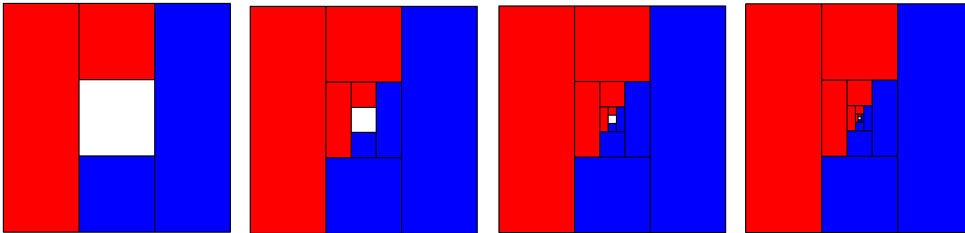


**Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**zu A 8.1:**



**zu A 8.2:**

Wenn die Dreiteilung des weißen Rechtecks durch vertikale Linien erfolgt, „wachsen“ die rot und blau gefärbten Bereiche kontinuierlich zusammen.

**zu A 8.3:**

*Abb. links:* Das Ausgangsquadrat wurde durch eine Diagonale halbiert und eine Hälfte grün gefärbt, dann das nicht gefärbte gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck durch die Symmetrieachse und eine Hälfte gelb gefärbt. In den folgenden Schritten wurde jeweils das nicht gefärbte Dreieck halbiert und jeweils eines der Dreiecke abwechselnd gelb und grün gefärbt. Insgesamt ist dann

$$A_{\text{grün}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \quad \text{und} \quad A_{\text{gelb}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{grün}}$$

Hieraus folgt, dass zwei Drittel der Quadratfläche grün gefärbt ist, ein Drittel gelb.

*Abb. Mitte:* Im ersten Schritt wird das Ausgangsquadrat durch die beiden Diagonalen in vier gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke unterteilt, von denen zwei Dreiecke grün gefärbt werden. Die beiden anderen Dreiecke werden jeweils durch die Symmetrieachsen halbiert, wovon eine Hälfte gelb gefärbt wird. usw. Hieraus folgt wie bei der 1. Abbildung, dass zwei Drittel der Quadratfläche grün gefärbt ist, ein Drittel gelb.

*Abb. rechts:* Wie bei der Abb. in der Mitte wird zunächst das Ausgangsquadrat durch die beiden Diagonalen in vier gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke unterteilt. Die Färbung erfolgt aber in beiden Hälften jeweils entgegengesetzt. Daher ist die Quadratfläche jeweils zur Hälfte grün bzw. gelb gefärbt.

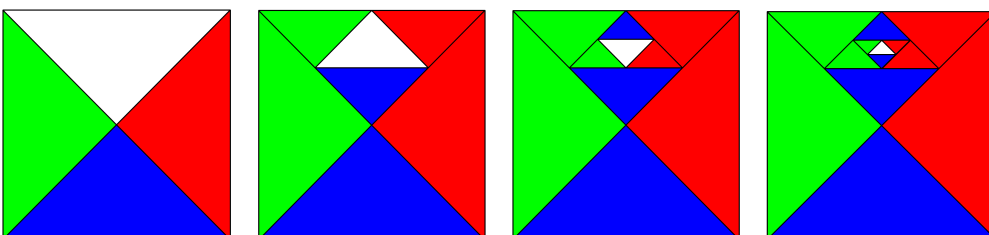
**zu A 8.4:**

Wird die Seitenlänge des Dreiecks mit  $a$  bezeichnet, dann gilt für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} .$$

$$A = 1 \text{ bedeutet daher: } a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \text{ also } a = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,52$$

**zu A 8.5:**



**zu A 8.6:**

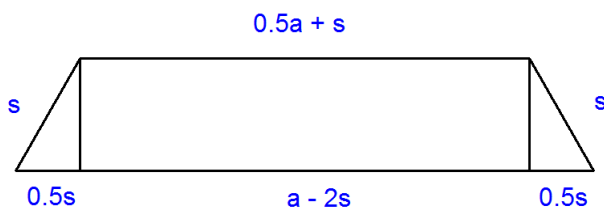
Da das äußere Dreieck 4-mal so groß sein soll wie das innere Dreieck, ist die Seitenlänge des inneren Dreiecks  $\frac{1}{\sqrt{4}}$ -mal so groß, also  $\frac{1}{2}$ -mal so groß wie die des äußeren Dreiecks. Man zeichnet also die drei äußeren symmetrischen Trapeze mit den parallelen Seiten der Länge  $a$  und  $\frac{1}{2} \cdot a$  und einem Basiswinkel von  $30^\circ$ . Die schrägen Schenkel der äußeren Trapeze sind halb so lang wie der Abstand eines Eckpunkts vom Mittelpunkt des Dreiecks (dieser ist  $\frac{2}{3}$ -mal so lang wie die Höhe im gleichseitigen Dreieck), d. h. bei den äußeren Trapezen ist dies  $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ , bei den nächsten Trapezen entsprechend jeweils halb so lang wie bei den nächst-äußeren Trapezen.

**zu A 8.7:**

Ein gleichseitiges Dreieck wird so in vier gleich große Teilflächen zerlegt, dass außen drei kongruente Trapeze entstehen und innen wieder ein gleichseitiges Dreieck. Da das äußere Dreieck 4-mal so groß sein soll wie das innere Dreieck, ist die Seitenlänge des inneren Dreiecks  $\frac{1}{\sqrt{4}}$ -mal so groß, also  $\frac{1}{2}$ -mal so groß wie die des äußeren Dreiecks.

Ist  $a$  die Seitenlänge des Ausgangsdreiecks, dann haben die Trapeze im ersten Schritt Grundseiten mit der Länge  $a - s$  (unten) und  $\frac{1}{2} \cdot a + s$  (oben) sowie zwei Schenkel mit der Länge  $s$ . Da die Schenkel mit der unteren Grundseite einen Winkel von  $60^\circ$  bilden, gilt:

$\frac{1}{2} \cdot a + s = a - 2s$ , also  $s = 0,2 \cdot a$ . Die untere Grundseite des Trapezes hat also die Länge  $0,8 \cdot a$ , die obere  $0,7 \cdot a$ , die Schenkel  $0,2 \cdot a$ .



**zu A 8.8:**

Im ersten Bild ist ein Quadrat zu sehen, das in fünf gleich große Flächen ausgeteilt ist. Wenn die Seitenlänge des Quadrats  $a_1 = 1$  LE beträgt, ist der Flächeninhalt des Quadrats 1 FE.

Das in der Mitte der Figur liegende Quadrat hat dann eine Seitenlänge von  $a_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,4472$ .

Für die vier Rechtecke mit den Seitenlängen  $b_2$  und  $c_2$  gilt:  $b_2 + c_2 = 1$  und  $b_2 \cdot c_2 = 1/5$ , also

$$b_2 = \frac{1}{5c_2} \quad \text{und damit} \quad b_2 + c_2 = \frac{1}{5c_2} + c_2 = \frac{1 + 5c_2^2}{5c_2} = 1$$

Dies führt auf die quadratische Gleichung:  $5c_2^2 - 5c_2 + 1 = 0$ .

Diese hat zwei positive Lösungen, nämlich  $c_2 \approx 0,2764$  bzw.  $c_2 \approx 0,7236$ .

Wegen  $b_2 + c_2 = 1$  gilt dann entsprechend:  $b_2 \approx 0,7236$  bzw.  $b_2 \approx 0,2764$

Für die im Quadrat mit der Seitenlänge  $a_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,4472$  eingeschlossenen vier Rechtecke und das Quadrat

in der Mitte gilt dann:  $a_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$  und für  $b_3$  bzw.  $c_3$  entsprechend:

$$c_3 \approx 0,2764 \cdot 0,4472 \approx 0,1236 \quad \text{und} \quad b_3 \approx 0,7236 \cdot 0,4472 \approx 0,3236$$

Die Seitenlängen der nächsten Figur ergeben sich dann jeweils durch Multiplikation mit dem Faktor 0,4472. usw.

**zu A 8.9:**

Die untere Grundseite des Ausgangsquadrats wird im Verhältnis 2 : 1 : 2 unterteilt. Das linke und das rechte Rechteck werden jeweils in der Mitte halbiert und die so entstandenen vier gleichgroßen Rechtecke in vier Farben gefärbt.

Das nicht gefärbte mittlere Rechteck wird in der Höhe im Verhältnis 2 : 1 : 2 unterteilt. Das obere und das untere Rechteck werden jeweils in der Mitte längs geteilt und die so entstandenen vier gleichgroßen Rechtecke in vier Farben (wie ihre Nachbarrechtecke) gefärbt.

Die beiden Schritte werden für das übrig gebliebene, nicht gefärbte Quadrat in der Mitte wiederholt.

**zu A 8.10:**

Da das äußere Quadrat 5-mal so groß sein soll wie das innere Quadrat, ist die Seitenlänge des inneren Quadrats  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -mal so groß wie die des äußeren Quadrats. Die Trapeze haben also Grundseiten der Längen  $a$  und  $(ca.) 0,447 \cdot a$ . Die Höhe der Trapeze muss die Bedingung  $h + 0,447 \cdot a + h = a$  erfüllen, also  $h \approx 0,276 \cdot a$ . Hieraus folgt dass die Schenkel, die mit den beiden Grundseiten einen Winkel von  $45^\circ$  bzw.  $135^\circ$  bilden, eine Länge von  $s = \sqrt{2} \cdot h \approx 0,391 \cdot a$  haben.

**zu A 8.11:**

Da das äußere Quadrat (mit Seitenlänge  $a$ ) 5-mal so groß sein soll wie das innere Quadrat, ist die Seitenlänge des inneren Quadrats  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -mal so groß wie die des äußeren Quadrats, also  $ca. 0,447 \cdot a$ .

Dieses innen liegende Quadrat hat Diagonalen, die  $\sqrt{2}$ -mal so groß sind wie die Seite dieses Quadrats; sie haben also eine Länge von  $ca. 0,632 \cdot a$ .

Eine Unterteilung des Ausgangsquadrats kann daher wie folgt vorgenommen werden: Das Quadrat wird zunächst durch die beiden Mittellinien in vier gleich große Quadrate unterteilt. Von der Mitte der Figur aus trägt man auf den Mittellinien jeweils eine halbe Diagonalenlänge, also eine Strecke von  $0,316 \cdot a$  ab.

Die in den Ecken des Ausgangsquadrats liegenden vier Fünfecke haben also zwei zueinander senkrecht stehende Seiten der Länge  $0,5 \cdot a$ , zwei dazu senkrecht stehende Seiten der Länge  $0,5 \cdot a - 0,316 \cdot a = 0,184 \cdot a$  sowie die Grundseite des inneren Quadrats mit einer Länge von  $0,447 \cdot a$ .

**Zusatz: Berechnung der Seitenlängen des regelmäßigen Fünfecks (2. Möglichkeit)**

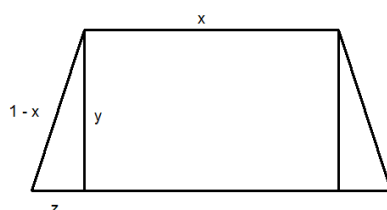
Da das äußere Quadrat 5-mal so groß sein soll wie das innere Quadrat, ist die Seitenlänge des inneren Quadrats  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -mal so groß wie die des äußeren Quadrats.

Der Flächeninhalt eines regulären 5-Ecks mit Seitenlänge  $a_1 = 1$  LE. berechnet sich wie folgt:

$$A_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_1 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{a_1}{2 \cdot \tan(36^\circ)} = \frac{5a_1^2}{4 \cdot \tan(36^\circ)}. \text{ Wegen } a_1 = 1 \text{ bedeutet dies: } A_1 \approx 1,7205 \text{ FE.}$$

Das innen liegende Fünfeck hat dann einen Flächeninhalt von  $A_2 = \frac{5a_1^2}{24 \cdot \tan(36^\circ)}$

Dies ist auch der Flächeninhalt der fünf symmetrischen Trapeze. Diese Trapeze bestehen aus einem Rechteck mit den Seitenlängen  $x$  (= obere Seite des Trapezes) und  $y$  (=Höhe des Trapezes) und zwei rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten  $y$  und  $z$ ; die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks bildet zusammen mit der oberen Trapezseite eine Grundseite des Ausgangs-Fünfecks.



Der Flächeninhalt eines Trapezes ergibt sich daher wie folgt:

$$A_2 = x \cdot y + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot y = (x + z) \cdot y$$

Da  $y = (1 - x) \cdot \sin(72^\circ)$  und  $z = (1 - x) \cdot \cos(72^\circ)$  gilt weiter:

$$A_2 = [x + (1 - x) \cdot \cos(72^\circ)] \cdot (1 - x) \cdot \sin(72^\circ) = [x + \cos(72^\circ) - x \cdot \cos(72^\circ)] \cdot (1 - x) \cdot \sin(72^\circ)$$

Mit Rechnerhilfe muss dann die Gleichung

$$[x + \cos(72^\circ) - x \cdot \cos(72^\circ)] \cdot (1 - x) \cdot \sin(72^\circ) = \frac{5}{24 \cdot \tan(36^\circ)}$$

gelöst werden. Für  $x$  ergibt sich:  $x \approx 0,5718$  und hieraus  $y \approx 0,4072$  und  $z \approx 0,1323$ .

Die Seitenlängen der nächsten Figur ergeben sich dann jeweils durch Multiplikation mit dem Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,4082 \cdot$$

### zu A 8.12:

*Obere Abbildungen:* Da der Radius halbiert wird, nimmt die (jeweils) übrig bleibende gelb gefärbte Fläche ein Viertel der Gesamtfläche des Achtecks ein, d. h., für die hellblau gefärbte Fläche des 1. Schritts gilt:

$A_1 = \frac{3}{4} \cdot A_{\text{Achteck}}$  und entsprechend weiter für das grün gefärbte Achteck, das drei Viertel der gelb gefärbten

Restfläche einnimmt:  $A_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{3}{16} \cdot A_{\text{Achteck}}$ . Vor dem 3. Schritt ist ein Viertel von einem

Viertel der Achteckfläche noch gelb gefärbt. Im 3. Schritt wird dann drei Viertel davon dunkelgrün gefärbt:

$$A_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{3}{64} \cdot A_{\text{Achteck}}$$

Nacheinander wird dann  $\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots = \frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ , also nach

unendlich vielen Schritten die gesamte Fläche gefärbt.

*Untere Abbildungen:* Da der Radius gedrittelt wird, nimmt die (jeweils) übrig bleibende gelb gefärbte Fläche ein Drittel der Gesamtfläche des Achtecks ein, d. h., für die hellblau gefärbte Fläche des 1. Schritts gilt:

$A_1 = \frac{2}{3} \cdot A_{\text{Achteck}}$  und entsprechend weiter für das violett gefärbte Achteck, das zwei Drittel der gelb

gefärbten Restfläche einnimmt:  $A_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{2}{9} \cdot A_{\text{Achteck}}$ .

Vor dem 3. Schritt ist ein Drittel von einem Drittel der Achteckfläche noch gelb gefärbt. Im 3. Schritt wird dann zwei Drittel davon pink gefärbt:

$$A_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{2}{27} \cdot A_{\text{Achteck}}$$

Nacheinander wird dann  $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ , also nach

unendlich vielen Schritten die gesamte Fläche gefärbt.

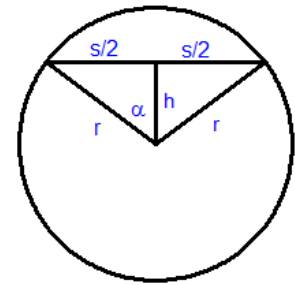
**zu A 8.13:**

• **Dreiteilung des Kreises**

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts berechnet sich aus der Differenz des Flächeninhalts des Kreissektors und des unter der Sehne liegenden gleichschenkligen Dreiecks. Wegen  $\sin(\alpha) = s/2r$  und  $\cos(\alpha) = h/r$  gilt:

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - r \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot \cos(\alpha) = r^2 \cdot \left[ \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right]$$



Da die drei gefärbten Teile des Kreises jeweils den Flächeninhalt  $1/3 \cdot \pi \cdot r^2$  haben, ist die Gleichung

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\pi}{3} \text{ zu lösen.}$$

Diese Gleichung hat die Lösung  $\alpha \approx 74,64^\circ$ . Hieraus folgt:  $s \approx 1,929 \cdot r$  und  $h \approx 0,265 \cdot r$ . Wegen der Symmetrie der Figur gelten diese Maße auch für den unteren Kreisabschnitt.

Die drei Schichten haben daher die Höhen  $0,735 \cdot r$  und  $0,530 \cdot r$  und  $0,735 \cdot r$ . (Kontrollrechnung: Die Summe beträgt  $2r$ .)

• **Vierteilung des Kreises**

Der Kreis wird durch einen Durchmesser in zwei Hälften unterteilt. Hier muss analog zu oben die Gleichung

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\pi}{4} \text{ gelöst werden. Hier ergibt sich } \alpha \approx 66,17^\circ \text{ und hieraus } s \approx 1,830 \cdot r \text{ und } h \approx 0,404 \cdot r.$$

Die vier Schichten haben daher die Höhen  $0,596 \cdot r$  und  $0,404 \cdot r$  und  $0,404 \cdot r$  und  $0,596 \cdot r$ .

• **Fünfteilung des Kreises**

Analog zu oben sind die Gleichungen

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\pi}{5} \text{ bzw. } \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{2\pi}{5}$$

zu lösen, um die Maße der obersten Schicht sowie die der beiden oberen Schichten zusammen zu ermitteln:

Aus  $\alpha \approx 60,54^\circ$  folgt:  $s \approx 1,74 \cdot r$  und  $h \approx 0,492 \cdot r$ . Und aus  $\alpha \approx 80,92^\circ$  folgt:  $s \approx 1,97 \cdot r$  und  $h \approx 0,158 \cdot r$ .

Daher haben die fünf Schichten des Kreises die Höhen:

$0,508 \cdot r$ ,  $0,334 \cdot r$ ,  $0,316 \cdot r$ ,  $0,334 \cdot r$  und  $0,508 \cdot r$ .

• **Unterteilung des regelmäßigen Fünfecks**

Ein regelmäßiges 5-Eck mit Seitenlänge  $a$  setzt sich aus fünf symmetrischen Dreiecken zusammen, die den Mittelpunkt des 5-Ecks gemeinsam haben. Die Höhen  $H$  dieser Dreiecke berechnen sich aus

$$\tan(36^\circ) = \frac{a}{2H} \Leftrightarrow H = \frac{a}{2 \cdot \tan(36^\circ)}, \text{ also berechnet sich der Flächeninhalt}$$

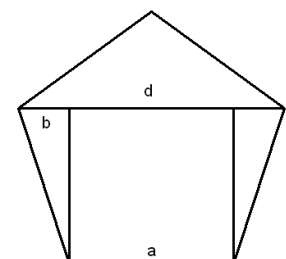
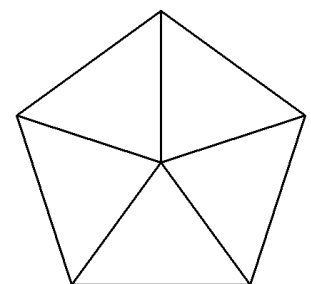
des regelmäßigen 5-Ecks wie folgt:

$$A_{5\text{-Eck}} = 5 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \cdot \tan(36^\circ)} = \frac{5}{4 \cdot \tan(36^\circ)} \cdot a^2 \approx 1,7205 \cdot a^2$$

Der untere Teil des 5-Ecks ist ein Trapez, das gebildet wird aus drei Seiten des 5-Ecks und einer Diagonale  $d$ .

Diese Diagonale  $d$  berechnet sich aus der folgenden Figur:

$$d = a + 2 \cdot b = a + 2 \cdot a \cdot \sin(18^\circ) = a \cdot (1 + 2 \cdot \sin(18^\circ)) \approx 1,618 \cdot a$$



– man könnte sie auch mithilfe von  $d = 2a \cdot \sin(54^\circ)$  berechnen.

Die Höhe des Trapezes ist:  $h = a \cdot \cos(18^\circ) \approx 0,951a$ ;  
daher berechnet sich der Flächeninhalt des Trapezes wie folgt:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + a \cdot (1 + 2 \cdot \sin(18^\circ))) \cdot a \cdot \cos(18^\circ)$$

$$= a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot (1 + \sin(18^\circ)) \approx 1,2449 \cdot a^2$$

Das Trapez hat ungefähr 72,4 % der Gesamtfläche des regelmäßigen 5-Ecks; daher muss beispielsweise die Halbierungslinie des 5-Ecks unterhalb der Diagonalen liegen.

- **Halbierung des Fünfecks** (wird später benötigt)

Zeichnet man eine Parallele zur Diagonalen, dann entsteht ein Trapez, dessen Flächeninhalt sich wie folgt berechnet:

$$A_{\text{Teil}} = a \cdot y + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = a^2 \cdot k \cdot \cos(18^\circ) + a^2 \cdot k^2 \cdot \sin(18^\circ) \cdot \cos(18^\circ)$$

$$= a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ))$$

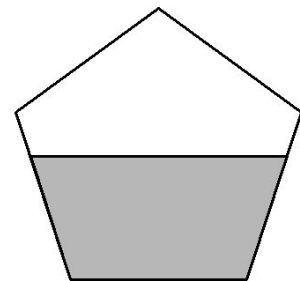
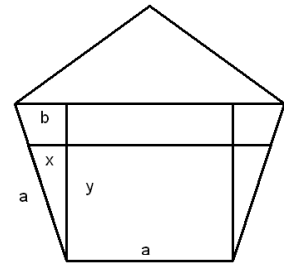
Dabei berechnen sich die auftretenden Strecken gemäß Strahlensatz wie folgt:

$$k = y : h = x : b$$

Gesucht ist dann derjenige Wert von  $k$  derart, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

Mithilfe beispielsweise eines Rechners findet man die Lösung:  $k \approx 0,737$  und hiermit die Höhe des neuen Trapezes  $y = k \cdot a \cdot \cos(18^\circ) \approx 0,701 \cdot a$



- **Dreiteilung des Fünfecks**

Um die untere Teilungslinie zu bestimmen, muss man entsprechend die Gleichung

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

lösen; als Lösung erhält man  $k \approx 0,520$  und damit  $y \approx 0,495 \cdot a$

Ebenso liegt noch die obere Teilungslinie unterhalb der Diagonalen

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

Als Lösung erhält man diesmal  $k \approx 0,936$  und damit  $y \approx 0,890 \cdot a$

- **Vierteilung des Fünfecks**

Um die untere Teilungslinie zu bestimmen, muss man entsprechend die Gleichung

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

lösen; als Lösung erhält man  $k \approx 0,402$  und damit  $y \approx 0,383 \cdot a$ .

Die zweite Teilungslinie von unten wurde als Halbierungslinie berechnet.

Die obere Teilungslinie liegt oberhalb zur Grundseite parallel liegenden Diagonale.

Das gleichschenklige Dreieck hat  $d$  als Grundseite und Schenkel der Seitenlänge  $a$ .

Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich aus den oben berechneten Flächeninhalten:

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{5\text{-Eck}} - A_{\text{Trapez}} = 1,7205 \cdot a^2 - 1,2449 \cdot a^2 = 0,4756 \cdot a^2$$

Da die Diagonale die Länge  $d \approx 1,618 \cdot a$  hat, ergibt sich aus dem Flächeninhalt eine Dreieckshöhe von  $2 \cdot 0,4756/1,618 \approx 0,588 \cdot a$ .

Da das obere Viertel des Fünfecks einen Flächeninhalt von  $1,7205 \cdot a^2/4 \approx 0,4301 \cdot a^2$  hat, ist also ein Anteil von  $0,4301/0,4756 \approx 0,9043$  der oberhalb der Diagonale liegenden Fläche gelb gefärbt. Da das gelb gefärbte Dreieck ähnlich ist zum Dreieck oberhalb der Diagonale erhält man für die Grundlinie des gelb gefärbten Dreiecks eine Länge von  $\sqrt{0,9043} \cdot 1,618 \cdot a \approx 1,539 \cdot a$  und für die Höhe eine Länge  $\sqrt{0,9043} \cdot 0,588 \cdot a \approx 0,559 \cdot a$ .

### Unterteilung des regelmäßigen Sechsecks

Ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge  $s$  setzt sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammen. Um das 6-Eck in drei gleich große Streifen zu unterteilen, muss ein Rechteck in der Mitte gezeichnet werden, dessen Breite  $b$  gerade zweimal die Höhe der Teildreiecke des 6-Ecks und dessen Flächeninhalt  $A$  gleich einem Drittel des Flächeninhalts des regelmäßigen 6-Ecks ist:

$$b = \frac{s}{\tan(30^\circ)} \quad \text{und} \quad A = \frac{A_6}{3} = \frac{s^2}{2 \cdot \tan(30^\circ)}.$$

Die Höhe  $x$  des mittleren Rechtecks ist daher gleich  $x = \frac{A}{b} = \frac{s^2}{2 \cdot \tan(30^\circ)} \cdot \frac{\tan(30^\circ)}{s} = \frac{s}{2}$

Um ein regelmäßiges 6-Eck in vier gleich große Streifen zu unterteilen, muss man ein Rechteck in der Mitte zeichnen, dessen Breite  $b$  gerade zweimal die Höhe der o. a. Teildreiecke des 6-Ecks und dessen Flächeninhalt  $A$  gleich einem Viertel des Flächeninhalts des regelmäßigen 6-Ecks ist:

$$b = \frac{s}{\tan(30^\circ)} \quad \text{und} \quad A = \frac{A_6}{4} = \frac{3 \cdot s^2}{8 \cdot \tan(30^\circ)}.$$

Die Höhe  $x$  des mittleren Rechtecks ist daher gleich

$$x = \frac{A}{b} = \frac{3 \cdot s^2}{8 \cdot \tan(30^\circ)} \cdot \frac{\tan(30^\circ)}{s} = \frac{3}{8} \cdot s$$

Entsprechend verfährt man einer größeren Anzahl von Streifen:

Bei 5 Streifen ergibt sich analog:

$$x = \frac{A}{b} = \frac{3 \cdot s^2}{10 \cdot \tan(30^\circ)} \cdot \frac{\tan(30^\circ)}{s} = \frac{3}{10} \cdot s \quad (\text{in das mittlere Feld passen also drei Streifen}).$$



<http://www.springer.com/978-3-662-59059-1>

Mathematik ist schön  
Anregungen zum Anschauen und Erforschen für  
Menschen zwischen 9 und 99 Jahren  
Strick, H.K.  
2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe.,  
Softcover  
ISBN: 978-3-662-59059-1