

## Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

### zu A 4.1:

- 3 mögliche Kombinationen auch für den Flächeninhalt  $14\pi$ :

$$1\pi + 13\pi = 3\pi + 11\pi = 5\pi + 9\pi = 14\pi$$

- 4 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt  $16\pi$  und  $18\pi$ :

$$1\pi + 15\pi = 3\pi + 13\pi = 5\pi + 11\pi = 7\pi + 9\pi = 16\pi$$

$$1\pi + 17\pi = 3\pi + 15\pi = 5\pi + 13\pi = 7\pi + 11\pi = 18\pi$$

- 5 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt  $20\pi$  und  $22\pi$ :

$$1\pi + 19\pi = 3\pi + 17\pi = 5\pi + 15\pi = 7\pi + 13\pi = 9\pi + 11\pi = 20\pi$$

$$1\pi + 21\pi = 3\pi + 19\pi = 5\pi + 17\pi = 7\pi + 15\pi = 9\pi + 13\pi = 22\pi$$

allgemein:

- $n$  mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt  $4n \cdot \pi$  und  $(4n + 2) \cdot \pi$ :

$$1\pi + (4n - 1) \cdot \pi, 3\pi + (4n - 3) \cdot \pi, 5\pi + (4n - 5) \cdot \pi, \dots, (2n - 1) \cdot \pi + (2n + 1) \cdot \pi$$

$$1\pi + (4n + 1) \cdot \pi, 3\pi + (4n - 1) \cdot \pi, 5\pi + (4n - 3) \cdot \pi, \dots, (2n - 1) \cdot \pi + (2n + 3) \cdot \pi$$

### zu A 4.2:

Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Kombinationen von *drei* ungeraden Summanden bis zur maximalen Summe 39: links stehen die Summen aus zwei Summanden, oben die hinzukommenden dritten Summanden.

Demnach gibt es

1 Möglichkeit für die Summe $9\pi$ aus drei Kreisringen (nämlich $1\pi + 3\pi + 5\pi$ ),	
1 Möglichkeit für die Summe $11\pi$	2 Möglichkeiten für die Summe $13\pi$
3 Möglichkeiten für die Summe $15\pi$	4 Möglichkeiten für die Summe $17\pi$
5 Möglichkeiten für die Summe $19\pi$	7 Möglichkeiten für die Summe $21\pi$
8 Möglichkeiten für die Summe $23\pi$	10 Möglichkeiten für die Summe $25\pi$
12 Möglichkeiten für die Summe $27\pi$	14 Möglichkeiten für die Summe $29\pi$
16 Möglichkeiten für die Summe $31\pi$	19 Möglichkeiten für die Summe $33\pi$
21 Möglichkeiten für die Summe $35\pi$	24 Möglichkeiten für die Summe $37\pi$
27 Möglichkeiten für die Summe $39\pi$	

aus drei ungeraden Summanden.

Die website <https://oeis.org/> kann dabei helfen, die nächsten Glieder der Folge zu finden.

	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
1 + 3	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
1 + 5	x	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	
1 + 7	x	x	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39		
1 + 9	x	x	x	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
1 + 11	x	x	x	x	25	27	29	31	33	35	37	39				
1 + 13	x	x	x	x	x	29	31	33	35	37	39					
1 + 15	x	x	x	x	x	x	33	35	37	39						
1 + 17	x	x	x	x	x	x	x	37	39							
3 + 5	x	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39		
3 + 7	x	x	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
3 + 9	x	x	x	23	25	27	29	31	33	35	37	39				
3 + 11	x	x	x	x	27	29	31	33	35	37	39					
3 + 13	x	x	x	x	x	31	33	35	37	39						
3 + 15	x	x	x	x	x	x	35	37	39							
3 + 17	x	x	x	x	x	x	x	39								
5 + 7	x	x	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39				
5 + 9	x	x	x	25	27	29	31	33	35	37	39					
5 + 11	x	x	x	x	29	31	33	35	37	39						
5 + 13	x	x	x	x	x	33	35	37	39							
5 + 15	x	x	x	x	x	x	37	39								
7 + 9	x	x	x	27	29	31	33	35	37	39						
7 + 11	x	x	x	x	31	33	35	37	39							
7 + 13	x	x	x	x	x	35	37	39								
7 + 15	x	x	x	x	x	x	39									
9 + 11	x	x	x	x	33	35	37	39								
9 + 13	x	x	x	x	x	37	39									
11 + 13	x	x	x	x	x	39										

Eine andere Methode, die Anzahl der Kombinationen zu finden, könnte mithilfe einer Tabellenkalkulation wie folgt durchgeführt werden:

Zunächst stellt man die Folge der natürlichen Zahlen als Dualzahlen dar; von diesen interessieren diejenigen mit der Quersumme 3. Man betrachtet dann alle Vektoren, dessen Komponenten aus 3 Einsen und ansonsten aus Nullen bestehen. Dann bildet man das Skalarprodukt mit dem Vektor (1, 3, 5, 7, 9, ...).

Die Ziffern der Dualzahlen notiert man in umgekehrter Reihenfolge.

Auf diese Weise erhält man im Prinzip alle Summen mit drei ungeraden Summanden.

Beispiele:

$$7_{10} = {}_2111: \quad (1,1,1) * (1, 3, 5) = 9$$

$$11_{10} = {}_21011: \quad (1,1,0,1) * (1, 3, 5, 7) = 11$$

$$13_{10} = {}_21101: \quad (1,0,1,1) * (1, 3, 5, 7) = 13$$

$$14_{10} = {}_21110: \quad (0,1,1,1) * (1, 3, 5, 7) = 15$$

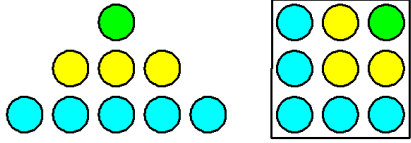
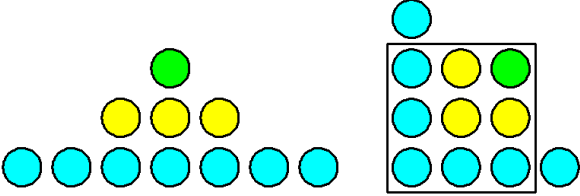
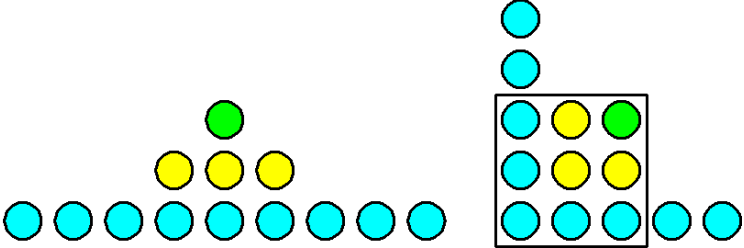
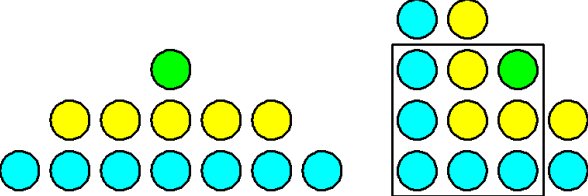
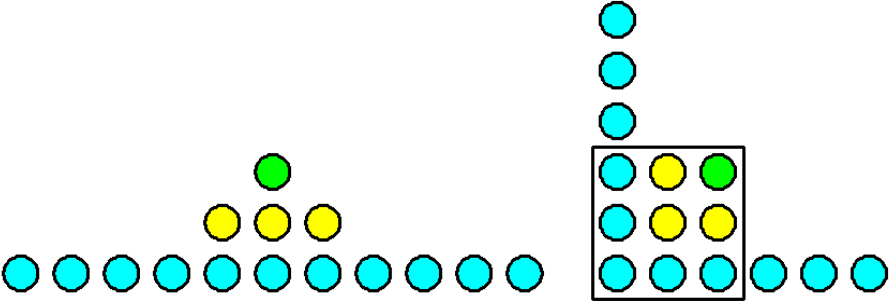
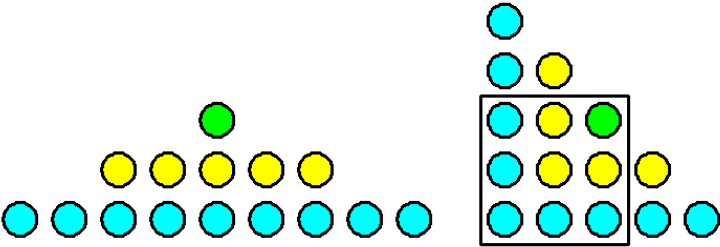
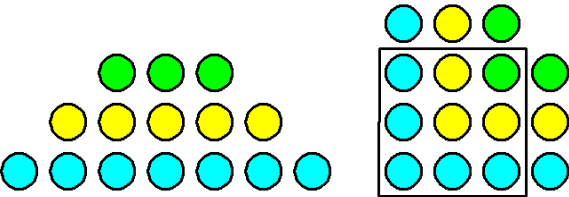
$$19_{10} = {}_210011: \quad (1,1,0,0,1) * (1, 3, 5, 7, 9) = 13$$

$$21_{10} = {}_210101: \quad (1,0,1,0,1) * (1, 3, 5, 7, 9) = 15$$

usw.

Anschließend zählt man, wie oft auf diese Weise die Summen 9, 11, 13, ... zustandekommen.

Erheblich anschaulicher und einfacher umzusetzen ist allerdings die folgende graphische Methode:

<p><math>1 + 3 + 5 = 9</math>  Überstand rechts:  0 Steine (<math>0 + 0 + 0</math>)</p>	
<p><math>1 + 3 + 7 = 11</math>  Überstand rechts:  1 Stein</p>	
<p><math>1 + 3 + 9 = 13</math>  Überstand rechts:  2 Steine (<math>0 + 0 + 2</math>)</p>	
<p><math>1 + 5 + 7 = 13</math>  Überstand rechts:  2 Steine (<math>0 + 1 + 1</math>)</p>	
<p><math>1 + 3 + 11 = 15</math>  Überstand rechts:  3 Steine (<math>0 + 0 + 3</math>)</p>	
<p><math>1 + 5 + 9 = 15</math>  Überstand rechts:  3 Steine (<math>0 + 1 + 2</math>)</p>	
<p><math>3 + 5 + 7 = 15</math>  Überstand rechts:  3 Steine (<math>1 + 1 + 1</math>)</p>	

Die ungerade Anzahl an Steinen wird nicht symmetrisch übereinander angeordnet (wie links dargestellt), sondern als Winkelhaken, wobei die Symmetrieachse in der Diagonale des Quadrats der Seitenlänge 3 liegt.

Die Gesamtzahl der Steine kann an den rechts überstehenden Steinen abgelesen werden:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtzahl} &= \text{Steine im Quadrat} + \text{Überstand oben} + \text{Überstand rechts} \\ &= 9 + 2 \cdot \text{Überstand rechts} \end{aligned}$$

Wenn also z. B. 5 Steine rechts überstehen, bedeutet dies, dass die Summe  $9 + 2 \cdot 5 = 19$  dargestellt ist.

Wenn man wissen will, auf wie viele Arten bestimmte Summen zustande kommen, muss man nur überlegen, auf wie viele Arten ein bestimmter Überstand möglich ist. Die drei Summanden sind der Größe nach aufsteigend geordnet, beginnend bei 0:

Summe	Überstand	Kombinationen
9	0	0 + 0 + 0
11	1	0 + 0 + 1
13	2	0 + 0 + 2, 0 + 1 + 1
15	3	0 + 0 + 3, 0 + 1 + 2, 1 + 1 + 1
17	4	0 + 0 + 4, 0 + 1 + 3, 0 + 2 + 2, 1 + 1 + 2
19	5	0 + 0 + 5, 0 + 1 + 4, 0 + 2 + 3, 1 + 1 + 3, 1 + 2 + 2
...	...	...

#### zu A 4.3:

Durch systematisches Probieren findet man:

1 Möglichkeit für die Summe  $16\pi$ :  $1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi$

1 Möglichkeit für die Summe  $18\pi$ :  $1\pi + 3\pi + 5\pi + 9\pi$

2 Möglichkeiten für die Summe  $20\pi$ :  $1\pi + 3\pi + 5\pi + 11\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 7\pi + 9\pi$

3 Möglichkeiten für die Summe  $22\pi$ :  $1\pi + 3\pi + 5\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 7\pi + 11\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi$

5 Möglichkeiten für die Summe  $24\pi$ :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 15\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 7\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 9\pi + 11\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi$ ,  $3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi$ ,

6 Möglichkeiten für die Summe  $26\pi$ :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 17\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 7\pi + 15\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 9\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 7\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi$ ,  $3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi$

9 Möglichkeiten für die Summe  $28\pi$ :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 19\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 7\pi + 17\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 9\pi + 15\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 11\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 7\pi + 15\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 9\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi$ ,  $3\pi + 5\pi + 7\pi + 13\pi$ ,  $3\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi$

11 Möglichkeiten für die Summe  $30\pi$ :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 21\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 7\pi + 19\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 9\pi + 17\pi$ ,  $1\pi + 3\pi + 11\pi + 15\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 7\pi + 17\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 9\pi + 15\pi$ ,  $1\pi + 5\pi + 11\pi + 13\pi$ ,  $1\pi + 7\pi + 9\pi + 13\pi$ ,  $3\pi + 5\pi + 7\pi + 15\pi$ ,  $3\pi + 5\pi + 9\pi + 13\pi$ ,  $3\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi$

usw.

Man kann auch so ansetzen:

Aus den 4 Zahlen  $1\pi$ ,  $3\pi$ ,  $5\pi$ ,  $7\pi$  kann man auf *eine* Art eine Summe mit 4 Summanden bilden:

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi = 16\pi.$$

Aus den 5 Zahlen  $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$  kann man auf  $\binom{5}{4} = 5$  Arten eine Summe mit 4 Summanden bilden,

also kommen noch 4 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu:

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 9\pi = 18\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 9\pi = 20\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi = 22\pi, 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi = 24\pi.$$

Aus den 6 Zahlen  $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi$  kann man auf  $\binom{6}{4} = 15$  Arten eine Summe mit 4 Summanden

bilden, also kommen noch 10 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu (nämlich alle Summen, in denen  $11\pi$  als Summand vorkommt), das sind also alle Möglichkeiten mit drei Summanden, für welche die

Zahlen  $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$  infrage kommen, das sind  $\binom{5}{3} = 10$  :

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 11\pi = 20\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 11\pi = 22\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 11\pi = 1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 24\pi, \\ 1\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 26\pi, 1\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 28\pi, \\ 3\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 30\pi, 5\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 32\pi.$$

Aus den 7 Zahlen  $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi, 13\pi$  kann man auf  $\binom{7}{4} = 35$  Arten eine Summe mit 4

Summanden bilden, also kommen noch 10 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu (nämlich alle Summen, in denen  $11\pi$  als Summand vorkommt), das sind also alle Möglichkeiten mit drei Summanden, für

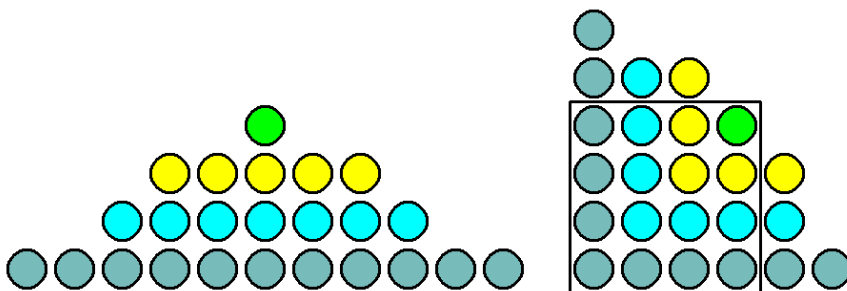
welche die Zahlen  $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$  infrage kommen, das sind  $\binom{5}{3} = 10$  :

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 11\pi = 20\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 11\pi = 22\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 11\pi = 1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 24\pi, \\ 1\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 26\pi, 1\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 28\pi, \\ 3\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 30\pi, 5\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 32\pi.$$

usw.

Eine andere Möglichkeit ist, die Anzahl der Möglichkeiten mithilfe von Dualzahlen mit Quersumme 4 zu bestimmen (vgl. A 4.2).

Oder man wählt die oben beschriebene graphische Methode, bei der man den Überstand zu einem Quadrat mit 16 Steinen untersuchen muss ... (wie in der Abbildung, dargestellt ist  $1 + 5 + 7 + 11$ ).



#### zu A 4.4:

Wenn beide Flächen gleich groß sind, dann ist die innen liegende Kreisfläche halb so groß wie die gesamte Kreisfläche. Für die Radien der beiden Kreislinien gilt dann, dass  $r_{\text{außen}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$ , denn für die Flächen gilt: grün + hellblau =  $\pi \cdot r_{\text{außen}}^2 = 2 \cdot (\pi \cdot r_{\text{innen}}^2) = 2 \cdot \text{hellblau}$ . Da  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist, also nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen dargestellt werden kann, gibt es keine geeigneten Kreisringe mit der Breite 1 LE.

Entsprechendes gilt für die zweite Figur, bei der die Gleichung  $r_{\text{außen}} = \sqrt{3} \cdot r_{\text{innen}}$  erfüllt sein müsste.

Außerdem müsste gelten:  $r_{\text{Mitte}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$

Bei der dritten Figur gilt zwar, dass der Radius des äußeren Kreises doppelt so groß ist wie der des blau gefärbten Kreises innen (die rot gefärbte Kreisfläche ist halb so groß wie die gesamte Kreisfläche), aber es

müsste außerdem gelten:  $r_{\text{zweiter Kreis von innen}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$  und außerdem  $r_{\text{dritter Kreis von innen}} = \sqrt{3} \cdot r_{\text{innen}}$

**zu A 4.5:**

In den abgebildeten Figuren sind die inneren 5 Kreisringe hellblau gefärbt; sie haben zusammen einen Flächeninhalt von  $5^2 = 25$  FE. Insgesamt umfasst die Figur 7 Kreisringe mit dem Flächeninhalt  $7^2 = 49$  FE, d. h., die grünen Kreisringe haben einen Flächeninhalt von  $7^2 - 5^2 = 24$  FE.

Es gilt also  $\frac{7^2}{5^2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \approx 2$ . Der Bruch  $\frac{7}{5}$  ist also ein Näherungswert für  $\sqrt{2}$ . Aus der

Kettenbruchentwicklung von  $\sqrt{2}$  (vgl. Kap. 3) ergibt sich, dass man aus dem Bruch  $\frac{a}{b}$  jeweils bessere

Näherungen mithilfe von  $\frac{a+2b}{a+b}$  erhält, also aus  $\frac{7}{5}$  entsprechend  $\frac{17}{12}$  und weiter  $\frac{41}{29}$ .

**zu A 4.6:**

Aus der Kettenbruchentwicklung von  $\sqrt{3}$  ergeben sich als erste Näherungsbrüche:  $\frac{5}{3}$ ,  $\frac{19}{11}$ ,  $\frac{71}{41}$ , d. h., die Kreisflächen stehen im Verhältnis:  $25\pi$  zu  $9\pi$ ,  $361\pi$  zu  $121\pi$ ,  $5041\pi$  zu  $1681\pi$ .

**zu A 4.7:**

Dadurch, dass der Mittelpunkt der Kreise jeweils verschoben ist, nimmt die Möglichkeit ab, die Radien miteinander zu vergleichen.

**zu A 4.8:**

(1) Abgebildet sind Kreisringe mit  $r = 1$  und  $r = 2$ , also  $A_{\text{gelb}} = 1\pi$  und  $A_{\text{grün}} = A_{\text{hellblau}} = A_{\text{blau}} = (3\pi)/3 = 1\pi$

Es könnte auch sein, dass Vielfache der Radien für die Abbildung verwendet wurden,

hier also z. B.  $r = 2$  und  $r = 4$ :  $A_{\text{gelb}} = (1 + 3) \cdot \pi = 4\pi$  und  $A_{\text{grün}} = A_{\text{hellblau}} = A_{\text{blau}} = (5\pi + 7\pi)/3 = (12\pi)/3 = 4\pi$

Entsprechendes gilt auch für die folgenden Abbildungen.

(2)  $A_{\text{pink}} = 1\pi$ ;  $A_{\text{blauviolett}} = (5\pi)/5 = 1\pi$

(3)  $A_{\text{rot}} = 1\pi$ ;  $A_{\text{rosa}} = (7\pi)/7 = 1\pi$

(4)  $A_{\text{gelb}} = 1\pi + 3\pi = 4\pi$ ;  $A_{\text{hellblau}} = (7\pi + 9\pi)/4 = 4\pi$

(5)  $A_{\text{rosa}} = 1\pi$ ;  $A_{\text{blau/gold}} = (3\pi + 5\pi)/8 = 1\pi$

(6)  $A_{\text{blau}} = 3\pi + 5\pi = 8\pi$ ;  $A_{\text{blaugrau}} = (7\pi + 9\pi + 11\pi + 13\pi)/5 = 8\pi$

(7)  $A_{\text{orange}} = 3\pi$ ;  $A_{\text{braun}} = (7\pi + 9\pi + 11\pi)/9 = 3\pi$

(8)  $A_{\text{oliv}} = 5\pi + 7\pi = 12\pi$ ;  $A_{\text{grün}} = (9\pi + 11\pi + 13\pi + 15\pi)/4 = 12\pi$

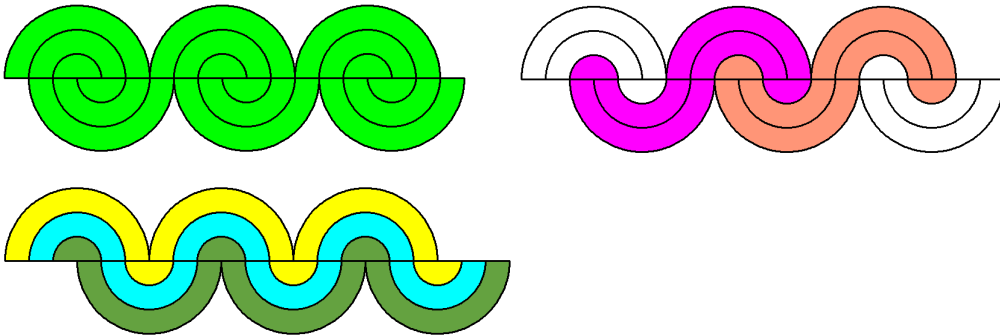
**zu A 4.9:**

- Figur 1: Die gesamte Fläche von  $49\pi$  ist orange gefärbt.
- Figur 2: Die grün gefärbte Fläche und die hellblau gefärbte Fläche sind gleich groß:  
 $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 49\pi = 24,5 \cdot \pi$
- Figur 3: grün = violett:  $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 37\pi = 18,5 \cdot \pi$   
 blaugrün:  $3\pi + 9\pi = 12\pi$
- Figur 4: gelb = orange:  $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 7\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 17\pi = 8,5 \cdot \pi$   
 rot = rosa:  $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 5\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 32\pi = 16\pi$
- Figur 5: rot = orange:  $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 9\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 21\pi = 10,5 \cdot \pi$   
 rosa = gelb:  $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 7\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 23\pi = 11,5 \cdot \pi$   
 braun:  $5\pi$

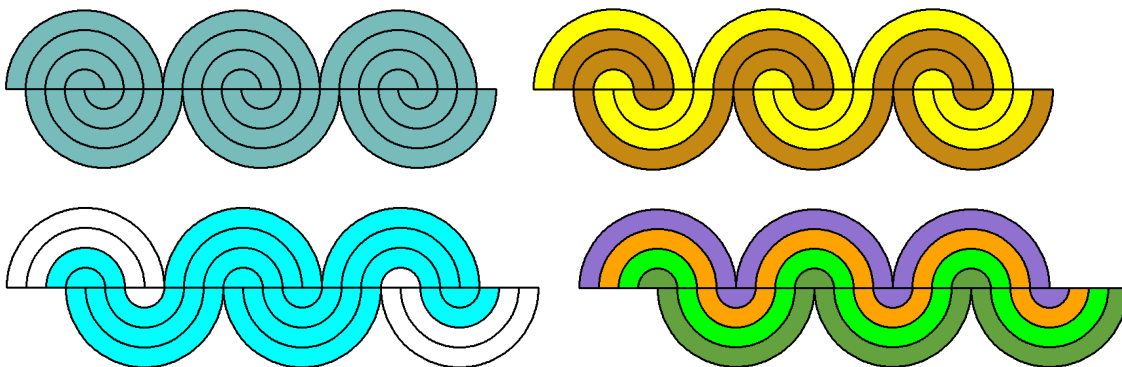
- Figur 6: grau = blauviolett:  $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 25\pi = 12,5 \cdot \pi$   
 blau = lila:  $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 12\pi = 6\pi$   
 hellblau = rot:  $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 7\pi) = \frac{1}{2} \cdot 12\pi = 6\pi$
- Figur 7: hellblau = blauviolett:  $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 14\pi = 7\pi$   
 grün = lila:  $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 14\pi = 7\pi$   
 gelb = rot:  $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 14\pi = 7\pi$   
 orange:  $7\pi$
- Figur 8: braun = blauviolett:  $\frac{1}{2} \cdot 1\pi = 0,5 \cdot \pi$   
 rosa = blaugrau:  $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 16\pi = 8\pi$   
 gelb = hellblau:  $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 16\pi = 8\pi$   
 orange = grün:  $\frac{1}{2} \cdot (7\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 16\pi = 8\pi$
- Figur 9: blau = braun:  $\frac{1}{2} \cdot 1\pi = 0,5 \cdot \pi$   
 blauviolett = orange:  $\frac{1}{2} \cdot 3\pi = 1,5 \cdot \pi$   
 grau = rot:  $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 18\pi = 9\pi$   
 grün = lila:  $\frac{1}{2} \cdot (7\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 18\pi = 9\pi$   
 hellblau:  $9\pi$

zu A 4.10:

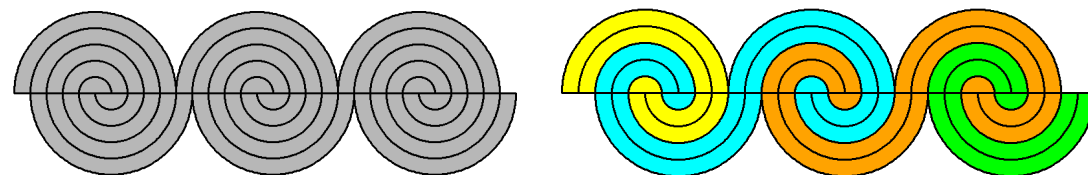
a)

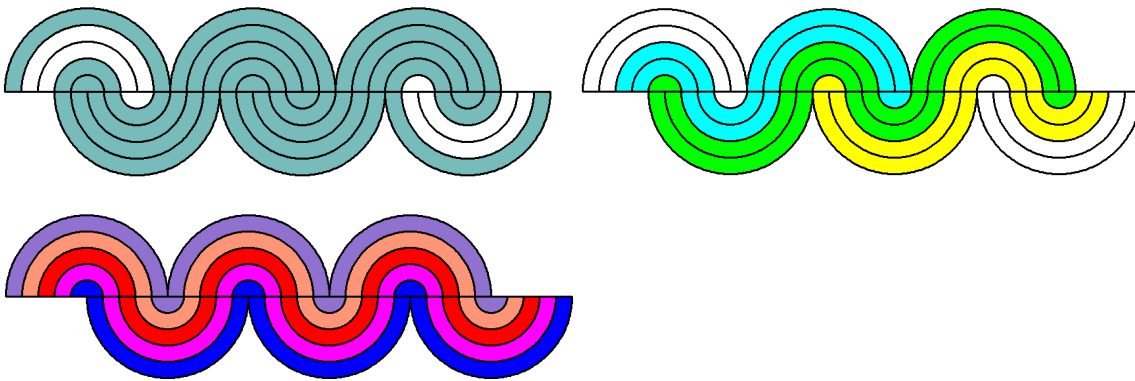


b)



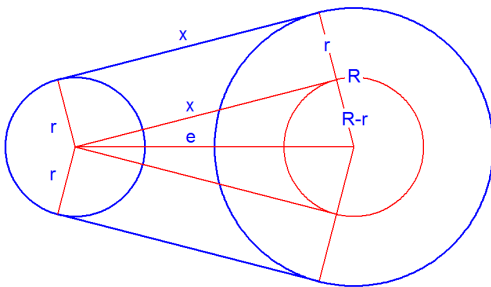
c)





zu A 4.11: Und welche Muster haben Sie noch entdeckt?

zu A 4.12:

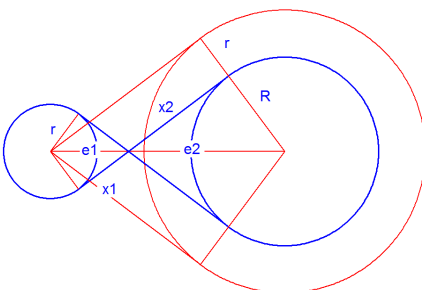


Mithilfe der Beziehung  $\sin(\alpha) = (R - r)/e$  kann aus den gegebenen Größen  $r$ ,  $R$  und  $e$  der Winkel  $\alpha$  bestimmt werden. Die Gesamtlänge  $u$  der Bahn ergibt sich aus den Längen der Bögen auf den beiden Kreisen sowie den beiden geraden Strecken der Länge  $x$ . Die Länge  $x$  kann mithilfe des Satzes von Pythagoras oder mithilfe des Kosinus von  $\alpha$  berechnet werden:  $\cos(\alpha) = x/e$ :

$$u = 2x + b_r + b_R = 2e \cdot \cos(\alpha) + \frac{2\pi \cdot r \cdot (180^\circ - 2\alpha)}{360^\circ} + \frac{2\pi \cdot R \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ}$$

$$= 2e \cdot \cos(\alpha) + \pi \cdot r \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ}\right) + \pi \cdot R \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right)$$

zu A 4.13:



Der halbe Schnittwinkel zwischen den sich schneidenden Tangenten werde mit  $\alpha$  bezeichnet.

Bei gegebenen Radien  $r$  und  $R$  sowie dem Abstand  $e = e_1 + e_2$  zwischen den Mittelpunkten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\sin(\alpha) = \frac{R+r}{e}; \text{ hieraus kann } \alpha \text{ bestimmt werden. Weiter gilt: } \tan(\alpha) = \frac{R+r}{x}.$$



Hieraus folgt:  $x = \frac{R+r}{\tan(\alpha)}$ , also gilt für die Länge  $u$  der Laufbahn

$$u = 2 \cdot \frac{R+r}{\tan(\alpha)} + \frac{2\pi \cdot r \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ} + \frac{2\pi \cdot R \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ} = 2 \cdot \frac{R+r}{\tan(\alpha)} + \pi \cdot (R+r) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right)$$

Wenn die mittlere von mehreren Bahnen durch die Radien  $r$  und  $R$  sowie den Abstand  $e$  festgelegt ist, dann ergibt sich für die Bahn, die im links abgebildeten Teil innen liegt, ein Radius von  $r - d$ , rechts dafür ein Radius von  $R + d$ , wobei  $d$  der Abstand der Bahn-Mittellinien ist. Der Abstand  $e$  der Mittelpunkte der Kreise sowie der Schnittwinkel  $\alpha$  bleiben gleich. Daher sind die beiden Bahnlängen gleich. (Entsprechendes gilt für die Außenbahn links / Innenbahn rechts.)

Ersetzt man im Term für  $u$  die Summe  $R + r$  durch  $e \cdot \sin(\alpha)$ , dann ergibt sich:

$$u = 2 \cdot \frac{e \cdot \sin(\alpha)}{\tan(\alpha)} + \pi \cdot e \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right) = e \cdot \left[2 \cdot \cos(\alpha) + \pi \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right)\right]$$

Wenn man eine solche Bahn in einem typischen Leichtathletik-Stadion mit 400 m-Bahn einrichten würde ( $r = R = 36,80$  cm,  $e = 84,40$  m), dann wäre  $\alpha \approx 60,7^\circ$  und die Laufbahn hätte eine Länge von ca. 470 m.



<http://www.springer.com/978-3-662-59059-1>

Mathematik ist schön  
Anregungen zum Anschauen und Erforschen für  
Menschen zwischen 9 und 99 Jahren  
Strick, H.K.  
2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe.,  
Softcover  
ISBN: 978-3-662-59059-1