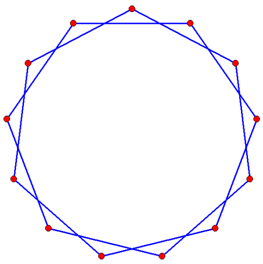
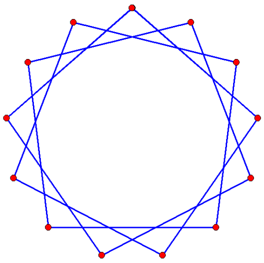
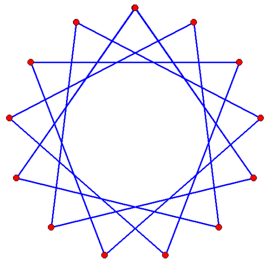
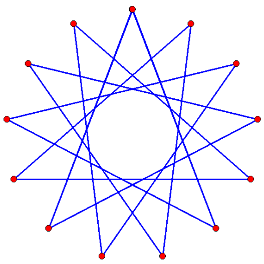
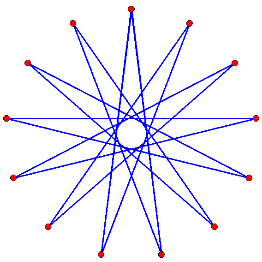
Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 1.1:

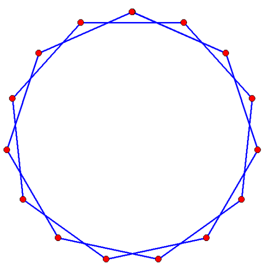
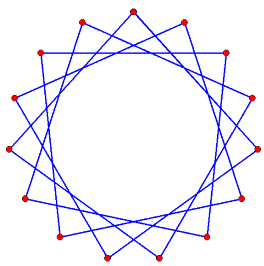
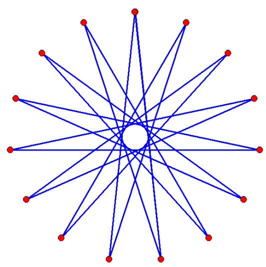
***n* = 13:**

Da *n* eine Primzahl ist, lassen sich alle Sternfiguren {13/*k*} mit *k* = 2, 3, 4, 5, 6 als durchgehende Streckenzüge zeichnen:

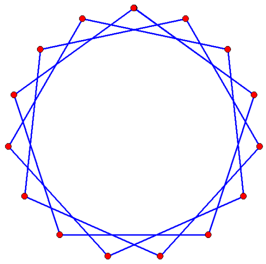
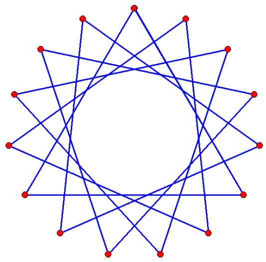
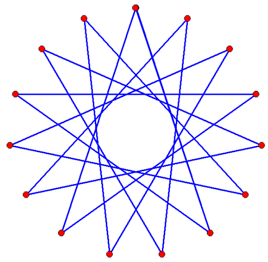
 {13/2} 0 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 0	 {13/3} 0 – 3 – 6 – 9 – 12 – 2 – 5 – 8 – 11 – 1 – 4 – 7 – 10 – 0	 {13/4} 0 – 4 – 8 – 12 – 3 – 7 – 11 – 2 – 6 – 10 – 1 – 5 – 9 – 0
 {13/5} 0 – 5 – 10 – 2 – 7 – 12 – 4 – 9 – 1 – 6 – 11 – 3 – 8 – 0	 {13/6} 0 – 6 – 12 – 5 – 11 – 4 – 10 – 3 – 9 – 2 – 8 – 1 – 7 – 0	

***n* = 15:**

Da *n* = 3 · 5, lassen sich die Sternfiguren {15/*k*} mit *k* = 2, 4, 7 (teilerfremd) als durchgehende Streckenzüge zeichnen:

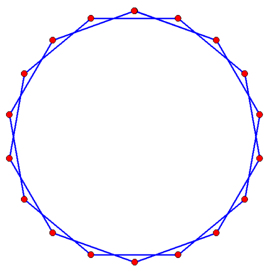
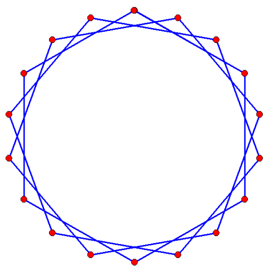
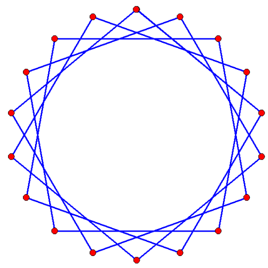
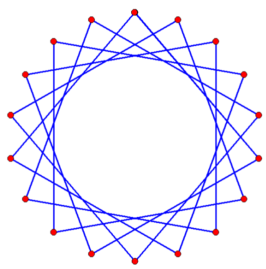
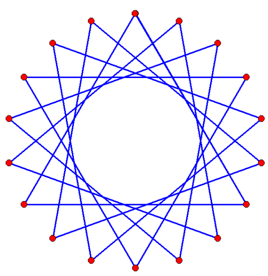
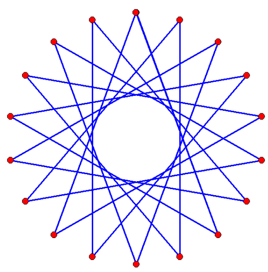
 {15/2} 0 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 0	 {15/4} 0 – 4 – 8 – 12 – 1 – 5 – 9 – 13 – 2 – 6 – 10 – 14 – 3 – 7 – 11 – 0	 {15/7} 0 – 7 – 14 – 6 – 13 – 5 – 12 – 4 – 11 – 3 – 10 – 2 – 9 – 1 – 8 – 0

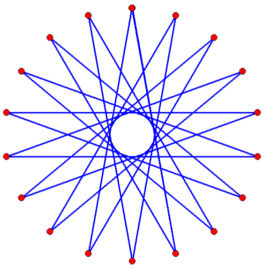
Die Sternfigur {15/*3*} besteht aus 3 regelmäßigen 5-Ecken, da 3 ein Teiler von 15 ist, Sternfigur {15/5} aus 5 regelmäßigen 3-Ecken, da 5 ein Teiler von 15 ist, und Sternfigur {15/6} besteht wegen ggT(15; 6) = 3 aus drei 5-zackigen Sternen vom Typ {5/2}:

 {15/3} 0 – 3 – 6 – 9 – 12 – 0, 1 – 4 – 7 – 10 – 13 – 1, 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 2	 {15/5} 0 – 5 – 10 – 0, 1 – 6 – 11 – 1, 2 – 7 – 12 – 2, 3 – 8 – 13 – 3, 4 – 9 – 14 – 4	 {15/6} 0 – 6 – 12 – 3 – 9 – 0, 1 – 7 – 13 – 4 – 10 – 1, 2 – 8 – 14 – 5 – 11 – 2

***n* = 18:**

Da *n* = 2 · 3 · 3, lassen sich nur die Sternfiguren {18/*k*} mit *k* = 5, 7 (teilerfremd) als durchgehende Streckenzüge zeichnen. Sternfigur {18/2} besteht aus 2 regelmäßigen 9-Ecken, da 2 ein Teiler von 18 ist. Sternfigur {18/3} besteht aus 3 regelmäßigen 6-Ecken, da 3 ein Teiler von 18 ist. Sternfigur {18/4} besteht wegen ggT(18;4) = 2 aus zwei 9-zackigen Sternen vom Typ {9/2}. Sternfigur {18/6} besteht aus 6 regelmäßigen 3-Ecken, da 6 ein Teiler von 18 ist. Sternfigur {18/8} besteht wegen ggT(18;8} = 2 aus zwei 9-zackigen Sternen vom Typ {9/4}.

 {18/2} 0 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 0, 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 1	 {18/3} 0 – 3 – 6 – 9 – 12 – 15 – 0, 1 – 4 – 7 – 10 – 13 – 16 – 1, 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – 2	 {18/4} 0 – 4 – 8 – 12 – 16 – 2 – 6 – 10 – 14 – 0, 1 – 5 – 9 – 13 – 17 – 3 – 7 – 11 – 15 – 1
 {18/5} 0 – 5 – 10 – 15 – 2 – 7 – 12 – 17 – 4 – 9 – 14 – 1 – 6 – 11 – 16 – 3 – 8 – 13 – 0	 {18/6} 0 – 6 – 12 – 18, 1 – 7 – 13 – 1, 2 – 8 – 14 – 2, 3 – 9 – 15 – 3, 4 – 10 – 16 – 4, 5 – 11 – 17 – 5	 {18/7} 0 – 7 – 14 – 3 – 10 – 17 – 6 – 13 – 2 – 9 – 16 – 5 – 12 – 1 – 8 – 15 – 4 – 11 – 0

 {18/8} 0 – 8 – 16 – 6 – 14 – 4 – 12 – 2 – 10 – 0, 1 – 9 – 17 – 7 – 15 – 5 – 13 – 3 – 11 – 1		

zu A 1.2:

Stern {5/2} kann mit 2 Farben gefärbt werden: Innen liegt das regelmäßige 5-Eck = Stern {5/1}, außen liegen die 5 gleichgroßen Zacken.	Stern {7/2} kann mit 2 Farben gefärbt werden: Innen liegt das regelmäßige 7-Eck = Stern {7/1}, außen liegen die 7 gleichgroßen Zacken.	Stern {7/3} kann mit 3 Farben gefärbt werden: Innen liegt der Stern {7/2}, der mit zwei Farben gefärbt werden kann; außen liegen die 7 gleichgroßen Zacken.
Stern {9/2} kann mit 2 Farben gefärbt werden: Innen liegt das regelmäßige 9-Eck = Stern {9/1}, außen liegen die 9 gleichgroßen Zacken.	Stern {9/3} kann mit 3 Farben gefärbt werden: Innen liegt der Stern {9/2}, der mit zwei Farben gefärbt werden kann; außen liegen die 9 gleichgroßen Zacken.	Stern {9/4} kann mit 4 Farben gefärbt werden: Innen liegt der Stern {9/3}, der mit drei Farben gefärbt werden kann, außen liegen die 9 gleichgroßen Zacken.

Fazit: Da Stern {n/k} aus Stern {n/k – 1} und n Zacken außen besteht, kann schrittweise erschlossen werden, dass der Stern mit k Farben gefärbt werden kann.

zu A 1.3:

Ein regelmäßiges 9-Eck hat ½ · 9 · 6 = 27 Diagonalen, von denen 9 Diagonalen die drei gleichseitigen Dreiecke des Sterns {9/3} bilden und jeweils 9 Diagonalen zu den regelmäßigen 9-zackigen Sternen {9/2} und {9/4} gehören.

Ein regelmäßiges 10-Eck hat ½ · 10 · 7 = 35 Diagonalen, von denen 5 Diagonalen jeweils nur zwei gegenüberliegende Punkte verbinden, 10 Diagonalen bilden die beiden regelmäßigen 5-Ecke des Sterns {10/2}, 10 Diagonalen bilden die beiden 5-zackigen Sterne, aus denen Stern {10/4} besteht und 10 Diagonalen gehören zum regelmäßigen 10-zackigen Stern {10/3}.

Ein regelmäßiges 11-Eck hat ½ · 11 · 8 = 44 Diagonalen, von denen jeweils 11 Diagonalen die regelmäßigen Sterne {11/2}, {11/3}, {11/4} und {11/5} bilden.

Ein regelmäßiges 12-Eck hat ½ · 12 · 9 = 54 Diagonalen, von denen 6 Diagonalen jeweils nur zwei gegenüberliegende Punkte verbinden, 12 Diagonalen bilden die beiden regelmäßigen 6-Ecke des Sterns {12/2}, 12 Diagonalen bilden die drei Quadrate des Sterns {12/3}, 12 Diagonalen bilden die beiden regelmäßigen 6-Ecke, aus denen Stern {12/4} besteht und 12 Diagonalen gehören zum regelmäßigen 12-zackigen Stern {12/5}.

Verallgemeinerung:

Die Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen n-Eck beträgt ½ · n · (n – 3).

Bei ungeradem n ist der Faktor n – 3 eine gerade Zahl und lässt sich durch 2 teilen. ½ · (n – 3) gibt also an, wie viele Sterne gebildet werden können: Bei n = 5 ist dies ½ · (n – 3) = 1 Stern, bei n = 7 sind dies ½ · (n – 3) = 2 Sterne, bei bei n = 9 sind dies ½ · (n – 3) = 3 Sterne usw.

Bei geradem n sind ½ · n Diagonalen zum Zeichnen von Sternen unbrauchbar, weil sie nur jeweils zwei gegenüberliegende Punkte miteinander verbinden. Übrig bleiben ½ · n · (n – 3) – ½ · n = ½ · n · (n – 4) Diagonalen. ½ · (n – 4) gibt an, wie viele Sterne gebildet werden können: Bei n = 6 ist dies ½ · (n – 4) = 1 Stern, bei n = 8 sind dies ½ · (n – 4) = 2 Sterne, bei bei n = 10 sind dies ½ · (n – 4) = 3 Sterne usw.

Welche Stern-Typen entstehen, hängt – wie ausgeführt – von k ab: ein Stern aus k Vielecken mit n/k Ecken oder ein Stern aus g Sternen mit n/g Zacken oder ein Stern, der aus einem durchgehenden Streckenzug besteht.

zu A 1.4:

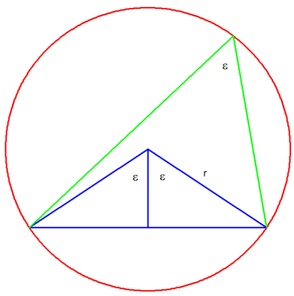
Die Zacke liegt „über“ einer Diagonale des 8-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem übernächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 2 · 360°/8, also ε = 45°.	Die Zacke liegt „über“ einer Seite des 9-Ecks. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 360°/9, also ε = 20°.	Die Zacke liegt „über“ einer Diagonale des 10-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem viertnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 4 · 360°/10, also ε = 72°.	Die Zacke liegt „über“ einer Diagonale des 12-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem fünftnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 5 · 360°/12, also ε = 75°.

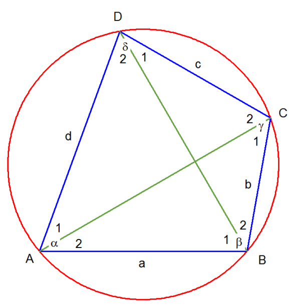
zu A 1.5:

Zu einer Sehne gibt es Umfangswinkel „oberhalb“ bzw. „unterhalb“ der Sehne. Diese ergänzen sich zu 180°. Der Mittelpunktswinkel, der zu einem Umfangswinkel „unterhalb“ der Sehne gehört, ist der Ergänzungswinkel zu dem Mittelpunktswinkel, der zu einem Umfangswinkel „oberhalb“ der Sehne gehört – diese beiden Mittelpunktswinkel ergänzen sich also zu 360°.

Dies ergibt sich aus dem **Kreiswinkelsatz** (vgl. Abb. Mitte):

- *Alle Umfangswinkel über einer Sehne sind gleich groß.*
- *Der Mittelpunktswinkel über einer Sehne ist doppelt so groß wie die zugehörigen Umfangswinkel.*





Mit den in der Abbildung rechts stehenden Bezeichnungen ergibt sich:
Folgende Umfangswinkel sind gleich groß … über der Seite: AB: $\gamma_1 = \delta_2$; BC: $\delta_1 = \alpha_2$; CD: $\alpha_1 = \beta_2$; DA: $\beta_1 = \gamma_2$.

… über bzw. „unter“ der Diagonale: AC: $\delta = 180° - \beta$; BD: $\alpha = 180° - \gamma$,

also: $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$.

Die Zacke liegt über der Diagonale des 9-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem fünftnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 5 · 360°/9, also ε = 100°.

zu A 1.6:

Der Mittelpunktswinkel ist jeweils größer als 180°.

In der Abbildung links liegt die Zacke über der Diagonale des 11-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem siebtnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 7 · 360°/11, also $\varepsilon \approx$ 114,5°.

In der Abbildung rechts liegt die Zacke über der Diagonale des 12-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem achtnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie 8 · 360°/12, also ε = 120°.

zu A 1.7:

Da jeder Stern vom Typ {n/2} im Innern ein regelmäßiges n-Eck, also einen Stern vom Typ {n/1} enthält, sind die außen liegenden Zacken „aufgesetzt“.

zu A 1.8:

Die Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ sind Lösungen der Gleichung $x^6 - 1 = 0$. Daher ist die Termdivision $(x^6 - 1) : (x^2 - 1)$ möglich und man erhält als ergänzenden Faktor $(x^4 + x^2 + 1)$.

Durch Ausmultiplizieren kann man überprüfen, dass sich $(x^4 + x^2 + 1)$ darstellen lässt als Produkt $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$.

Man kann dabei z. B. die 3. binomische Formel anwenden:
$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = ((x^2 + 1) + x) \cdot ((x^2 +1) - x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen $x^2 + x + 1 = 0$ und $x^2 - x + 1 = 0$ sind:

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \;;\; x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \;;\; x_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \;;\; x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Punktkoordinaten:

$$(1 \mid 0) \;;\; (-1 \mid 0) \;;\; (-\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \;;\; (-\tfrac{1}{2} \mid -\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \;;\; (\tfrac{1}{2} \mid \tfrac{\sqrt{3}}{2}) \;;\; (\tfrac{1}{2} \mid -\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

zu A 1.9:

Die Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ sind Lösungen der Gleichung $x^8 - 1 = 0$. Daher ist die Termdivision $(x^8 - 1) : (x^2 - 1)$ möglich und man erhält als ergänzenden Faktor $(x^6 + x^4 + x^2 + 1)$.

Nachdem man festgestellt hat, dass $x_3 = i$ und $x_4 = -i$ ebenfalls Lösungen der Gleichung $x^8 - 1 = 0$ sind, muss auch nach die Termdivision durch $(x^2 + 1)$ möglich sein, also

$(x^8 - 1) : (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x^8 - 1) : (x^4 - 1) = (x^4 + 1)$

Durch Ausmultiplizieren $(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}\,x + 1)$ überprüft man, dass dies $(x^4 + 1)$ ergibt.

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen $x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 = 0$ und $x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 = 0$ sind:

$x_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \;;\; x_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \;;\; x_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \;;\; x_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$ Hieraus ergeben sich die folgenden Punktkoordinaten:

$$(1 \mid 0) \;;\; (-1 \mid 0) \;;\; (0 \mid 1) \;;\; (0 \mid -1) \;;\; (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} \mid \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \;;\; (-\tfrac{\sqrt{2}}{2} \mid -\tfrac{\sqrt{2}}{2}) \;;\; (\tfrac{\sqrt{2}}{2} \mid \tfrac{\sqrt{2}}{2}) \;;\; (\tfrac{\sqrt{2}}{2} \mid -\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

zu A 1.10:

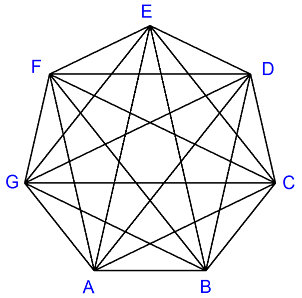
4. Runde: A – E, D – F, C – G, B – H

5. Runde: A – F, E – G, D – H, B - C

6. Runde: A – G, F – H, B – E, C – D

7. Runde: A – H, B – G, C – F, D – E

zu A 1.11:.



Wie beim Turnier mit 8 Mannschaften zeichnet man ein regelmäßiges 7-Eck. Die Spielpaarungen ergeben sich aus den einzelnen Seiten und den dazu parallelen Diagonalen; der gegenüberliegende Punkt markiert die spielfreie Mannschaft.

1. Runde: A – B, C – G, D – F, E ist spielfrei

2. Runde: B – C, A – D, E – G, F ist spielfrei

3. Runde: C – D, B – E, A – F, G ist spielfrei

4. Runde: D – E, C – F, B – G, A ist spielfrei

5. Runde: E – F, D – G, A – C, B ist spielfrei

6. Runde: F – G, A – E, B – D, C ist spielfrei

7. Runde: G – A, B – F, C – E, D ist spielfrei

zu A 1.12:

Aus der folgenden symmetrischen Tabelle kann man ablesen, dass 15 Spiele stattfinden. In den Randfeldern stehen alle möglichen Paar-Kombinationen (in alphabetischer Reihenfolge notiert).

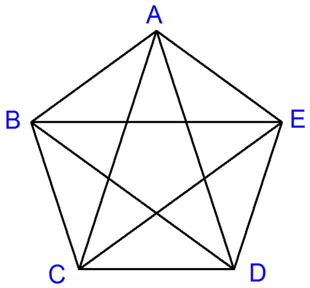
Im Innern der Tabelle steht ein „X“, wenn eine Spielpaarung nicht möglich ist, da ein Spieler doppelt vorkommt. Die Tabelle ist symmetrisch, da mit jeder Spielpaarung auch die umgekehrte Aufzählung der Partie möglich ist.

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
AB	X	X	X	X	X	X	X			
AC	X	X	X	X	X			X	X	
AD	X	X	X	X		X		X		X
AE	X	X	X	X			X		X	X
BC	X	X			X	X	X	X	X	
BD	X		X		X	X	X	X		X
BE	X			X	X	X	X		X	X
CD		X	X		X	X		X	X	X
CE		X		X	X		X	X	X	X
DE			X	X		X	X	X	X	X

Damit man einen schönen Spielplan hat, sollte man geometrisch vorgehen.

Man betrachtet ein regelmäßiges Fünfeck und in diesem bestimmte Seiten bzw. Diagonalen,die den Paarkombinationen entsprechen.

Legt man fest, welcher Spieler spielfrei hat, dann kann man die jeweils zusammen spielenden Teilnehmer gemäß einem geometrischen Muster festlegen:



Dem Punkt (spielfreier Teilnehmer) gegenüber liegt ein Trapez, von diesem wähle die beiden parallelen Seiten:

spielfrei	Mannschaft 1	Mannschaft 2
A	CD	BE
B	DE	AC
C	AE	BD
D	AB	CE
E	BC	AD

Dem Punkt gegenüber liegt ein Trapez, von diesem wähle die nicht parallelen Seiten:

spielfrei	Mannschaft 1	Mannschaft 2
A	BC	DE
B	CD	AE
C	DE	AB
D	AE	BC
E	AB	CD

Dem Punkt gegenüber liegt ein Trapez, von diesem wähle die Diagonalen:

spielfrei	Mannschaft 1	Mannschaft 2
A	BD	CE
B	CE	AD
C	AD	BE
D	BE	AC
E	BD	AC

http://www.springer.com/978-3-662-59059-1

Mathematik ist schön
Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren
Strick, H.K.
2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-59059-1