Überraschende Mathematische Kurzgeschichten

Ausgewählte Artikel des jungen Ablegers der Zeitschrift Die Wurzel

Antworten und Lösungen

Inhalt

2 Achilles und die Schildkröte – Kann man unendlich unendlich oft anhalten, wenn man jemanden überholen will?

Wo ist da der Fehler? Oder gibt es da überhaupt einen Fehler?

Natürlich wird ein schneller Läufer einen langsameren Läufer irgendwann überholen. Das kann man bei jedem Wettrennen beobachten. Man muss sich auf die Argumentation zum Zenon-Paradoxon einlassen, um den vermeidlichen Widerspruch zu erkennen. Der Betrachtungsweise folgend, wird die Laufstrecke in immer kleiner werdende Teilstrecken zerlegt. Dieses Vorgehen ist zulässig und ist an sich nicht fehlerhaft. Entscheidend ist, dass es unendlich viele Teilstrecken sind, die schließlich wieder zum Ganzen zusammengesetzt werden. Damit wird Achilles die Schildkröte doch erreichen.

Siehst du die Verbindung zwischen dem Wettrennen des Achilles und der Summe des Archimedes? Überholt Achilles die Schildkröte und wenn ja, an welchem Punkt wird das sein?

Die kleiner werdenden Teilstrecken entsprechen den Reziproken der Zweier-Potenzen. Bei der Summe dieser speziellen Folge handelt es sich um eine Geometrische Reihe mit q = ½. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Argumentation auch für andere echte Brüche gilt. Da die geometrische Reihe konvergiert, das heißt, die Summe der unendlichen Folgeglieder ergibt eine relle Zahl (in diesem Fall 2), wird Achilles die Schildkröte tatsächlich an der „Stelle 2“ überholen. Die Begründung für liefern die Argumentation von Archimedes.

Findest du die Schwäche in der Argumentation von Leibniz?

Die Argumentation von Leibniz scheint besonders elegant. Ihre Schwäche wird in einem analogen Beispiel deutlich:

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \cdots$$

$$\tfrac{1}{2}S = \tfrac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 64 + \cdots$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}S = \tfrac{1}{2} + S \Rightarrow S = -1$$

Das ist offensichtlich falsch. Eine weitere Lösung für diese Gleichung (und für die Gleichung im Artikel) wäre $S = \infty$. Es wird deutlich, dass bei der Argumentation von Leibniz vorausgesetzt wird, dass diese Summe wirklich existiert und einer reellen Zahl entspricht. In dem obigen Beispiel existiert diese Summe nicht (da diese Reihe nicht konvergiert). Im Beispiel von Archimedes im Artikel existiert die Summe tatsächlich. (Die zughörige Reihe ist konvergent.)

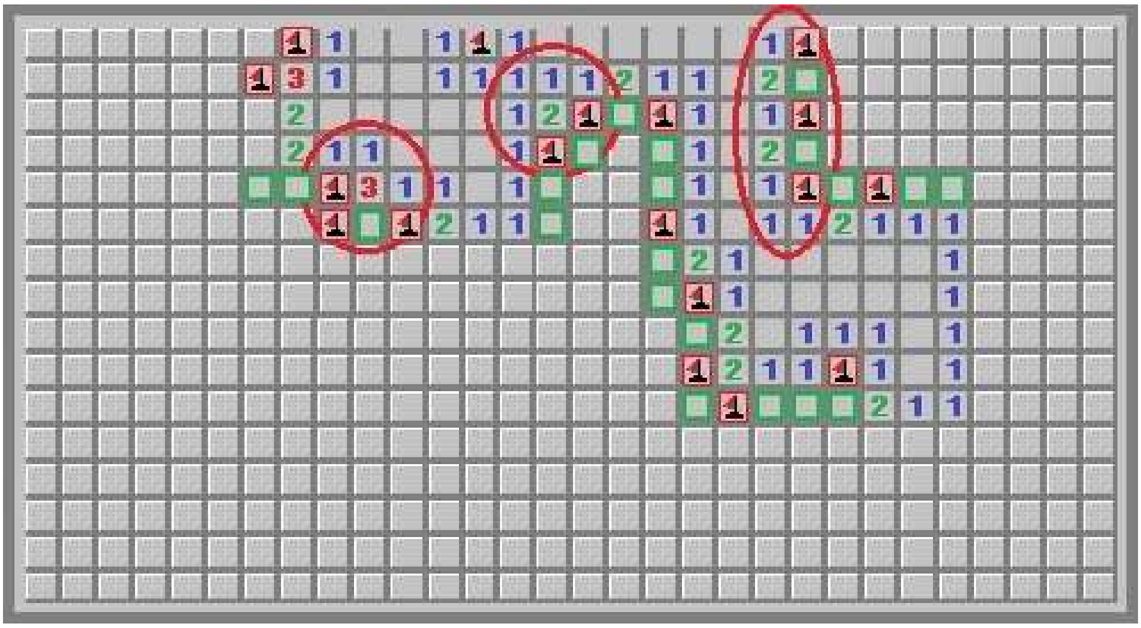
Knobelei

Stelle dir vor, du bist Portier in einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern. Leider ist das Hotel total ausgebucht und dennoch kommt ein weiterer Tourist zu dir und bittet um ein Zimmer. Da das Wetter schrecklich und das nächste Hotel weit weg ist, willst du ihn nicht wegschicken. **Wie kannst du ihm ein Zimmer anbieten, ohne einen anderen Gast zu entlassen?**

Eine ausführliche Antwort liefert der Artikel 6 Hilbert und das unendliche Hotel – Wie schwierig ist eigentlich die Arbeit eines Hotelportiers?

3 MineSweeper – Kann man mit der Analyse von Computerspielen Millionen verdienen?

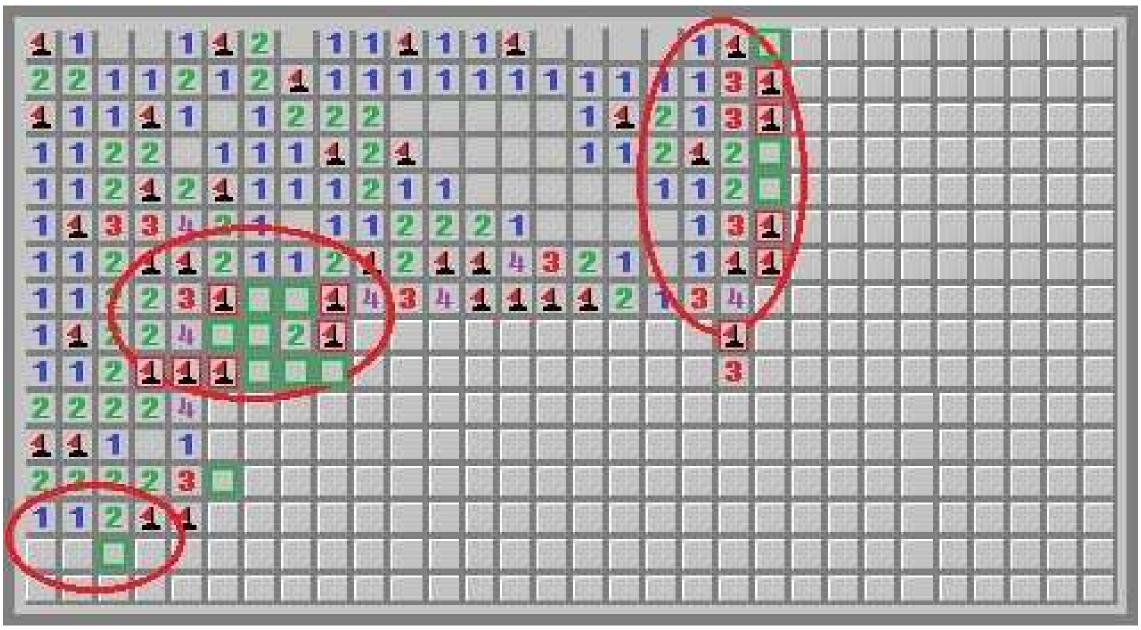
MineSweeper – Spielfeld 1



Du kannst dir ja selbst einmal überlegen, was man machen sollte, wenn man in unmittelbarer Nähe einer *Eins* wieder nur ein Feld mit einer *Eins* aufdeckt. Wie sollte man dann verfahren?

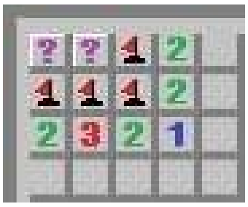
Die Wahrscheinlichkeit unter den verbleibenden 7 Feldern eine Mine zu finden liegt bei $\frac{1}{7} \approx 0{,}143$. *Für die übrigen Felder liegt die Wahrscheinlichkeit auf eine Mine zu treffen weiterhin bei* $\frac{99-2}{480-9} \approx 0{,}208$. *Damit ist es gescheiter die angrenzenden Felder zur zuerst aufgedeckten 1 anzuklicken. Wenn man keine Minen aufdeckt, sollte man auch die nächsten zwei Nachbarfelder aufdecken bevor man andere Felder auf dem Spielfeld auswählt, da die Wahrscheinlichkeiten mit* $\frac{1}{6}$ *bzw.* $\frac{1}{5}$ *leicht unter* $0{,}208$ *liegen.*

MineSweeper – Spielfeld 2



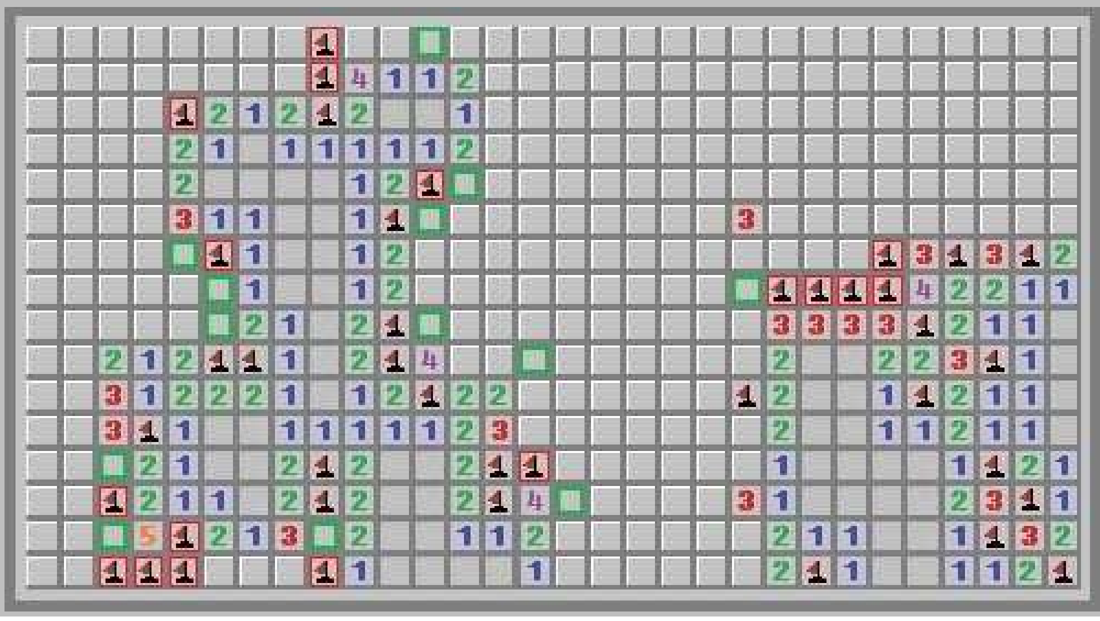
Kann man jedes Spielfeld von MineSweeper vollständig aufdecken, egal wo man anfängt?

Die Verteilung der Minen auf dem Spielfeld erfolgt zufällig. Zu Beginn des Spieles hat man keine Information über die Lage der Minen, dass bedeutet das Spiel kann mit dem ersten Klick vorbei sein. Ebenfalls hat man kein Wissen darüber, wo es bei der jeweiligen Lage der Minen am sinnvollsten ist, das Spielfeld aufzudecken. Daher kann es passieren, dass obwohl der überwiegende Anteil des Spielfeldes erschlossen ist und man genau weiß, wie viele Minen noch im Spiel sind, dass man zum Aufdecken des verbleibenden Feldes raten muss. Ein extremes Beispiel ist, dass man 474 der 480 Felder



entweder aufgedeckt oder als Mine markiert hat. Es wurden 94 Minen entdeckt. In der oberen linken Ecke verbleiben im Rechteck 6 Felder mit 5 Minen (siehe Ausschnitt links). Die umliegenden Zahlen zeigen an, dass die 4 Kästen an der Seite jeweils mit einer Mine besetzt sind. Allerdings ist es eine 50:50 Chance, wo die letzte Mine liegt. Nach einem langen guten Spiel, kann die ganze Arbeit mit einem einzigen finalen Click hinüber sein.

Knobelei



4 Turnierformen beim sportlichen Wettkampf

Auf der Grundlage dieser Überlegungen kannst Du auch weitere Summenformeln aufstellen. Du kannst Dir ja mal überlegen, wie eine endliche Summe von geraden beziehungsweise ungeraden Zahlen berechnet werden kann.

Man kann die gesuchten Summen mithilfe der ermittelten Summenformel für eine endliche Summe natürlicher Zahlen bestimmen.

- *endliche Summe gerader Zahlen:*

$$2+4+6+8+\cdots+2n = 2\cdot(1+2+3+4+\cdots+n) = 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \boldsymbol{n\cdot(n+1)}$$

- *endliche Summe ungerader Zahlen:*

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = 2+4+6+8+\cdots+2n-n = 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - n = \boldsymbol{n^2}$$

Du kannst Dir ja mal überlegen, wie viele Spiele bei jeder Meisterschaft gespielt werden. Vielleicht kannst Du ja auch eine Formel für eine allgemeine Anzahl an Teams, die an einer Fußballmeisterschaft teilnehmen, aufstellen.

Es muss zunächst festgehalten werden, dass bei einer Fußballmeisterschaft die Mannschaften in 4er-Gruppen in die Gruppenphase (Round-Robin-System) starten. In einer 4er-Gruppe spielt jeder gegen jeden, dass heißt es gibt $\frac{4\cdot(4-1)}{2}=6$ *Spiele pro Gruppe. An einer Europameisterschaft nahmen von 1996 bis 2012 jeweils 16 Mannschaften teil. Daher gab es vier Gruppen. Nach der Gruppenphase kamen die beiden besten Mannschaften jeder Gruppe weiter, es gab also* $8-1=7$ *Spiele. Das bedeutet insgesamt gab es* $4\cdot\frac{4\cdot(4-1)}{2}+8-1=4\cdot6+8-1=31$ *Spiele. Die Rechnung erfolgt analog für eine Weltmeisterschaft. Von 1998 bis 2014 starteten jeweils 32 Mannschaften bei der Fußballweltmeisterschaft. Es gab 8 Gruppen mit jeweils 6 Spielen. Es kamen jeweils die beiden besten Mannschaften jeder Gruppe weiter, was 16 – 1 = 15 Spiele ergab. In Summe handelte es sich also um* $8\cdot\frac{4\cdot(4-1)}{2}+16-1=8\cdot6+15-1=63$ *Spiele. Beiden Rechnungen liegt derselbe Gedankengang zugrunde, welchen man wie folgt verallgemeinern kann. Die Anzahl an Teilnehmern an einer Fußballmeisterschaft sei n. Die Anzahl ist durch 4 teilbar, da die Mannsachten in 4er-Gruppen starten. Damit ergibt sich für jede Gruppe eine feste Anzahl von 6 Spielen. Wenn immer die beiden besten Teams jeder Gruppe weiterkommen, gibt es* $\frac{n}{2}$ *Mannschaften zu Beginn der KO-Runde. In der KO-Runde werden demnach* $\frac{n}{2}-1$ *viele Spiele gespielt. Summiert man alle Spiele auf, erhält man* $\frac{n}{4}\cdot6+\frac{n}{2}-1=3\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-1=4\cdot\frac{n}{2}-1=\mathbf{2n-1}$*. Das ist doch eigentlich ganz überschaubar.*

Knobelei

Wie oft muss man eine Tafel Schokolade brechen, damit sie in all ihre Stücke zerteilt ist? Kannst Du eine Verbindung zu einem hier vorgestellten Spielsystem herstellen?

Angenommen die Tafel Schokolade hat 24 Stücke, dann muss sie 23-mal gebrochen werden, damit jedes Stück einzeln liegt. Probiere es aus! Wenn eine Tafel n Stücke besitzt, muss sie n – 1 mal gebrochen werden, so dass alle Teile einzeln vorliegen. Jedes Schokoladenstück muss von der Tafel abgebrochen werden, bis auf das letzte Stück, welches frei bleibt. Es handelt sich um eine vergleichbare Argumentation, wie bei der Bestimmung der Anzahl von Spielen im KO-System. Die Schokoladenstücke stehen symbolisch für die Spieler.

5 Eine kleine Übersicht zu weiteren Turnierformen

Wie viele Spiele gibt es in einem Turnier mit n Teilnehmern, das nach dem Doppel-KO-System gespielt wird? Wie viele Spiele hat der Sieger mindestens, wie viele höchstens?

Wie der Name vermuten lässt, gibt es doppelt so viele Spiele in einem Turnier, das im Doppel-KO-System ausgetragen wird, als in einem Turnier, das nur im KO-System gespielt wird. Wenn n *die Anzahl der Teilnehmer ist, ergibt sich die Anzahl der Spiele durch* $2\cdot(n-1)=2\cdot n-2$*. Die Begründung ist der Argumentation im Artikel zum KO-System ähnlich. Jeder Spieler außer der Sieger, der immer gewinnt, muss zweimal verlieren. Wenn der Sieger entsprechend den Regularien des Doppel-KO-Systems doch einmal verliert und anschließend im Finale gewinnt, wird der im Finale unterlegende Teilnehmer im gesamten Turnier nur einmal verloren haben. Die Gesamtanzahl der Spiele im Turnier ist damit dieselbe.*

Der Sieger des Doppel-KO-Systems hat mindestens so viele Spiele wie im einfachen KO-System. Dafür ist die Anzahl von Stufen (Ebenen) m *im Turnierbaum mit* n *Teilnehmern entscheidend, bei Zweier-Paarungen entspricht* $m = \lceil log_2\, n \rceil$*. In diesem Fall hat er alle Spiele gewonnen. Entsprechend der Turnier-Form kann er allerdings 1 Spiel verlieren und dennoch im Final gewinnen. In diesem Fall hat der Gewinner des Turnieres* $\lceil log_2\, n \rceil + 1$ *viele Spiele.*

Knobelei

Es soll ein Turnier im Ringen veranstaltet werden, das nach dem Modus KO-System mit Trostrunde ausgetragen wird, wobei die Trostrunde nur erreicht, wer gegen einen der beiden Finalisten verloren hat. Es stehen zwei Matten zur Verfügung, ein Kampf dauert (inklusive Pausen) höchstens zehn Minuten, jeder Kämpfer muss zwischen zwei Kämpfen mindestens zehn Minuten Pause haben und das Finale soll der letzte Kampf sein. **Wie viele Kämpfer dürfen maximal am Turnier teilnehmen, wenn dieses höchstens fünf Stunden dauern soll? Wie viele wären es, wenn das Turnier im Doppel-KO-System ausgetragen würde?**

Bemerkenswerter Weise können in einem 5-stündigen Turnier 48 Kämpfer starten, wenn es im Modus KO-System mit Trostrunde ausgetragen wird. In der KO-Phase werden 48 – 1 = 47 Kämpfe ausgetragen. Jeder Kampf dauert 10 Minuten, daher dauert die KO-Phase 470 Minuten. An der Trostrunde nehmen nur Sportler teil, die gegen die beiden Finalisten verloren haben. Jeder Finalist bestreitet in der KO-Phase inklusive Finale $\lceil \log_2 50 \rceil = 6$ *Kämpfe. Es werden also maximal (6 – 1) + (6 – 1) = 10 Teilnehmer an der Trostrunde teilnehmen. In der Trostrunde wird es also höchstens 10 – 1 = 9 Kämpfe geben. Das entspricht 90 Minuten. Das ganze Turnier würde also 470 + 90 = 560 Minuten dauern. Da die Finals und Halbfinals (Erst- und Trostrunde) nicht parallel laufen können, müssen dafür 4 · 10 = 40 Minuten reserviert werden. Die verbleibenden 520 Minuten können halbiert werden, da auf den zwei zur Verfügung stehenden Matten immer zwei Kämpfe parallel laufen können. Die 10-minütigen Pausen können dann durch entsprechende Organisation jedem Sportler garantiert werden. Die Kämpfe der Trostrunde können organisatorisch verflochten werden. Damit ergibt sich eine Turnierzeit von 260 + 40 = 300 Minuten, was 5 Stunden entspricht.*

Ein Turnier mit zwölf Teilnehmern wird im Modus Round-Robin + Page-Playoff (vier Teilnehmer) gespielt. Wie viele Spiele hat der Turniersieger im gesamten Turnier höchstens verloren?

Der Viertplatzierte der Round-Robin-Phase muss mindestens 6 Spiele $\left(> \frac{11}{2}\right)$ *gewinnen. In der Page-Playoff-Phase darf er nicht verlieren. Er kann also im Turnier 5 Spiele verlieren und Gesamtsieger werden. In der Page-Playoff-Phase darf nur der Zweitplatzierte der Round-Robin-Phase einmal verlieren. Falls man z.B. Torerfolge zur Ermittlung der Platzierung zulässt, könnte auch der Zweitplatzierte 5 Spiele in der Round-Robin-Phase verlieren. Dies entspricht einem Gleichstand an gewonnen Spielen der ersten vier Platzierte. Der Zweitplatzierte der Round-Robin-Phase kann sich noch eine weitere Niederlage in der Page-Playoff-Phase leisten, was zu insgesamt 6 verlorenen Spielen für den Gesamtsiegers führen kann.*

6 Hilbert und das unendliche Hotel – Wie schwierig ist eigentlich die Arbeit eines Hotelportiers?

Kannst du mithilfe der bisherigen Überlegungen zeigen, dass der Portier durch einmalige Benachrichtigung der Hotelgäste auch eine Reisegruppe mit endlich vielen Gästen zusätzlich beherbergen kann?

Jeder Hotelgast soll zu seiner Zimmernummer die Anzahl der ankommenden Gäste addieren und in das Zimmer mit der resultierenden Nummer umziehen.

Könntest du auch zeigen, dass es genauso viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen gibt?

Eine mögliche Idee für eine eineindeutige Zuordnung zwischen den ganzen Zahlen und den natürlichen Zahlen ist, dass man die positiven Zahlen (mit der Null) auf die geraden Zahlen und die negativen Zahlen auf die ungeraden Zahlen abbildet. Formal kann man das wie folgt ausdrücken:

$$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \; mit \; f(z) = \begin{cases} 2z+2, & z \geq 0 \\ -2z-1, & z < 0 \end{cases}$$

Kannst du begründen, warum die Lücken immer genau um Eins größer werden?

In jeder neuen Summe kommt eine um Eins größere Zahl hinzu. Jede Lücke (die Differenz zweier benachbarten Summen) wächst damit ebenfalls immer um Eins.

Von hier ist es nur noch ein Katzensprung bis zum Beweis, dass auch die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind. Hast du eine Idee, wie?

Die Idee ist, dass die Hotelgäste nicht in ein Zimmer mit der Nummer umziehen, die der Summe $1 + \cdots + n$ entspricht, sondern in ein Zimmer mit der Nummer $2(1 + \cdots + n)$. Dann werden die entstehenden Lücken doppelt so lang und ermöglichen die zusätzliche Abbildung der negativen rationalen Zahlen auf die Hälfte der vergrößerten Lücken.

7 Punkt, Satz und Sieg – Oder doch nicht?

Du kannst dir ja mal überlegen, was es für einen Grund geben könnte, die Punkte beim Rugby so zu verteilen. Was macht es zum Beispiel aus, dass die 3, die 5 und die 7 Primzahlen sind?

Möchte man in einem Spiel verschiedene Möglichkeiten für den Punkterfolg zulassen, muss man bedenken, dass es mit unterschiedlichen Schwierigkeiten verbunden sein kann, diese Punkte zu erzielen. Zum Beispiel wird im aktuellen Rugby Union das Ablegen des Balles hinter der gegnerischen Grundlinie (ein sogenannter Versuch) mit 5 Punkten bewertet. Der anschließende Kick (Erhöhung) auf die Posten erfolgt ohne Gegnereinwirkung und bringt 2 Punkte. Da der Kick aus dem Spiel heraus schwieriger ist, als nach einem Versuch wird dieser höher bewertet (3 Punkte > 2 Punkte). Das gleiche gilt für die Wertigkeit eines Strafstoßes, wobei hier der Aspekt des Nachteilsausgleichs nach einer unsportlichen Aktion die entscheidende Rolle spielt. Die beschriebenen Wertigkeiten sind keines Wegs von Anfang klar. Sie sind über die Jahre der Spielentwicklung immer wieder verändert wurden. Bis 1992 gab es im Rugby Union nur 4 Punkte für einen Versuch und 2 Punkte für die Erhöhung. Das bedeutet allerdings, dass zwei Strafstöße (3 + 3 = 6) denselben Punktewert ergeben, wie ein Versuch mit einer Erhöhung (4 + 2 = 6). Aus diesem Grund hat man die Wertigkeit eines Versuches auf 5 Punkte erhöht. Ein derartiger Ausgleich der Punktestände, wie es im Rugby Union bis 1992 möglich war, wird erschwert, wenn die Wertigkeiten der Punkterfolge Primzahlen entsprechen. So besitzen zum Beispiel erst 5 Strafstöße dieselbe Wertigkeit wie 3 Versuche (3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 5 + 5 = 3 · 5 = 15). Analog verhält es sich mit den Strafstößen und den Versuchen plus Erhöhung (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 7 + 7 + 7 = 3 · 7 = 21). Hier kommt die offensichtliche Eigenschaft von Primzahlen zum Tragen, dass zwei Primzahlen zueinander teilerfremd sind und daher das kleinste gemeinsame Vielfache gleich dem Produkt der beiden Primzahlen ist.

Kann es eigentlich zu einem Unentschieden nach 15 Spielen kommen? Was meinst du dazu?

In 15 Spielen werden 120 Punkte vergeben. Das bedeutet für ein Unentschieden müssen beide Spieler jeweils 60 Punkte besitzen. Das ist möglich, wenn ein Spieler zum Beispiel die ersten 11 Spiele außer dem 6. Spiel gewinnt und der Gegenspieler die übrigen Spiele gewinnt:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 60 = 6 + 12 + 13 + 14 + 15

Gibt es noch mehr Punktestände, bei denen ein Spiel irrelevant werden kann? Gibt es überhaupt einen Verlauf, bei dem kein Spiel irrelevant ist?

Es gibt verschiedene Szenarien, wie der Spielstand 14:14 entstanden sein kann. In jedem Fall wäre das 7. Spiel nicht entscheidend für den Gesamtausgang. Auch der Spielstand 15:6 kann auf verschiedene Weisen entstehen, allerdings ist dann immer das 6. Spiel unbedeutend für den Gesamtausgang. Der Grund liegt jeweils darin, dass 14 + 8 = 22 bzw. 15 + 7 = 22 gilt und 22 nur knapp die Hälfte (22,5) aller möglichen Punkte ist. Damit das 6. Spiel unwichtig werden würde müssten 22 – 6 = 16 Punkte von einem Spieler in den vorherigen 5 Spielen geholt werden. Das ist aber nicht möglich, da 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Das Gleiche gilt für die niedriger bewerteten Spiele und somit kann es kein weiteres Spiel (außer eben das Spiel 8 oder 7) geben, das zu irgendeinem Spielstand irrelevant wird.

Damit ist sofort klar, dass es Spielverläufe gibt, bei denen kein Spiel irrelevant ist. Ein schönes Beispiel ist, wenn beide Spieler immer abwechselnd Punkten. Dann entscheidet erst das letzte Spiel über den Gesamtsieg.

Knobelei

In einem Korb liegen 5 Äpfel. Um den Korb stehen 5 Kinder, die je einen Apfel bekommen möchten. Kann jedes Kind einen Apfel erhalten und dennoch ein Apfel im Korb verbleiben?

Ja, vier Kinder bekommen je einen Apfel in die Hand und das fünfte Kind bekommt den Korb mit dem Apfel darin.

9 Jenseits der Abzählbarkeit

Kannst du begründen, warum diese Einschränkung unbedingt notwendig ist?

Ohne die Einschränkung entsteht keine Funktion (also keine eindeutige Zuordnung).

Hast du eine Idee, wie man es zeigen könnte?

Eine mögliche Funktion ist: $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *mit* $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot arctan(x) + \frac{1}{2}$

Kannst du begründen, warum wir mit Darstellungen, in denen 0 und 9 vorkommen können, in Schwierigkeiten geraten können?

Es gibt Zahlen, deren Dezimaldarstellung nicht eindeutig ist. Ein Beispiel ist $0{,}1\overline{9} = 0{,}2\overline{0}$. *Wenn man die Ziffern 0 und 9 zulässt, ist es denkbar, dass nach der Durchführung des Diagonalverfahrens eine Zahl entsteht, die doch in der Liste vorkommt. Dies wäre kein Widerspruch.*

10 Aus Drei mach Vier – Vom Dreieck zum Tetraeder

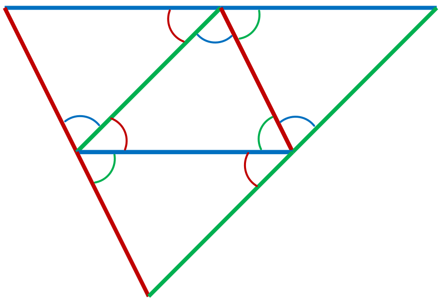
Kannst du erkennen, wie man die angesprochene Inkugel in einem allgemeinen Tetraeder konstruieren könnte? Ein Tipp: Es verhält sich ganz ähnlich mit dem Inkreis im allgemeinen Dreieck.

Bekannt ist der Inkreis im Dreieck, der die Seiten des Dreiecks (von Innen) berührt. Sein Mittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt der (innen)winkelhalbierenden Geraden des Dreiecks. Die Analogisierung gelingt jedoch an dieser Stelle nicht so mühelos. Es muss festgehalten werden, dass der Mittelpunkt der Inkugel zu allen vier Flächen des Tetraeders den gleichen Abstand besitzen soll. In diesem Fall ist für die Konstruktion des Inkugelmittelpunkts der Begriff der Winkelhalbierenden anzupassen. Es muss also für alle sechs Seitenflächenpaare die (innen)winkelhalbierende Ebene konstruiert werden. Es ergibt sich die folgende Vermutung:

Die sechs winkelhalbierenden Ebenen der Seitenflächen eines Tetraeders schneiden sich alle in einem Punkt. Dies ist der Inkugelmittelpunkt des Tetraeders.

Dieser Satz kann analog zum ebenen Fall bewiesen werden kann. Für die Konstruktion des Inkugelmittelpunktes reicht es aus, drei der sechs winkelhalbierenden Ebenen (diese drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt) oder zwei der Schnittgeraden von jeweils 2 Paaren der winkelhalbierenden Ebenen zu betrachten.

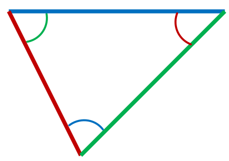
An dieser Stelle kann man sich überlegen, warum bei einem gleichschenkligen Tetraeder die Winkelsumme in jeder Ecke genau 180° sein muss. Darüber kannst du ja mal nachdenken.

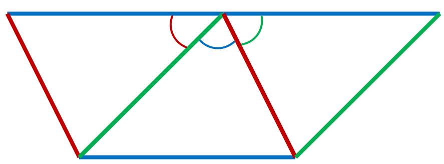


Wie man an dem Flächennetz des gleichschenkligen Tetraeders schon erkennen kann, stoßen in jeder der 4 Ecken, jeweils die drei Winkel des spitzwinkligen Ausgangsdreieckes zusammen. Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ist 180°. Diese stimmt mit der die Winkelsumme in jeder Ecke im gleichschenkligen Tetraeder überein (vgl. Abbildung links).

Knobelei

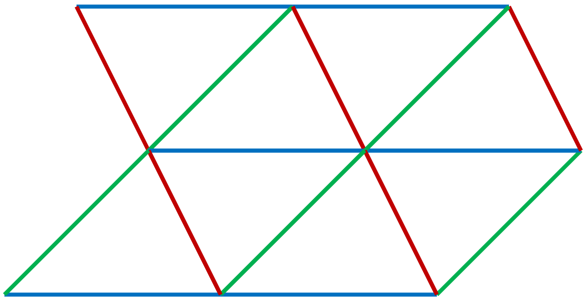
Gegeben ist ein allgemeines Dreieck, welches beliebig oft vervielfältigt werden kann. Ist es möglich, die Dreiecke so zusammen zu legen, das damit die gesamte Ebene abgedeckt wird, ohne dass eine Lücke übrig bleibt? Oder anders gefragt: Kann die Ebene mit kongruenten Dreiecken parkettiert werden?





Es ist möglich mit kongruenten allgemeinen Dreiecken die Ebene lückenlos auszufüllen. Die Begründung liegt in dem bekannten Satz, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck gleich 180° ist. Drei kongruente Dreiecke müssen so zusammen gelegt werden, dass alle drei verschiedenen Winkel zusammenkommen (vgl. Abbildungsreihe rechts). Diese ergeben sich eben zu 180°. Es sollten immer die gleichen Seiten zusammen gelegt werden, sie ergeben Geraden in der Ebene. Es ist schnell einzusehen, dass mehrere Dreiecke zu endlosen Streifen zusammengesetzt werden können, die wiederum beliebig vervielfältigt die ganze Ebene ausfüllen können.

Wer dazu mehr erfahren will, kann unter dem Stichwort Paketierung der Ebene nachschlagen. Ebenso sind diese Überlegungen Ausgangspunkt für die Ornamentik.



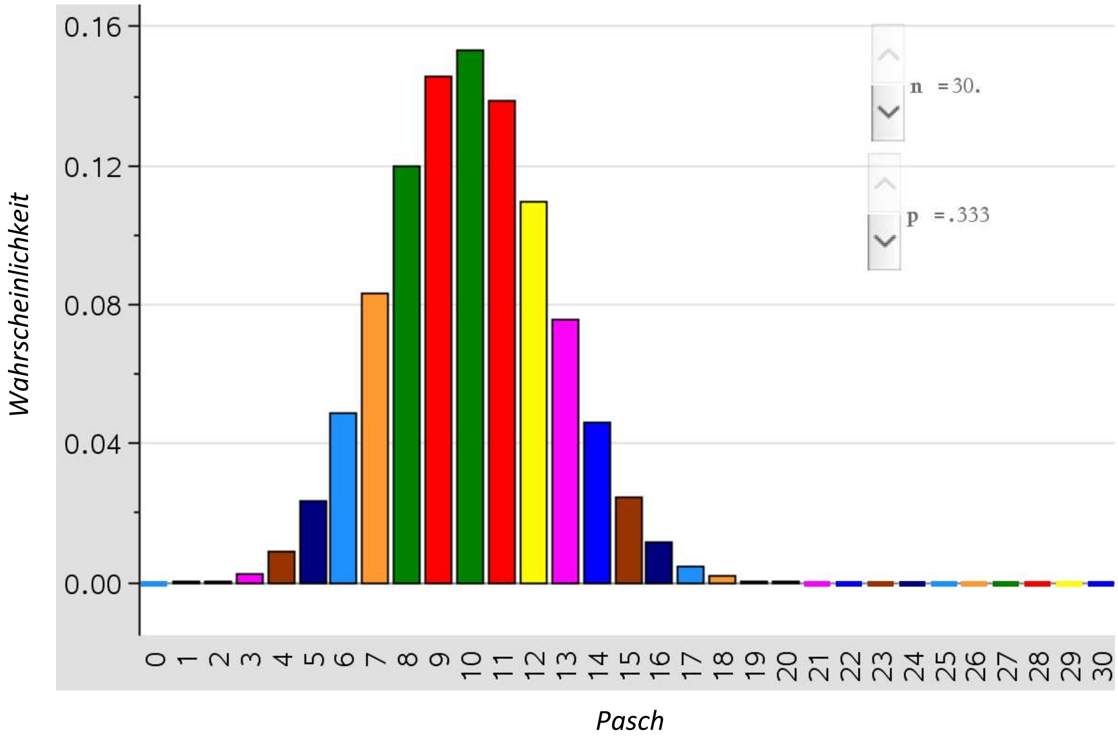
11 Die Würfel sind gefallen, Davy Jones.

Was meinst du, was Davy Jones für ein Spielertyp ist? Würdest du in einem Spiel auf eine Chance von 22% setzen?

Diese Chance scheint zunächst recht niedrig, aber es handelt sich nicht um die Wahrscheinlichkeit das Spiel zu gewinnen. Die Strategie von Davy Jones ist offensiv, aber er ist kein Hasardeur, wie in dem betreffenden Artikel ausgeführt wird.

Du kannst dir ja mal überlegen, wie sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten ändern.

Die Joker bewirken, dass sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein weiterer Würfel die gleiche Augenzahl zeigt, verdoppelt wird und damit gleich $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ *ist. Dies gilt für Päsche der Augenzahlen 1 bis 5. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Würfel das Joker-Symbol (6 oder Stern) zeigt, bleibt unverändert bei* $\frac{1}{6}$ *. Die Wahrscheinlichkeiten für die Päsche ändern sich während des Spieles mit der Anzahl der Würfel. Zu Beginn sind 30 Würfel im Spiel. Die Veränderung der Wahrscheinlichkeiten lässt sich in Form eines Histogramms mit einer Tabellenkalkulationssoftware dynamischen darstellen (vgl. Abbildung). Eine Beispieldatei steht ebenfalls zum Download bereit.*



<u>Abbildung:</u> Dynamisches Histogramm der Wahrscheinlichkeiten von Päschen im Spiel BLUFF.

Knobelei

Ein Pirat will seinen Schatz an vielen unterschiedlichen Orten verstecken. Er besitzt Golddukaten, Silberdukaten, Perlen und Diamanten. In ein Ledersäckchen will er immer vier Wertsachen stecken. **Wie viele Möglichkeiten hat er, ein solches Säckchen zusammenzustellen?**

Man kann sich vorstellen, dass eine mögliche Belegung für ein Säckchen durch eine Zeichenkette der Länge 7 repräsentiert wird. Dabei stehen 4 Zeichen für die 4 Plätze im Säckchen und 3 Zeichen für die Trennungen (z.B. Unterstrich) zwischen den 4 Schatzarten (z.B. G, S, P, D). Säckchen mit jeweils einem Schatz entspricht dann der Zeichenkette G_S_P_D. Ein Säckchen mit 2 Golddukaten, 1 Perle und 1 Diamanten entspräche GG_ _P_D. Für 4 Perlen lautet die Zeichenkette _ _PPPP_. Mit dieser Betrachtungsweise wird deutlich, dass die gesuchte Anzahl der Anzahl an Möglichkeiten entspricht, 3 Unterstriche auf einer Zeichenkette der Länge 7 zu verteilen. Die betreffende Anzahl entspricht dem Binomialkoeffizienten $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$ *(vgl. Artikel 11 Die Würfel sind gefallen, Davy Jones.).*

Das Füllen der Säckchen kann als Ziehen mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge interpretiert werden, was zum selben Ergebnis führt: $\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35.$

12 Robin Hood und die Steuer bei Matrixspielen

Du kannst mithilfe der Gleichungssysteme (1.1) und (1.2) überprüfen, ob $\overline{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und $\overline{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ tatsächlich die Gleichgewichts-Strategien in unserem Beispiel sind!

In unserem Beispiel ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. *Eingesetzt in das Gleichungssystem (1.1) ergibt sich:*

$$\begin{gathered} -4p_1 + 8p_2 = 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{gathered}$$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $\overline{p} = (p_1,\ p_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. *Man erhält die Lösung, indem man beispielsweise die umgestellte zweite Gleichung* $p_2 = 1 - p_1$ *in die erste Gleichung einsetzt* $-4p_1 + 8 - 8p_1 = 0$ *und nach* $p_1 = \frac{2}{3}$ *umstellt. Weiter ergibt sich daraus* $p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{3}$. *Analog geht man mit dem Gleichungssystem (1.2) vor*

$$\begin{gathered} 3q_1 - 9q_2 = 0 \\ q_1 + q_2 = 1 \end{gathered}$$

und erhält die Lösung $\overline{q} = (q_1,\ q_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Knobelei

Welchen Effekt auf den erwarteten Transfer hätte es in unserem Beispiel, wenn Robin Hood keine Steuer von den Reichen nähme, sondern stattdessen den Armen, also den Verlierern, einen relativen Anteil ihres Verlustes zurückerstattete?

Die Auszahlungen in dieser Situation sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

Sicht von Spieler 1

Spieler 2

Spieler 1	1	3
1	1	$-\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot 3$
2	$-\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot 2$	6

Sicht von Spieler 2

Spieler 2

Spieler 1	1	3
1	$-\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot 1$	3
2	2	$-\left(1-\frac{x}{100}\right)\cdot 6$

<u>Tabelle:</u> Auszahlung aus Sicht der beiden Spieler bei x% Verlust-Rückerstattung.

In Abhängigkeit des Steuerparameters x ergeben sich die Strategien:

$$(\bar{p}(x),\bar{q}(x)) = \left(\left(\frac{8-6\frac{x}{100}}{12-7\frac{x}{100}},\frac{4-\frac{x}{100}}{12-7\frac{x}{100}}\right),\left(\frac{9-3\frac{x}{100}}{12-5\frac{x}{100}},\frac{3-2\frac{x}{100}}{12-5\frac{x}{100}}\right)\right)$$

Für die im Text beschriebenen Besteuerungssituationen sind die Gleichgewichtsstrategien im Übrigen gegeben durch:

$$(\bar{p}(x),\bar{q}(x)) = \left(\left(\frac{8-2\frac{x}{100}}{12-5\frac{x}{100}},\frac{4-3\frac{x}{100}}{12-5\frac{x}{100}}\right),\left(\frac{9-6\frac{x}{100}}{12-7\frac{x}{100}},\frac{3-\frac{x}{100}}{12-7\frac{x}{100}}\right)\right)$$

Man erhält in der Rückerstattungssituation einen erwarteten Transfer von

$$ET(x) = \frac{72\left(\frac{x}{100}-2\right)^2}{35\left(\frac{x}{100}\right)^2 - 144\frac{x}{100} + 144}$$

Dieser ist identisch zum erwarteten Transfer in der im Text beschriebenen Besteuerungssituation, obwohl die Gleichgewichtsstrategien voneinander abweichen. Es ist also egal, ob der Gewinner einen prozentualen Anteil x abgeben muss, oder der Verlierer einen prozentualen Anteil x zurückerstattet bekommt, der erwartete Transfer ist identisch. Auch hier kann man beweisen, dass diese Übereinstimmung bei allen Matrixspielen eines bestimmten Typs auftritt. Dazu erfährt man, wenn man dem nachstehenden Link folgt:

http://www.minet.uni-jena.de/preprints/althoefer_14/TaxedMatrixGames.pdf

13 Fußball – Das ist reine Glückssache?

Du kannst dir ja mal die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse überlegen, wenn in einem Spiel 4 Tore fallen. Wie verändern sich die Wahrscheinlichkeiten, wenn beide Mannschaften gleich stark sind?

Wenn in einem Spiel 4 Tore fallen, gibt es 5 mögliche Spielergebnisse 0:4, 1:3, 2:2, 3:1 und 4:0. Dabei gibt es jeweils nur eine Möglichkeit, wie das 0:4 bzw. das 4:0 zustande kommen können. Für das 1:3 und das 3:1 gibt es jeweils 4 Möglichkeiten der Trefferabfolge. Das 2:2 kann auf 6 Arten entstehen. Unter der Voraussetzung, dass eine Mannschaft im Durchschnitt doppelt so viele Tore wie die gegnerische Mannschaft schießt, ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Spiel-ergebnis	Möglichkeiten der Trefferabfolge	Wahrscheinlichkeit
4:0	1	$1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \approx 0{,}198$
3:1	4	$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81} \approx 0{,}395$
2:2	6	$6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} \approx 0{,}296$
1:3	4	$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81} \approx 0{,}099$
0:4	1	$1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0{,}012$

Tabelle: Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Spielergebnisse bei 4 Toren im Spiel.
Das bedeutet, der Underdog gewinnt ein Spiel mit 4 Toren mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 11 %.
Die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden liegt bei knapp 30 %.

Wenn beide Teams gleichstark sind, sind die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Spielergebnisse symmetrisch. Die Wahrscheinlichkeiten für ein 1:3 und ein 3:1 aus dem obigen Beispiel sind also jeweils $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} = 0{,}25$. *Ein Unentschieden (2:2) hat in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit* $6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Anmerkung zur Poisson-Verteilung

Dem aufmerksamen Leser ist sicherlich nicht entgangen, dass die abgedruckte Formel zur Poisson-Verteilung fehlerhaft ist. Sie lautet richtig: $P_k(a) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a}$.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen möglichen Spielausgang k : l durch

$$P_{k,l}(a,b) = P_k(a) \cdot P_l(b) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a} \cdot \frac{b^l}{l!} \cdot e^{-b} = \frac{a^k \cdot b^l}{k! \cdot l!} \cdot e^{-(a+b)}.$$

Mit dieser Formel können die Wahrscheinlichkeiten der Tab. 13.2 aus dem Artikel berechnet werden.

15 Wann ist weniger mehr? Der optimale Winkel beim Kugelstoßen.

Aber ist das wirklich so? Was meinst du?

Die Kugel beim olympischen Kugelstoß ist sehr schwer (7,257 kg) und kann daher nicht von einem Menschen mit einer hohen Geschwindigkeit abgeworfen werden. Zum einen bedeutet das, dass der Luftwiderstand den Flug der Kugel kaum beeinflusst. Die Flugbahn beschreibt nahezu eine Parabel. Zum anderen ist der Höhenunterschied zwischen dem Abwurf- und dem Auftreff-Punkt bedeutend. Im Artikel wird ausgeführt, wie sich dieser Umstand auf den geeigneten Abwurfwinkel auswirkt.

Probiere es selbst mit einem CAS aus

Mit einem CAS kann der optimale Winkel experimentell bestimmt werden. Eine Beispieldatei steht zum Download bereit.

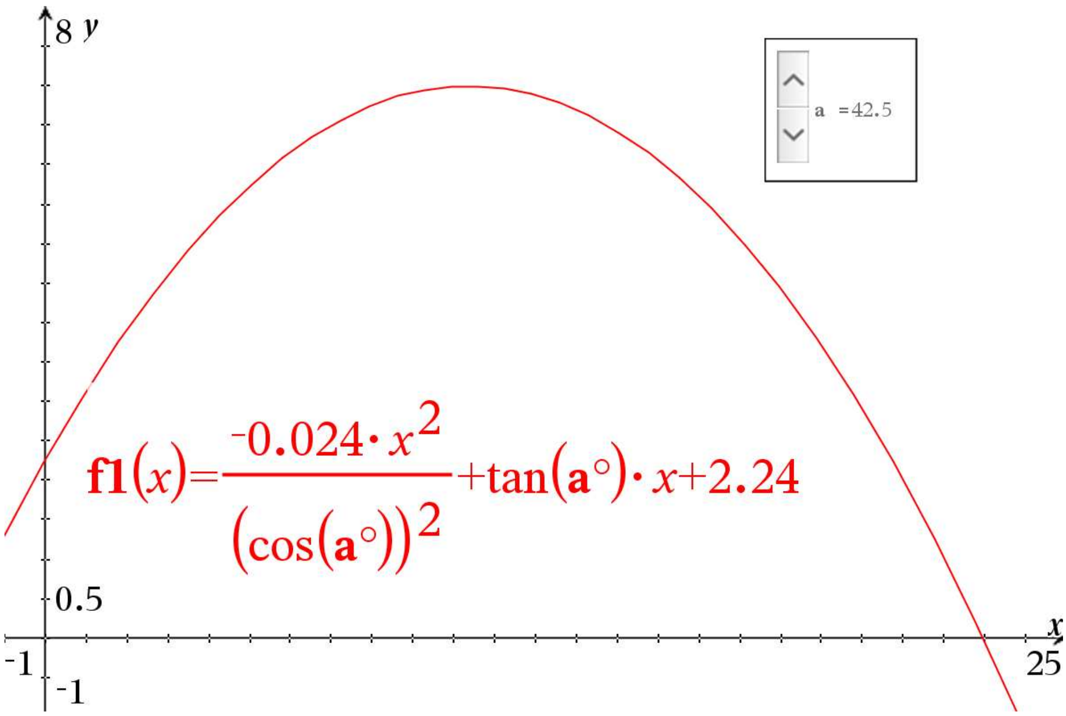


Abbildung: *Experimentelles Bestimmen des optimalen Winkels beim Kugelstoß mittels CAS.*

Was kannst du dem Nachwuchssportler mit auf dem Weg geben?

Der normierte Hintergrund im Video ermöglicht gute Schätzungen für die Abwurfgeschwindigkeit der Kugel vom Nachwuchssportler. Außerdem lässt sich der Abwurfwinkel bestimmen. Dabei hilft eine dynamische Geometriesoftware wie GeoGebra (vgl. QR-Code):

https://www.geogebra.org/download

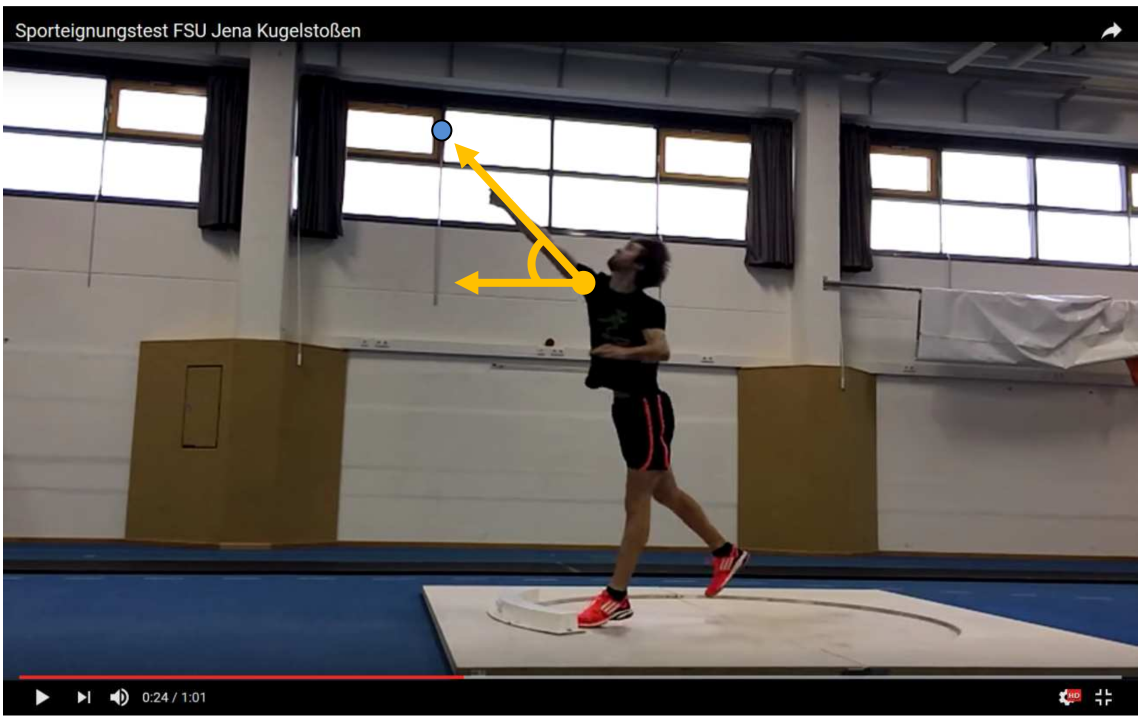


Abbildung: *Nachwuchssportler im Video. Eingezeichnet ist der Abwurfwinkel α = 42,07°.*

Der Nachwuchssportler ist auf einem sehr guten Weg. Es ist ein gutes Beispiel für einen explosiven Abwurf und einen guten Abwurfwinkel. Er muss an seiner Schnellkraft arbeiten, wenn er größere Weiten erzielen möchte.

Knobelei

Die Bestweiten beim Kugelstoßen liegen um die 23 Meter, beim Speerwurf liegen sie um die 100 Meter. Was bedeutet das in Bezug auf den optimalen Abwurfwinkel beim Speerwurf?

In Relation zu der Wurfweite ist die Differenz zwischen Abwurf- und Auftreff-Punkt beim Speerwurf klein und damit zu vernachlässigen. Es gilt die Faustformel des Schrägenwurfes, dass der optimale Abwurfwinkel bei ca. 45° liegt.

16 Über Tische und Bänke

Wie geht das zusammen? Ist es ein Unterschied, ob man Bänke oder Stühle zählt? Welche Wahrscheinlichkeit ist die richtige? Oder sind etwa beide richtig?

Es macht einen Unterschied, ob man Bänke oder Stühle zählt. Beide Betrachtungen sind richtig. Das eine Mal handelt es sich um ein Zufallsexperiment mit Zurücklegen und das andere Mal ohne Zurücklegen. Im Artikel wird skizziert wie beide Ansätze vereinbar sind.

In welchem Zusammenhang stehen die entsprechenden Zahlenbereiche mit den folgenden Ausführungen?

Im Zähler der beschriebenen Brüche stehen immer natürliche Zahlen (in aufsteigender Reihenfolge). Im Nenner erscheinen (in aufsteigender Reihenfolge) die ungeraden Zahlen. Beide Mengen sind gleichmächtig. Es gibt also genauso viele natürliche wie ungerade Zahlen (vgl. dazu Artikel 6 Hilbert und das unendliche Hotel – Wie schwierig ist eigentlich die Arbeit eines Hotelportiers?).

Versuche, die obigen Wahrscheinlichkeiten mit den angesprochenen Urnen-Modellen in Einklang zu bringen.

Die Wahrscheinlichkeiten lassen sich direkt übertragen. Das Urnenmodell simuliert das Zufallsexperiment zutreffend. Dabei ist die Anzahl der Stühle gleich der Anzahl aller Kugeln in der Urne. Die Anzahl der Farben ist gleich der Anzahl der Tische. Wenn es zwei Tische mit jeweils zwei Stühlen gibt. Gibt es z.B. zwei rote und zwei blaue Kugeln. Legt man die Kugel nach dem Ziehen zurück, ist die Anzahl der Farben entscheidend für die Wahrscheinlichkeit $\left(p = \frac{1}{2}\right)$*. Legt man die Kugel nicht zurück, gibt es unter den drei möglichen Kugeln nur eine günstige Kugel mit gleicher Farbe* $\left(p = \frac{1}{3}\right)$*.*

Knobelei

Bei der beschriebenen Aufgabe haben wir die Anzahl der Bänke und Stühle verändert und jeweils den allgemeinen Fall betrachtet. Was passiert, wenn man die Anzahl an Schülern erhöht?

Zunächst muss klar sein, dass es immer an jeder Bank mehr Stühle als Schüler geben muss. Andernfalls finden die übrigen Schüler keinen Platz. Wenn man nur die Bänke betrachtet (der Fall mit Zurücklegen), dann multiplizieren sich die Wahrscheinlichkeiten für jeden Schüler. Für 2 Bänke und 3 Schüler erhält man: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$*. Wenn p die Anzahl der Bänke ist und k die Anzahl der Schüler, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Schüler an der gleichen Bank sitzen* $\left(\frac{1}{p}\right)^{k-1}$*.*

Betrachtet man die Stühle (also den Fall ohne Zurücklegen), ergibt sich für 2 Bänke mit 3 Stühlen und 3 Schülern: $\frac{3-1}{2\cdot 3-1}\cdot\frac{3-2}{2\cdot 3-2}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}=0{,}1$. *Der Unterschied wird wieder deutlich. Wenn n die Anzahl der Stühle, k die Anzahl der Schüler und k < n ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Schüler an einem Tisch sitzen* $\frac{(n-1)!\cdot(2n-k)!}{(2n-1)!\cdot(n-k)!}$. *Wie schon im Artikel beschrieben, repräsentiert die Ziffer 2 die Anzahl der Bänke. Daher gilt, ist p die Anzahl der Bänke, n die Anzahl der Stühle, k die Anzahl der Schüler und k < n ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Schüler an einem Tisch zen* $\frac{(n-1)!\cdot(p\cdot n-k)!}{(p\cdot n-1)!\cdot(n-k)!}$. *Betrachten wir ebenfalls den Grenzübergang:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\cdot(p\cdot n-k)!}{(p\cdot n-1)!\cdot(n-k)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)}{(p\cdot n-1)}\cdot\frac{(n-2)}{(p\cdot n-2)}\cdot\frac{(n-3)}{(p\cdot n-3)}\cdot\ldots\cdot\frac{\big(n-(k-1)\big)}{\big(p\cdot n-(k-1)\big)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(p-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{n\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\cdot\left(p-\frac{2}{n}\right)}\cdot\frac{n\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)}{n\cdot\left(p-\frac{3}{n}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{n\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{n\cdot\left(p-\frac{k-1}{n}\right)}$$

$$=\frac{(1-0)}{(p-0)}\cdot\frac{(1-0)}{(p-0)}\cdot\frac{(1-0)}{(p-0)}\cdot\ldots\cdot\frac{(1-0)}{(p-0)}=\left(\frac{1}{p}\right)^{k-1}$$

Der Grenzwert stimmt mit der Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Schüler an der gleichen Bank sitzen ohne Beachtung der Stühle überein (vgl. oberen Abschnitt). Der Zusammenhang zwischen dem Ziehen mit und ohne Zurücklegen wird wieder deutlich, so wie er im Artikel geschildert ist.

Der Satz von Bayes

Knobelei

Tom würfelt mit zwei Würfeln. Anna sieht unter den Würfelbecher und teilt Tom mit, was sie sieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tom einen Fünferpasch gewürfelt hat, wenn Anna eine 5 ansagt, wobei sie nach folgender Regel verfährt: Von den 2 Ziffern auf den Würfeln sagt sie …

a) immer die größte an,

b) immer die kleinste an,

c) den Durchschnitt beider an?

Das einzige günstige Ergebnis ist, wenn beide Würfel die Augenzahl 5 zeigen (5; 5).

a) *Mögliche Ergebnisse sind in diesem Fall (1; 5), (2; 5), (3; 5), (4; 5), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4) und (5; 5), daher beträgt die Wahrscheinlichkeit* $P(A)=\frac{1}{9}$.
b) *Mögliche Ergebnisse sind (5; 5), (5; 6) und (6; 5), damit ergibt eine Wahrscheinlichkeit für das beschriebene Ereignis von* $P(B)=\frac{1}{3}$.
c) *Mögliche Ergebnisse sind (4; 6), (5; 5) und (6; 4), die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt* $P(C)=\frac{1}{3}$.

17 Nicht euklidische Geometrien: Wie viele Parallelen gibt es eigentlich zu einer Geraden?

Kannst du die Gültigkeit des ersten Postulats von Euklid zeigen? Nämlich dass durch zwei beliebige (voneinander verschiedene) Punkte genau eine Gerade verläuft?

Die Punkte der offenen Kreisscheibe sind auch Punkte im euklidischen Sinne. Somit verläuft durch zwei voneinander verschiedene Punkte jeweils genau eine (euklidische) Gerade, weil dies in der euklidischen Geometrie gilt. Die Gerade, da sie durch zwei innere Punkte des Kreises verläuft, ist eine Sekante des Kreises, wiederum in der euklidischen Geometrie. (Eine Passante hat keinen Punkt mit dem Kreis gemeinsam, eine Tangente nur einen, der ist aber ein Randpunkt, kein innerer Punkt!) Diese Sekante schneidet in zwei Punkten den Kreisbogen, die offene Strecke zwischen diesen zwei (euklidischen) Punkten ist eine Gerade in der hyperbolischen Geometrie.

Zeige die Gültigkeit des ersten Postulats in dieser Geometrie, also dass durch zwei beliebige (voneinander verschiedene) Punkte genau eine Gerade verläuft! In dieser Geometrie gibt es keine parallele Gerade zu einer vorgegebenen Geraden durch einen außerhalb ihr liegenden Punkt. **Kannst du begründen, warum?**

Zwei (voneinander verschiedene) Punkte auf der Kugeloberfläche und der Mittelpunkt der Kugel sind fünf voneinander verschiedene Punkte im euklidischen Raum: Zwei mal zwei Punkte diametral auf der Kugeloberfläche und der Kugelmittelpunkt. Die zwei diametralen Punktepaare bestimmen zwei (voneinander verschiedene) Durchmesser und sie schneiden sich im Kugelmittelpunkt. Somit liegen sie auf zwei sich im Kugelmittelpunkt schneidenden Geraden im euklidischen Raum, laut 11.2 der Elemente des Euklid. Sie bestimmen eindeutig eine (einzige) Ebene und laut 11.1 liegen alle Punkte der beiden (euklidischen) Geraden in dieser Ebene. Diese Ebene schneidet die Kugel (geht ja durch den Kugelmittelpunkt, der ein innerer Punkt der Kugel ist, die Ebene kann somit weder eine Tangentialebene noch eine an ihr vorbeigehende Ebene sein). Der Schnitt einer Ebene mit einer Kugel ist ein Kreis. Da dieser Kreis durch den Kugelmittelpunkt geht, ist er ein Großkreis, also eine Gerade der elliptischen Geometrie. Da die Ebene eindeutig bestimmt ist, ist dieser Großkreis eindeutig bestimmt, es existiert also genau eine elliptische Gerade zu zwei elliptischen Punkten.

Dass es keine Parallele geben kann, ist offensichtlich: Eine Gerade ist ja ein Großkreis auf der Kugeloberfläche. Wählt man nun einen beliebigen weiteren Punkt außerhalb dieses Großkreises auf der Oberfläche, bestimmen alle Geraden (d.h. Großkreise) durch diesen Punkt eine Ebene im euklidischen Sinne. Diese Ebene geht durch den Kugelmittelpunkt und schneidet somit die (euklidische) Ebene des ursprünglichen Großkreises. Der Schnitt zweier Ebenen ist eine euklidische Gerade, die durch den gemeinsamen Punkt, d.h. durch den Kugelmittelpunkt geht. Der Schnitt einer Geraden mit einer Kugel ist eine Strecke, da diese Strecke nun durch den Kugelmittelpunkt verläuft, ist sie ein Durchmesser der Kugel. Die zwei Endpunkte dieses Durchmessers sind gemeinsame Punkte der beiden (euklidischen Ebenen), sie bilden aber einen elliptischen Punkt auf der Kugeloberfläche. Eine elliptische Gerade und eine weitere elliptische Gerade, die durch einen der ersten Geraden nicht anliegenden Punkt geht, schneiden sich stets in einem elliptischen Punkt.

18 Das Nim-Spiel – Gewinnen gegen den Wirtschaftsminister

Du kannst dir auch anhand der Nim-Summen überlegen, dass Situationen mit nur noch zwei Haufen gleicher Größe Verluststellungen sind und dass die Spiegel-Strategie tatsächlich zum Gewinn führt.

Sind noch zwei gleichgroße Haufen vorhanden, so ergibt die Nim-Summe aus beiden stets 0, da in der Addition im Dualsystem ohne Beachtung der Überträge nur die Fälle 0 + 0 = 0 und 1 + 1 = 0 auftreten können. Gemäß Boutons Feststellung handelt es sich daher um Verluststellungen, wenn der Gegner perfekt spielt. Die Spiegel-Strategie ist dabei die perfekte Strategie des Gegners. Nach ihrer Anwendung liegen abermals zwei gleichgroße Haufen vor, die in der Nim-Summe wiederholt 0 ergeben. Es *gibt stets nur diesen einen Gewinnzug. Eine Situation mit drei möglichen Gewinnzügen ist ausgeschlossen, da nur noch zwei Haufen vorhanden sind.*

Knobelei

Wenn man sich aktuell in einer Verluststellung befindet, wie kann man den drohenden Verlust möglichst lang hinauszögern? Das heißt, welchen Haufen sollte man wie reduzieren, sodass bei optimaler Spielweise des Gegners noch möglichst viele Züge gemacht werden?

Mehr Informationen zu Fragestellungen dieser Art findet man unter der Überschrift „Die Rache des Verlierers“ im Buch „Zahlentheorie und Zahlenspiele“.

Man kann eine Partie entstehen lassen, in der bei jedem Zug immer nur genau ein Korn von einem Haufen verschwindet. Für zwei Haufen ist das Vorgehen recht leicht zu durchschauen. Der Verlierer nimmt jeweils nur ein Holz von irgendeinem der beiden gleich großen Haufen. Will der Gegner gewinnen, so muss er stets vom anderen Haufen auch genau ein Holz entfernen. Bei drei Haufen sollte der Verlierer wie folgt agieren. Er schaut nach der hintersten Position, wo mindestens eine der Binärzahlen eine 1 hat. Weil es sich um eine Verlustposition handelt, haben genau zwei Haufen an dieser Stelle eine 1. Von solch einem Haufen nimmt der Verlierer ein Holz weg. Um zu gewinnen, muss der Gegner von dem anderen Haufen, der auch an der hintersten Nichtnullposition eine 1 hat, ein Holz wegnehmen.

http://www.springer.com/978-3-658-13894-3

Überraschende Mathematische Kurzgeschichten
Ausgewählte Artikel des jungen Ablegers der Zeitschrift
„Die Wurzel"
Müller, M. (Hrsg.)
2017, VIII, 156 S. 55 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-13894-3