Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 13.1:

Flächeninhalt der Teilfiguren:	Flächeninhalt der Gesamtfigur:
$2 \cdot (8^2 + ½ \cdot 8 \cdot 13 + ½ \cdot 5 \cdot 8) = 272$ FE	$13 \cdot 21 = 273$ FE
$2 \cdot (8 \cdot 21 + ½ \cdot 8 \cdot 13 + ½ \cdot 13 \cdot 21) = 713$ FE	$21 \cdot 34 = 714$ FE

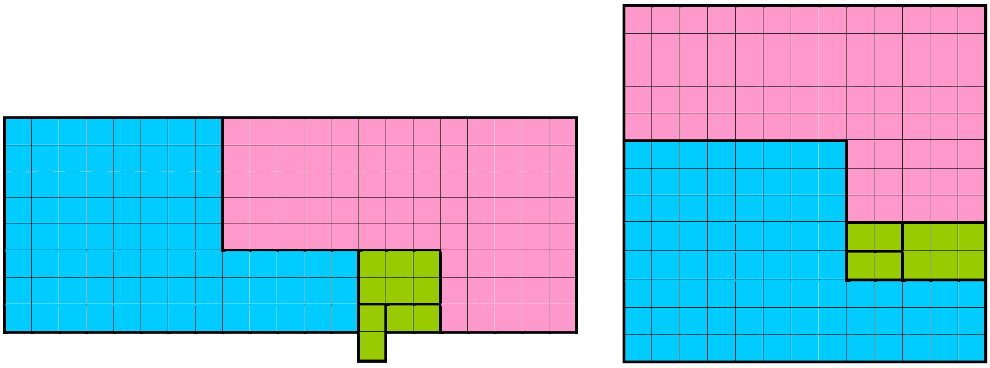
In beiden Fällen hat der „weiße Streifen“ einen Flächeninhalt von 1 FE.
Der Flächenanteil beträgt 0,37 % bzw. 0,14 % an der Gesamtfigur.

zu A 13.2:

Bei der zweiten Figur hatte das grüne Dreieck einen Steigungswinkel von $\tan^{-1}(8/13) \approx 31{,}61°$, das hellblaue von $\tan^{-1}(5/8) \approx 32{,}01°$. Auch dieser Unterschied von 0,40° ist kaum zu erkennen! Man sieht die gesamte Figur als Dreieck an, dessen Steigungswinkel sich aus dem Seitenverhältnis 13:21 ergibt: $\tan^{-1}(13/21) \approx 31{,}76°$.

Bei der dritten Figur hatte das grüne Dreieck einen Steigungswinkel von $\tan^{-1}(5/8) \approx 32{,}01°$, das hellblaue von $\tan^{-1}(3/5) \approx 30{,}96°$. Diesen Unterschied von 1,05° kann man *vielleicht* erkennen! Man sieht die gesamte Figur als Dreieck an, dessen Steigungswinkel sich aus dem Seitenverhältnis 8:13 ergibt: $\tan^{-1}(8/13) \approx 31{,}61°$.

zu A 13.3:



zu A 13.4:

Bei Rätsel 3 hat das hellblaue Dreieck Katheten mit den Längen 5 LE und 3 LE; ein solches Dreieck tritt hier in der Figur nicht auf (hier hat eine Kathtete die Länge 3 LE und die Hypotenuse die Länge 5 LE. Das grüne Dreieck hat in Rätsel 3 Katheten mit den Längen 5 LE und 8 LE; hier hat die Hypotenuse die Länge 8 LE und eine Kathtete die Länge 5 LE. Entsprechendes gilt für die Abbildung aus Rätsel 1.

Bei den hier betrachteten Figuren treten fast-ähnliche Dreiecke auf, bei denen das Verhältnis der Länge einer Kathete zur Länge der Hypotenuse benachbarte Fibonacci-Zahlen sind; die zugehörigen Winkel können mithilfe der Umkehrfunktion des Sinus berechnet werden:

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36{,}87° \;;\; \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 38{,}68° \;;\; \sin^{-1}\left(\frac{8}{13}\right) \approx 37{,}98° \;;\; \sin^{-1}\left(\frac{13}{21}\right) \approx 38{,}25° \;;\; \ldots$$

zu A 13.5:

$$\frac{f_n}{f_{n+2}} = \frac{f_n}{f_n + f_{n+1}} = \frac{1}{\frac{f_n + f_{n+1}}{f_n}} = \frac{1}{1+\frac{f_{n+1}}{f_n}} \quad \to \quad \frac{1}{1+\frac{2}{\sqrt{5}-1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 0{,}382\,;$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = 20{,}905157\ldots°$$

zu A 13.6:

Die beiden dunkelgrün gefärbten Dreiecke haben jeweils einen Flächeninhalt von ½ · 3 · 7 = 10,5 FE. Die beiden violett gefärbten Dreiecke haben jeweils einen Flächeninhalt von ½ · 2 · 5 = 5 FE. Die beiden blaugrün gefärbten Gnomone haben jeweils einen Flächeninhalt von 14 FE.

Addiert man diese Flächeninhalte, so kommt man insgesamt auf einen Flächeninhalt von 2 · (10,5 + 5 + 14) = 59 FE.

Beachtet man nur die Breite der Grundseite und die Höhe der beiden Figuren, dann ergibt sich in beiden Fällen ein Flächeninhalt von ½ · 10 · 12 = 60 FE.

Die violett gefärbten rechtwinkligen Dreiecke haben einen spitzen Winkel von $\tan^{-1}(2/5) \approx 21{,}80°$, die dunkelgrün gefärbten von $\tan^{-1}(3/7) \approx 23{,}20°$.

Bei genauem Hinsehen erkennt man, dass die „Schenkel" des gleichschenkligen Beinahe-Dreiecks in der 1. Figur nach innen und bei der 2. Figur nach außen geknickt sind. Würde man bei der 1. Figur die Eckpunkte miteinander verbinden, dann würde auf beiden Seiten ein sehr schmaler weißer Streifen sichtbar werden; dieser hat jeweils einen Flächeninhalt von ½ FE, wie sich aus der Differenz 60 FE – 59 FE ergibt.

Auch bei der 2. Figur sind 59 FE gefärbt, addiert man die Flächeninhalte der beiden weiß gelassenen Quadrate hinzu, so ergibt sich hier eine Fläche von 61 FE. Gegenüber dem gleichschenkligen Dreieck mit Grundseite 10 LE und Höhe 12 LE kommen hier auf beiden Schenkeln die bei der 1. Figur festgestellten Streifen von jeweils ½ FE hinzu.

zu A 13.7:

In beiden Figuren werden folgenden vier Puzzlestücke verwendet:

– Hellblaues rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Länge 5 LE und 13 LE, also einem Flächeninhalt von ½ · 5 · 13 = 32,5 FE. Der spitze Winkel hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(5/13) \approx 21{,}04°$.

– Rotes rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Länge 8 LE und 21 LE, also einem Flächeninhalt von ½ · 8 · 21 = 84 FE. Der spitze Winkel hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(8/21) \approx 20{,}85°$.

– Gelbes rechtwinkliges Trapez mit den Grundseiten 34 LE und 13 LE und der Höhe 8 LE, also einem Flächeninhalt von 34 · 8 – ½ · 21 · 8 = 188 FE. Der spitze Winkel hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(8/21) \approx 20{,}85°$, d. h., das rote Dreieck und das gelbe Trapez ergänzen sich zu einem Rechteck.

– Grünes rechtwinkliges Trapez mit den Grundseiten 34 LE und 21 LE und der Höhe 8 LE, also einem Flächeninhalt von 34 · 8 – ½ · 13 · 8 = 220 FE. Der spitze Winkel des gegenüber einem Rechteck fehlenden rechtwinkligen Dreiecks hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(5/13) \approx 21{,}04°$, d. h., das blaue Dreieck und das grüne Trapez ergänzen sich zu einem Rechteck.

Die erste Rechteckfigur hat einen Flächeninhalt von 13 · 55 = 715 FE, die zweite von 21 · 34 = 714 FE. Der Unterschied von 1 FE kommt durch die nicht genau zueinander passenden schrägen Randlinien der beiden Trapeze und Dreiecke zustande.

http://www.springer.com/978-3-662-59059-1

Mathematik ist schön
Anregungen zum Anschauen und Erforschen für
Menschen zwischen 9 und 99 Jahren
Strick, H.K.
2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe.,
Softcover
ISBN: 978-3-662-59059-1