sin(\omega_0 t))\\
&= 2\mathrm{j}\sin(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\sin(\omega_0 t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}(y_1(t)-y_2(t))=-\frac{\mathrm{j}}{2}(y_1(t)-y_2(t))$. Weiter folgt:

$$x(t)=A\cdot \mathrm{e}^{\delta_0 t}\cdot\sin(\omega_0 t)=-\frac{\mathrm{j}}{2}\cdot A\cdot \mathrm{e}^{\delta_0 t}\cdot(y_1(t)-y_2(t))$$

Kapitel 9

Aufgabe 9.1
Es gilt:

$$u_C'(t) = \frac{KU_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{KU_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{U_0}{RC}\left(1 - K e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = \frac{U_0}{RC}$$

Weiter ist $u_C(0) = U_0(1-K) \doteq 0 \Rightarrow K = 1$.

Aufgabe 9.2
Es handelt sich um eine Differenzialgleichung 1. Ordnung. Sie hat konstante Koeffizienten, ist linear und homogen. Man kann den Exponentialansatz $I(t) = e^{\lambda t}$ verwenden:

$$\begin{aligned} L\lambda e^{\lambda t} + R e^{\lambda t} &= 0 \quad | \quad : e^{\lambda t} \\ L\lambda + R &= 0 \text{ charakteristische Gleichung} \\ \lambda &= -\frac{R}{L} \end{aligned}$$

Also ist die allgemeine Lösung

$$I(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}, \; K \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

In dieser allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung muss die Konstante K nun noch so bestimmt werden, dass die Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ erfüllt ist. Es ist

$$I(0) = K e^{-\frac{R}{L}\cdot 0} = I_0 \quad \Rightarrow \quad K = I_0.$$

Die gesuchte Lösung lautet

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Aufgabe 9.3

a) Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung liefert:
$(t^2+t)\frac{dy}{dt} = 2y+1 \Rightarrow \frac{dy}{2y+1} = \frac{dt}{t^2+t} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2y+1) = \int \frac{dt}{t^2+t} \Rightarrow$
$\frac{1}{2}\ln(2y+1) = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln\left(\frac{t}{t+1}\right) + C$
Weitere Umformung ergibt:
$\ln(2y+1) = \ln\left(\frac{t^2}{(t+1)^2}\right) + C \Rightarrow 2y+1 = C \cdot \frac{t^2}{(t+1)^2}$ bzw. $y(t) = \frac{1}{2}\frac{C\cdot t^2}{(t+1)^2} - \frac{1}{2}$

b) Trennung der Variablen liefert:
$\frac{dy}{dx} = (2y+1)\cdot\cot x \Rightarrow \frac{dy}{2y+1} = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|\sin(x)| + C$
Die Anfangsbedingung ergibt:
$\frac{1}{2}\ln(2) = \ln(\sin(\frac{\pi}{4})) + C \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) = \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) + C \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(2) = -\frac{1}{2}\ln(2) + C \Rightarrow C = \ln(2)$
Weiter folgt:
$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|\sin(x)| + \ln(2) \mid \exp(.) \Rightarrow 2y+1 = \sin^2(x)\cdot 4 \Rightarrow y(x) = 2\sin^2(x) - \frac{1}{2}$
Alternativ: $y(x) = -\cos(2x) + \frac{1}{2}$

Aufgabe 9.4

a) Eine lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
homogene DGL: $y'(t) - 7\cdot y(t) = 0$, es folgt $y_h(t) = C\mathrm{e}^{7t}$, $C \in \mathbb{R}$
inhomogene DGL: $y'(t) - 7\cdot y(t) = t + 1 - 2\sin(7t)$
Ansatz vom Typ der Störung: $y_s(t) = A\cdot t + B + C\sin(7t) + D\cos(7t)$
Ableiten $y_s'(t) = A + 7C\cos(7t) - 7D\sin(7t)$ und Einsetzen in die DGL liefert:

$(7C - 7D)\cos(7t) + (-7C - 7D)\sin(7t) + A - 7At - 7B \doteq t + 1 - 2\sin(7t) \quad \Rightarrow$
$C = D, \quad C = \frac{1}{7}, \quad A = -\frac{1}{7}, \quad B = -\frac{8}{49}$
Also: $y_s(t) = -\frac{1}{7}t - \frac{8}{49} + \frac{1}{7}\sin(7t) + \frac{1}{7}\cos(7t)$
allgemeine Lösung: $y(t) = C\mathrm{e}^{7t} - \frac{1}{7}t - \frac{8}{49} + \frac{1}{7}\sin(7t) + \frac{1}{7}\cos(7t)$, $C \in \mathbb{R}$

b) lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
homogene DGL: $y'(x) - 5\cdot y(x) = 0$. Es folgt $y_h(x) = C\mathrm{e}^{5x}$, $C \in \mathbb{R}$
inhomogene DGL: $y'(x) - 5\cdot y(x) = x + \mathrm{e}^{2x}$
Ansatz vom Typ der Störung: $y_s(x) = A + Bx + C\mathrm{e}^{2x}$
Ableiten $y_s'(x) = B + 2C\mathrm{e}^{2x}$ und Einsetzen in die DGL liefert:

$B + 2C\mathrm{e}^{2x} - 5A - 5Bx - 5C\mathrm{e}^{2x} \doteq x + \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow$
$(B - 5A) - 5B\cdot x - 3C\cdot\mathrm{e}^{2x} \doteq x + \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow$
$C = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad B - 5A = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{25}$
Also: $y_s(x) = -\frac{1}{25} - \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}$
allgemeine Lösung: $y(x) = C\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{25} - \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$

Aufgabe 9.5

a) Bei der homogenen Differenzialgleichung

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

liefert der Exponentialansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

mit den reellen Wurzeln $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$.
Somit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

$$y_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2t} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Für die homogene Differenzialgleichung

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2.$$

Das Fundamentalsystem lautet

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{t}, \quad y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$$

und für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung folgt

$$y_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9.6

Für die homogene Differenzialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = 0$$

liefert der Exponentialansatz die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -1$. Es folgt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y_h(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Für die inhomogene Differenzialgleichung

$$y''(t) + y'(t) = 1$$

ist die rechte Seite $b(t) = 1$ eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung. Hier ist der Ansatz

$$y_s(t) = t \cdot \alpha_0$$

zu wählen, denn nach Einsetzen in die linke Seite der Differenzialgleichung muss noch eine Konstante übrig bleiben. Die Rechnung liefert $y_s'(t) = \alpha_0$, $y_s''(t) = 0$ und nach Einsetzen in die Differenzialgleichung $\alpha_0 = 1$. Also ist $y_s(t) = t$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung lautet

$$y(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-t} + t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9.7
homogene DGL: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$. Der Exponentialansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung
$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} = -2;\ -1 \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
inhomogene DGL: Der Ansatz vom Typ der Störung lautet: $y_s(t) = A + Bt + Ct\mathrm{e}^{-t}$ (Resonanz!), mit den Ableitungen $y_s'(t) = B + C\mathrm{e}^{-t} - Ct\mathrm{e}^{-t}$, $y_s''(t) = -2C\mathrm{e}^{-t} + Ct\mathrm{e}^{-t}$.
Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:
$C\mathrm{e}^{-t} + 2Bt + 3B + 2A \doteq 10t - \mathrm{e}^{-t} \Rightarrow C = -1, \quad B = 5, \quad A = -\frac{15}{2}$
Die Lösung ist $y(t) = y_h(t) + y_s(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-t} - \frac{15}{2} + 5t - t\mathrm{e}^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9.8
homogene DGL: $y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 0$. Der Exponentialansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert die charakteristische Gleichung
$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm \sqrt{2}j \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cdot \mathrm{e}^t \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \cdot \mathrm{e}^t \sin(\sqrt{2}t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
inhomogene DGL: Der Ansatz vom Typ der Störung lautet: $y_s(t) = A + Bt + C\mathrm{e}^t$, mit den Ableitungen $y_s'(t) = B + C\mathrm{e}^t$, $y_s''(t) = C\mathrm{e}^t$.
Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert:
$2C\mathrm{e}^t + 3Bt + 3A - 2B \doteq 10t + \mathrm{e}^t \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}, \quad B = \dfrac{10}{3}, \quad A = \dfrac{20}{9}$.
Die Lösung ist $y(t) = y_h(t) + y_s(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^t \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \cdot \mathrm{e}^t \sin(\sqrt{2}t) + \dfrac{20}{9} + \dfrac{10}{3}t + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Springer

http://www.springer.com/978-3-642-54940-3

Erfolgreich Starten ins Ingenieurstudium
Grundlagen der Mathematik anwendungsorientiert erklärt
Ritter, S.; Voß, U.
2015, VIII, 299 S. 130 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-54940-3