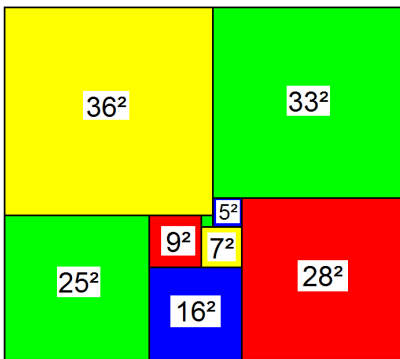


Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 14.1:



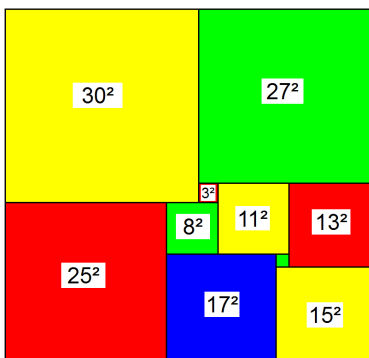
Maße 69 LE x 61 LE: Nach Angabe haben die Quadrate die Seitenlängen 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36 LE. Die Seitenlängen lassen sich dann von innen nach außen gehend identifizieren.

Beispiele für horizontale Schnitte durch die Figur (von links nach rechts notiert):

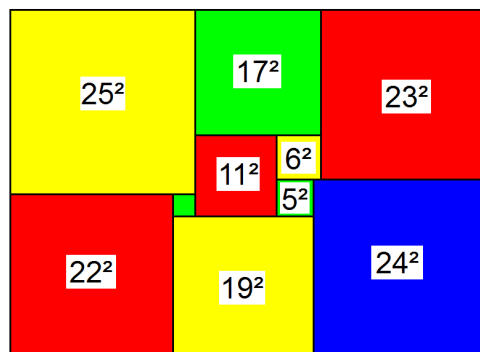
36 LE (gelb) + 33 LE (grün) = 69 LE; 25 LE (grün) + 16 LE (blau) + 28 LE (rot) = 69 LE.

Beispiele für vertikale Schnitte durch die Figur (von oben nach unten notiert):

36 LE (gelb) + 25 LE (grün) = 61 LE; 33 LE (grün) + 28 LE (rot) = 61 LE.



Maße 57 LE x 55 LE



Maße 65 LE x 47 LE

zu A 14.2:

$$c = x + 1 \quad d = c + 1 = x + 2 \quad e = d + 1 = x + 3 \quad b = c + x = 2x + 1$$

$$g = (e + 1) - x = 4 \quad f = e + g = x + 7 \quad a = f + g = x + 11$$

$$\text{Breite oben: } a + b = 3x + 12 \quad \text{Breite unten: } f + e + d = 3x + 12$$

$$\text{Höhe links: } a + f = 2x + 18 \quad \text{Höhe rechts: } b + c + d = 4x + 4$$

$$2x + 18 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = 7$$

$$a = 18 ; b = 15 ; c = 8 ; d = 9 ; e = 10 ; f = 14 ; g = 4 ; x = 7 \text{ (Format: 33 LE x 32 LE)}$$

zu A 14.3:

(1) 33x32-Rechtecks aus Abb. 14.3: (18,5)(7,8)(14,4)(10,1)(9)

(2) 57x55-Rechtecks aus Abb. 14.5a: (30,27)(3,11,13)(25,8)(17,2)(5)

(3) 65x47-Rechtecks aus Abb. 14.5b: (25,17,23)(11,6)(5,24)(22,3)(19)

zu A 14.4:

$$h = x + 1 \quad c = h + 1 = x + 2 \quad d = c + 1 = x + 3 \quad b = c + h = 2x + 3$$

$$e = x + g \quad f = e + g = x + 2g \quad a = f + g = x + 3g$$

Aus $a + g = b + h + x$ ergibt sich: $x + 3g + g = 2x + 3 + x + 1 + x \Leftrightarrow 4g = 3x + 4$.

horizontal liegende Quadrate: $a + b = x + 3g + 2x + 3 = 3x + 3g + 3$ und
 $f + e + d = x + 2g + x + g + x + 3 = 3x + 3g + 3$

vertikal liegende Quadrate: $a + f = x + 3g + x + 2g = 2x + 5g$ und
 $b + c + d = 2x + 3 + x + 2 + x + 3 = 4x + 8$

Aus $2x + 5g = 4x + 8$ ergibt sich: $5g = 2x + 8$.

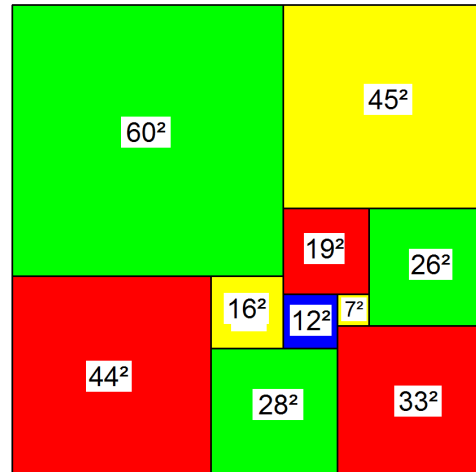
Da $5 \cdot 4g = 15x + 20 = 4 \cdot 5g = 8x + 32$ folgt:

$7x = 12$, also $x = 12/7$ und weiter:
 $5g = 24/7 + 8 = 80/7$, d. h. $g = 16/7$; $h = 19/7$;
 $c = 26/7$; $d = 33/7$; $b = 45/7$; $e = 4$; $f = 44/7$; $a = 60/7$.

Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 7 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 60$ LE, $b = 45$ LE, $c = 26$ LE, $d = 33$ LE,
 $e = 28$ LE, $f = 44$ LE, $g = 16$ LE, $h = 19$ LE und
 $x = 12$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 105 LE x 104 LE



Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation: (60,45)(19,26)(44,16)(12,7)(33)(28)

$$f = x + h \quad g = x + f = 2x + h \quad a = g + x = 3x + h \quad e = f + h = x + h + h = x + 2h$$

$$d = e + 1 = x + 2h + 1 \quad c = d + 1 = x + 2h + 2 \quad b = c + 1 = x + 2h + 3$$

vertikal liegende Quadrate: $a + g = 3x + h + 2x + h = 5x + 2h$ und
 $b + e = x + 2h + 3 + x + 2h = 2x + 4h + 3$ sowie $c + d = x + 2h + 2 + x + 2h + 1 = 2x + 4h + 3$

Hieraus kann man die Bedingung $5x + 2h = 2x + 4h + 3 \Leftrightarrow 3x = 2h + 3$ gewinnen.

horizontal liegende Quadrate: $a + b + c = 3x + h + x + 2h + 3 + x + 2h + 2 = 5x + 5h + 5$ und
 $g + f + e + d = 2x + h + x + h + x + 2h + x + 2h + 1 = 5x + 6h + 1$

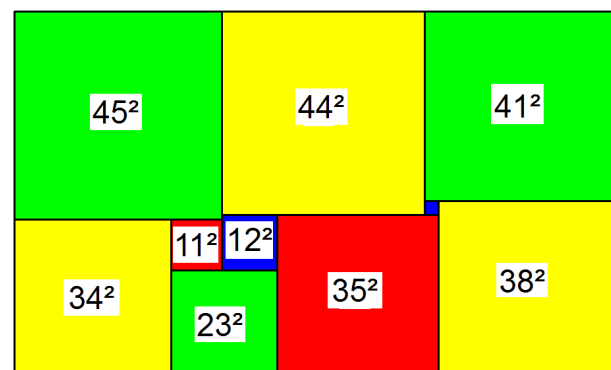
Hieraus folgt: $5x + 5h + 5 = 5x + 6h + 1 \Leftrightarrow h = 4$.

Aus $3x = 2h + 3$ ergibt sich: $3x = 11$, also $x = 11/3$,
 und weiter: $a = 15$, $b = 44/3$, $c = 41/3$, $d = 38/3$,
 $e = 35/3$, $f = 23/3$, $g = 34/3$.

Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 3 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 45$ LE, $b = 44$ LE, $c = 41$ LE, $d = 38$ LE,
 $e = 35$ LE, $f = 23$ LE, $g = 34$ LE, $h = 12$ LE und
 $x = 11$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 130 LE x 79 LE



Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation: (45,44,41)(3,38)(12,35)(34,11)(23)

$$h = x + 1 \quad g = h + x = 2x + 1 \quad f = g + x = 3x + 1 \quad d = f + g = 5x + 2 \quad e = f + d = 8x + 3$$

$$c = d + g + h = 5x + 2 + 2x + 1 + x + 1 = 8x + 4$$

$$b = c + h + 1 = 8x + 4 + x + 1 + 1 = 9x + 6 \quad a = b + 1 = 9x + 7$$

vertikal liegende Quartale: $a + e = 9x + 7 + 8x + 3 = 17x + 10$ und $b + c = 8x + 4 + 9x + 6 = 17x + 10$

horizontal liegende Quadrate: $a + b = 9x + 7 + 9x + 6 = 18x + 13$ und $e + d + c = 8x + 3 + 5x + 2 + 8x + 4 = 21x + 9$

Hieraus folgt:

$$18x + 13 = 21x + 9 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = 4/3$$

und weiter: $h = 7/3, g = 11/3, f = 15/3, d = 26/3, e = 41/3, c = 44/3, b = 54/3, a = 57/3$.

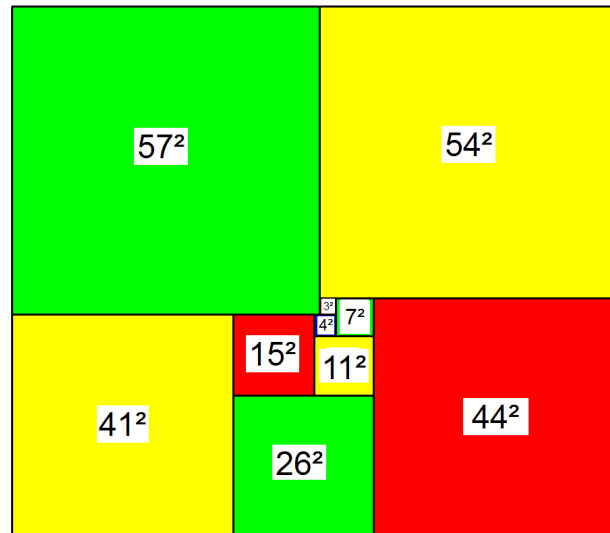
Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 3 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 57$ LE, $b = 54$ LE, $c = 44$ LE, $d = 26$ LE,
 $e = 41$ LE, $f = 15$ LE, $g = 11$ LE, $h = 7$ LE und
 $x = 4$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 111 LE x 98 LE

Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation:

$$(57,54)(3,7,44)(41,15,4)(11)(26)$$



$$g = x + 1 \quad e = g + 1 = x + 2 \quad f = g + e = 2x + 3 \quad a = f + g + x = 4x + 4$$

$$d = f - x = x + 3 \quad c = h + d = h + x + 3 \quad b = c + h = 2h + x + 3$$

$$a + x = b + h \Leftrightarrow 4x + 4 + x = 2h + x + 3 + h \Leftrightarrow 4x + 1 = 3h, \text{ also: } h = 4/3 \cdot x + 1/3$$

$$\text{also: } c = 4/3 \cdot x + 1/3 + x + 3 = 7/3 \cdot x + 10/3 \quad \text{und} \quad b = 2 \cdot (4/3 \cdot x + 1/3) + x + 3 = 11/3 \cdot x + 11/3$$

vertikal liegende Quadrate: $a + f = 4x + 4 + 2x + 3 = 6x + 7$ und

$$b + c = 11/3 \cdot x + 11/3 + 7/3 \cdot x + 10/3 = 6x + 7$$

horizontal liegende Quadrate: $a + b = 4x + 4 + 11/3 \cdot x + 11/3 = 23/3 \cdot x + 23/3$ und

$$f + e + d + c = 2x + 3 + x + 2 + x + 3 + 7/3 \cdot x + 10/3 = 19/3 \cdot x + 34/3$$

Hieraus folgt: $23/3 \cdot x + 23/3 = 19/3 \cdot x + 34/3 \Leftrightarrow 4/3 \cdot x = 11/3 \Leftrightarrow x = 11/4$

und weiter:

$a = 60/4, b = 55/4, c = 39/4, d = 23/4, e = 19/4,$
 $f = 34/4, g = 15/4, h = 16/4$

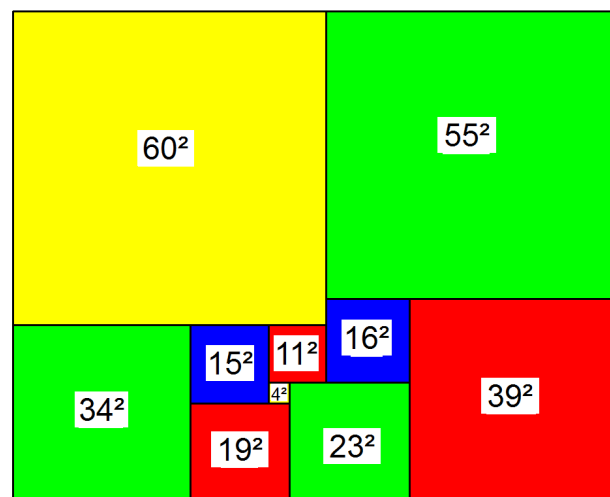
Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 4 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 60$ LE, $b = 55$ LE, $c = 39$ LE, $d = 23$ LE,
 $e = 19$ LE, $f = 34$ LE, $g = 15$ LE, $h = 16$ LE und
 $x = 11$ LE, vgl. Grafik rechts.

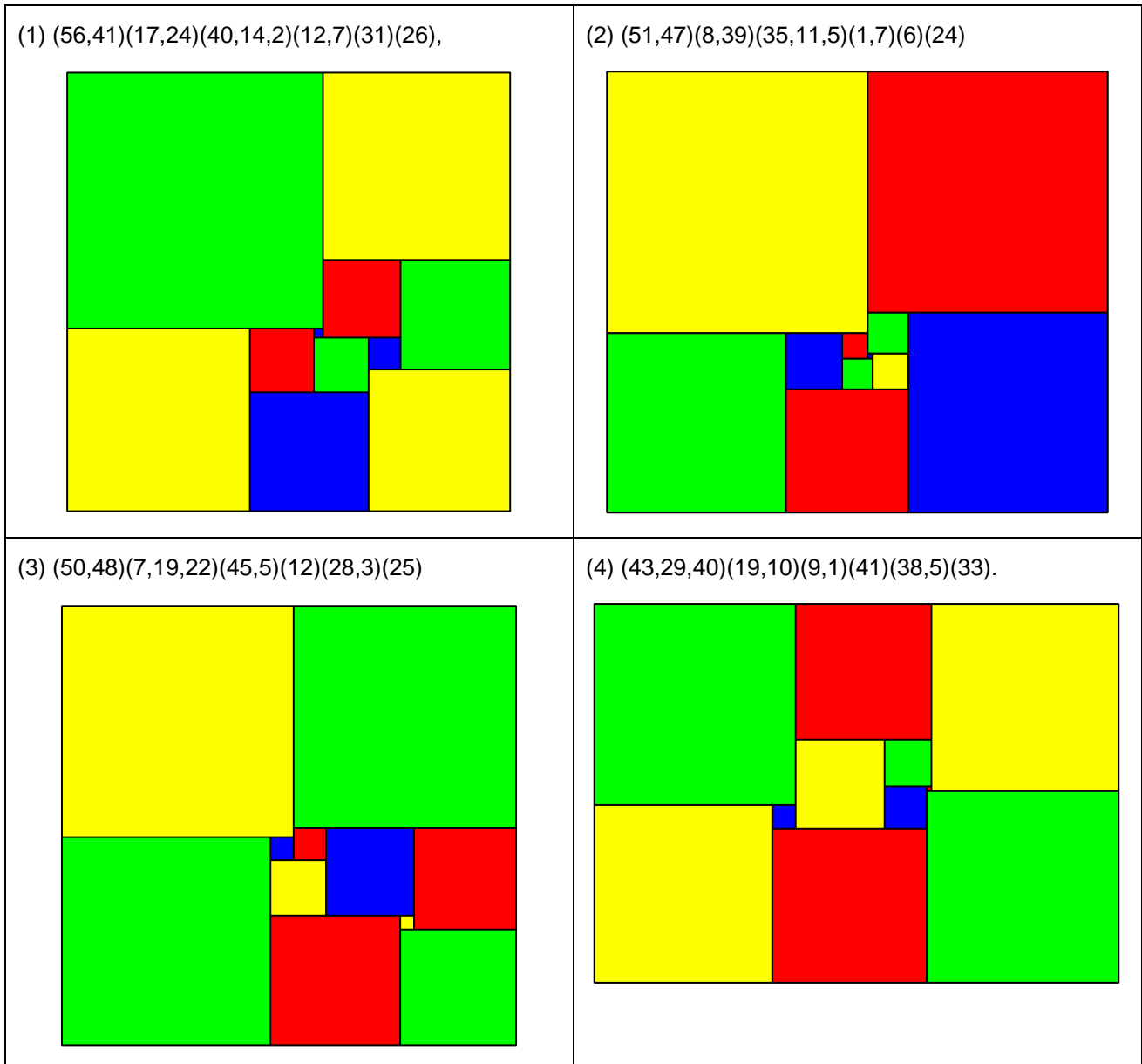
Format: 115 LE x 94 LE

Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation:

$$(60,55)(16,39)(34,15,11)(4,23)(19)$$



zu A 14.5:



zu A 14.6:

Dem kleinen roten Quadrat im linken unteren Viertel der Figur wird die Seitenlänge 1 LE zugeordnet.

$$m = n + 1 \quad l = m + 1 = n + 2 \quad k = l + 1 = n + 3$$

$$p + n = k + 1 \Leftrightarrow p + n = n + 3 + 1 \Leftrightarrow p = 4$$

$$o = n - p = n - 4$$

$$q = o - p = n - 4 - 4 = n - 8$$

$$a = m + n + o = n + 1 + n + n - 4 = 3n - 3$$

In der rechten unteren Ecke der Figur ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$e = u + x \quad f = e + x = u + 2x \quad g = f + x = u + 3x \quad c = u + e = 2u + x$$

$$h = g - v = u + 3x - v \quad s = h - v = u + 3x - 2v$$

$$t + u = v + g + x = v + u + 3x + x \Leftrightarrow t = v + 4x$$

$$r + s = t + v, \text{ also } r + u + 3x - 2v = v + 4x + v, \text{ d. h. } r = 4v - u + x$$

$$\mathbf{d} = r + t = 4v + x - u + v + 4x = 5v + 5x - u$$

$$\mathbf{b} = c + d = 2u + x + 5v + 5x - u = u + 6x + 5v$$

Im Zusammenhang mit den zuerst betrachteten Quadraten ergibt sich:

$$h + s + q = p + k, \text{ also } u + 3x - v + u + 3x - 2v + n - 8 = 4 + n + 3 \Leftrightarrow \mathbf{2u - 3v + 6x = 15}$$

- horizontal liegende Quadrate:

$$a + b = 3n - 3 + u + 6x + 5v$$

$$m + n + o + d + c = n + 1 + n + n - 4 + 5v + 5x - u + 2u + x = 3n + 5v + 6x + u - 3$$

$$l + k + h + g + f = n + 2 + n + 3 + u + 3x - v + u + 3x + u + 2x = 2n + 3u + 8x - v + 5$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$3n + 5v + 6x + u - 3 = 2n + 3u + 8x - v + 5 \Leftrightarrow \mathbf{n - 2u + 6v - 2x = 8}$$

- vertikal liegende Quadrate:

$$a + m + l = 3n - 3 + n + 1 + n + 2 = 5n$$

$$b + d + t + g = u + 6x + 5v + 5v + 5x - u + v + 4x + u + 3x = u + 18x + 11v$$

$$b + c + e + f = u + 6x + 5v + 2u + x + u + x + u + 2x = 5u + 10x + 5v$$

Hieraus ergeben sich zwei Gleichungen:

$$5n = u + 18x + 11v \Leftrightarrow \mathbf{-5n + u + 11v + 18x = 0}$$

$$u + 18x + 11v = 5u + 10x + 5v \Leftrightarrow \mathbf{-4u + 6v + 8x = 0}$$

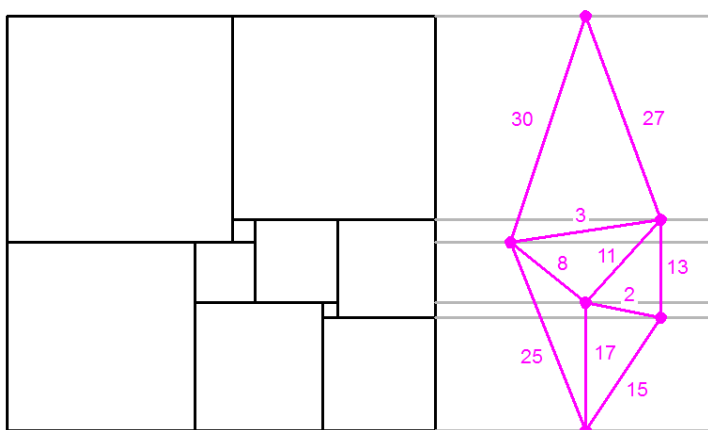
Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung $n = 11$, $u = 6$, $v = 2$ und $x = 1,5$.

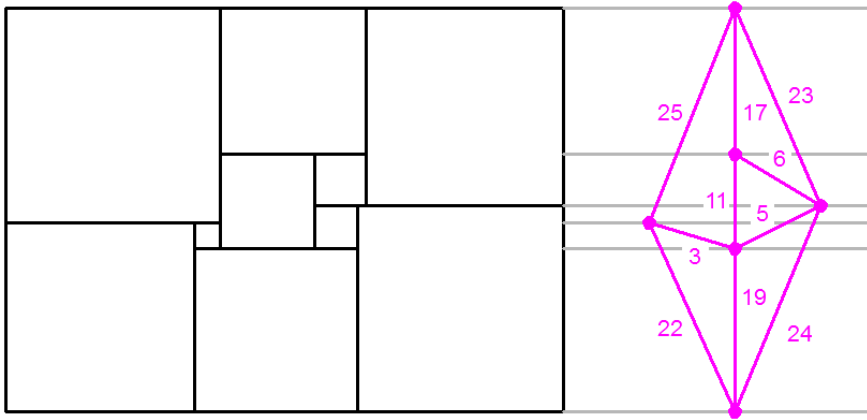
Hieraus folgt: $a = 30$, $b = 25$, $c = 13,5$, $d = 11,5$, $e = 7,5$, $f = 9$, $g = 10,5$, $h = 8,5$, $k = 14$, $l = 13$, $m = 12$, $o = 7$, $p = 4$, $q = 3$, $r = 3,5$, $s = 6,5$, $t = 8$.

Wählt man für das kleinere rote Quadrat die Seitenlänge 2 LE, dann ergeben sich folgende ganzzahlige Seitenlängen:

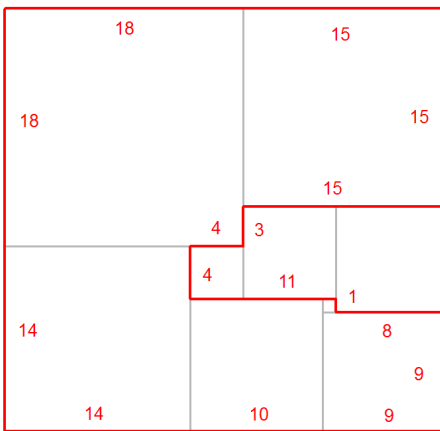
$a = 60$ LE, $b = 50$ LE, $c = 27$ LE, $d = 23$ LE, $e = 15$ LE, $f = 18$ LE, $g = 21$ LE, $h = 17$ LE, $k = 28$ LE, $l = 26$ LE, $m = 24$ LE, $n = 22$ LE, $o = 14$ LE, $p = 8$ LE, $q = 6$ LE, $r = 7$ LE, $s = 13$ LE, $t = 16$ LE, $u = 12$ LE, $v = 4$ LE und $x = 3$ LE.

zu A 14.7:

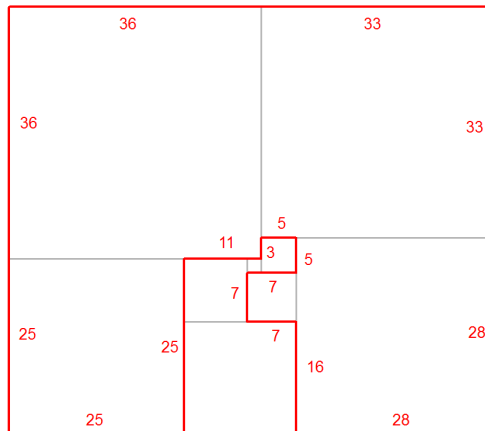




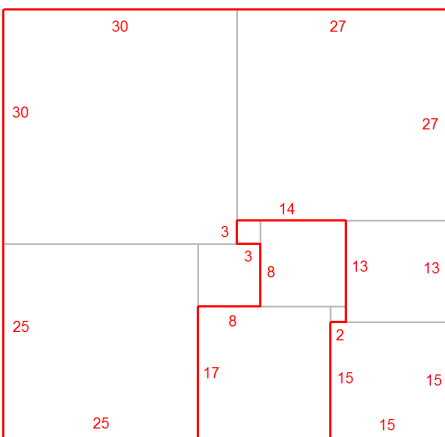
zu A 14.8:



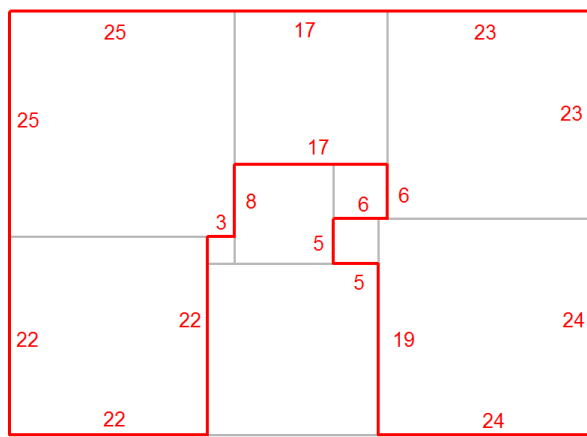
Gesamtlänge: 168 LE



Gesamtlänge: 330 LE



Gesamtlänge: 290 LE



Gesamtlänge: 296 LE



<http://www.springer.com/978-3-662-59059-1>

Mathematik ist schön
Anregungen zum Anschauen und Erforschen für
Menschen zwischen 9 und 99 Jahren
Strick, H.K.
2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe.,
Softcover
ISBN: 978-3-662-59059-1