Lösungen und Hinweise

Übungen für Kapitel 2

Lösung zu Übung 2-10 $a_n = 2^{n-2}$ für $n \geq 2$. Induktionsanfang: $a_2 = 1 = 2^0 = 2^{2-2}$. Induktionsschritt: $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_n + a_n = 2a_n \overset{I.V.}{=} 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$

Übungen für Kapitel 4

Lösung zu Übung 4-3

(1) Durch $(a, b, c) \mapsto \{a, b, c\}$ ist eine Bijektion von M_1 auf die Menge der dreielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ gegeben, da sich jede solche Teilmenge in eindeutiger Weise geordnet, d. h. als $\{a < b < c\}$ aufschreiben lässt. Daher folgt $\#M_1 = \binom{n}{3}$.

(2) Durch $(a, b, c) \mapsto \{a, b + 1, c + 2\}$ ist eine Bijektion von M_2 auf die Menge der dreielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n + 2\}$ gegeben (Umkehrung: $\{\alpha < \beta < \gamma\} \mapsto (\alpha, \beta - 1, \gamma - 2)$). Daher folgt $\#M_2 = \binom{n+2}{3}$. Alternativ: Fallunterscheidung nach Gleichheiten: Für $a < b < c$ gibt es nach (1) $\binom{n}{3}$ Möglichkeiten, für $a < b = c$ und $a = b < c$ gibt es je $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, und für $a = b = c$ gibt es n Möglichkeiten. Also $\#M_2 = \binom{n}{3} + 2\binom{n}{2} + n$.

(3) Zu jedem Paar (A, B) mit $A \subset B \subset \{1, \ldots, n\}$ assoziieren wir ein n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \{1, 2, 3\}$ für alle i: Setze $a_i = 1$, falls $i \in A$, setze $a_i = 2$, falls $i \in B \setminus A$, und setze $a_i = 3$, falls $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus B$. Man sieht sofort, dass dies eine Bijektion $M_3 \to \{1, 2, 3\}^n$ definiert. Also folgt $\#M_3 = 3^n$. Alternativ: Fallunterscheidung nach $k = \#B$: Es gibt $\binom{n}{k}$ solche B, und für jedes davon gibt es 2^k mögliche Mengen A. Also folgt $\#M_3 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$. NB: Dies ist gleich $(2 + 1)^n = 3^n$ nach dem binomischen Lehrsatz.

Lösung zu Übung 4-4 Definiere $h : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), A \mapsto \begin{cases} A \cup \{n\} & \text{falls } n \notin A \\ A \setminus \{n\} & \text{falls } n \in A \end{cases}$. Offenbar gilt $h \circ h = \mathrm{id}$, also ist h sein eigenes Inverses, also insbesondere bijektiv. Außerdem ist offenbar $h : \mathcal{P}_g(M) = \mathcal{P}_u(M)$. Also ist h die gesuchte Bijektion.

Lösung zu Übung 4-5 Die Formel für $\sum_{m=1}^n m^2$ folgt aus $\sum_{m=1}^n \binom{m}{2} = \binom{n+1}{3}$ und $\sum_{m=1}^n \binom{m}{1} = \binom{n+1}{2}$, siehe Übung 4-2. Es ist $m^3 = 6\binom{m}{3} + 6\binom{m}{2} + \binom{m}{1}$, also folgt $\sum_{m=1}^n m^3 = 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$.

Lösung zu Übung 4-6 Multipliziert man $(1+x)^n(1+x)^m = \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots\right)\left(\binom{m}{0}+\binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \dots\right)$ aus und sortiert nach Potenzen von x, so ist der Koeffizient von x^0 gleich 1, der Koeffizient von x^1 gleich $\binom{n}{0}\binom{m}{1} + \binom{n}{1}\binom{m}{0}$, der Koeffizient von x^2 gleich $\binom{n}{0}\binom{m}{2} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{0}$, allgemein der Koeffizient von x^k gleich $\sum_{l=0}^k \binom{n}{l}\binom{m}{k-l}$. Andererseits ist der Koeffizient von x^k in $(1+x)^{n+m}$ gleich $\binom{n+m}{k}$, und die Formel folgt durch Koeffizientenvergleich.

Der Bijektionsbeweis: Wir zählen die k-elementigen Teilmengen $A \subset \{1, \dots, n+m\}$ einmal direkt, das gibt die linke Seite, und einmal so, dass wir eine Fallunterscheidung nach $l := \#(A \cap \{1, \dots, n\})$ machen. Für festes l ist A dadurch eindeutig festgelegt, dass ich l beliebige Elemente aus $\{1, \dots, n\}$ und $k-l$ beliebige Elemente aus $\{n+1, \dots, n+m\}$ wähle. Nach der Produktregel gibt es dafür $\binom{n}{l}\binom{m}{k-l}$ Möglichkeiten. Mit der Summenregel erhält man die rechte Seite für die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen A.

Übungen für Kapitel 5

Lösung zu Übung 5-3 Solange die Zahl größer als 2 ist, wird sie durch die Operation ‚Wurzel ziehen und abrunden' verkleinert. Daher wird das Ergebnis irgendwann kleiner als 4. Ist a die erste vorkommende Zahl, die kleiner als 4 ist, dann ist $a = [\sqrt{b}]$ mit $b \geq 4$, also $a \geq 2$, also $a \in \{2, 3\}$.

Lösung zu Übung 5-5 Zunächst folgt $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion mittels Übung 2-3. Dann ist auch $a \geq b > 0 \Rightarrow a^n \geq b^n$. Dann folgt $a^{1/m} > b^{1/m}$ für $m \in \mathbb{N}$, denn andernfalls wäre $a^{1/m} \leq b^{1/m}$, also mit dem ersten Teil (angewendet auf $b^{1/m}$, $a^{1/m}$ statt a, b) $a = (a^{1/m})^m \leq (b^{1/m})^m = b$. Schließlich folgt für $n, m \in \mathbb{N}$, dass $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 \Rightarrow a^{n/m} > b^{n/m}$.

Lösung zu Übung 5-8 Sie müssen alle gleich sein. Zum Beweis betrachte die kleinste vorkommende Zahl (Extremalprinzip!), nenne sie a. (Es gibt eine kleinste, da nur natürliche Zahlen vorkommen). Die Nachbarn dieser Zahl müssen alle gleich a sein, da das erste a

der Mittelwert seiner Nachbarn ist – wäre einer größer, so müsste auch einer kleiner sein, aber a ist minimal. Mit demselben Argument sind die Nachbarn der Nachbarn auch gleich a, dann deren Nachbarn usw. Es folgt, dass alle Zahlen gleich a sind.

Bemerkung: Auch wenn man positive reelle Zahlen statt natürlicher Zahlen zulässt, müssen alle gleich sein. Das ist aber schwieriger zu zeigen.

Übungen für Kapitel 7

Lösung zu Übung 7-4

(1) Für gerades n, $n = 2m$, ist $n! \geq (n+1)\cdots(2n) > m^m$, also $a_n > (m^m)^{1/2m} = \sqrt{m}$. Ähnlich folgt für $n = 2m+1$, dass $a_n > \sqrt{m}$. Also folgt $a_n \to \infty$.

(2) $p(n) = \binom{n}{k}$ ist ein Polynom in n vom Grad k. Da $\frac{n^l}{2^n} \to 0$ nach Satz 7.5.3 für jedes l, folgt durch Summieren von $k+1$ Termen $a_n \to 0$.

(3) Es ist (vgl. der Hinweis) $b_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{1}{2} = \frac{1}{n}$ (Teleskopprodukt). Wegen $2n-1 > 2n-2$ ist $1 - \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n-2}$, allgemeiner $1 - \frac{1}{2n-k} > 1 - \frac{1}{2n-k-1}$ für $k = 1, 3, 5, \ldots, 2n-3$. Damit folgt $c_n > \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-1} a_n > a_n$, also $a_n^2 < a_n c_n = b_{2n} = \frac{1}{2n}$, also $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ und damit $a_n \to 0$.

Lösung zu Übung 7-6

(1) Wegen $\frac{a_n}{c_n} = \frac{a_n}{b_n}\frac{b_n}{c_n}$ gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n} = 0 \cdot 0 = 0$.

(2) $d_n \ll e_n \ll b_n \ll a_n \ll c_n$, denn: $e_n \geq n^{1001}$ für $n > 1001^2$, also $\frac{d_n}{e_n} \leq \frac{1}{n} \to 0$. Es gibt m_0 mit $4^m > 4m^3$ für $m \geq m_0$, also $4^{m^2} > 4^m m^{3m} = ((2m)^2)^m m^m$, also mit $m = [\sqrt{n}]$: $4^n \geq 4^{m^2} > n^m m^m$, also $\frac{e_n}{b_n} \leq \frac{1}{m^m} \to 0$. Für $n \geq 5$ ist $n! \geq 4! \cdot 5^{n-4}$, also $\frac{b_n}{a_n} = \frac{4^n}{n!} \leq \frac{4^4}{4!}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} \to 0$. Es ist $n! = 1\cdots[\frac{n}{2}]\cdot([\frac{n}{2}]+1)\cdots n \leq \frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2}\cdot n\cdots n = \left(\frac{1}{2}\right)^{[n/2]} n^n$, also $\frac{a_n}{c_n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{[n/2]} \to 0$.

Lösung zu Übung 7-7 Da $\binom{2n}{n}$ der größte Summand in $4^n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ ist, gilt $\binom{2n}{n} \geq \frac{1}{2n+1}4^n$. Wie bei Übung 7-6 folgt daraus $e_n \ll f_n$. $f_n \ll b_n$ gilt nach Übung 7-4.

Lösung zu Übung 7-10 Der Ausdruck kann als $\lim_{n\to\infty} a_n$ interpretiert werden, wobei $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, … die endlichen Abschnitte sind. Diese erfüllen die Rekursion $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Um die Existenz des Grenzwerts zu zeigen und ihn zu berechnen, verfahre wie in Übung 7-9: Zeige induktiv, dass a_n monoton wächst und durch 2 nach oben beschränkt ist (Beweis: $a_n < 2 \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{2+2} = 2$, daraus folgt $a_n^2 < 2a_n = a_n + a_n < 2 + a_n$, also $a_n < \sqrt{2+a_n} = a_{n+1}$), daher existiert der Grenzwert a, und es gilt $a = \sqrt{2+a}$, also $a = 2$. Also $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2$.

Lösung zu Übung 7-11

(1) Nach der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, Satz 2.1.9, gilt $\frac{1}{2}(a+\frac{2}{a}) \geq \sqrt{a\frac{2}{a}} = \sqrt{2}$ für $a > 0$, also folgt $a_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \geq 1$. Aus $a_n^2 \geq 2$ folgt $\frac{2}{a_n} \leq a_n$, also $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n$. Daher ist (a_n) für $n \geq 1$ monoton fallend und nach unten beschränkt, hat also einen Grenzwert a. Es muss $a = \frac{1}{2}(a + \frac{2}{a})$ gelten, was sich zu $a = \pm\sqrt{2}$ auflösen lässt, also $a = \sqrt{2}$ wegen $a > 0$.

(3) Nachrechnen!

(4) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{r}{a_n})$.

Lösung zu Übung 7-13

(1) Wahr: Sei $|x_n| \leq C \;\forall n$. Zu $\varepsilon > 0$ sei n_0 derart, dass $|y_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ für $n \geq n_0$, dann ist $|x_n y_n| = |x_n|\,|y_n| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

(2) Falsch, z. B.

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}, \quad y_n = 1 - x_n\,,$$

dann ist $x_n y_n = 0 \;\forall n$, aber (x_n), (y_n) sind keine Nullfolgen.

(3) Falsch, z. B.

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Aussage ist wahr, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Lösung zu Übung 7-18 (1) Es gelte $a_n \to a$. Wir wollen $s_n \to a$ zeigen. Da wir $s_n - a$ mit $a_n - a$ in Verbindung bringen wollen, schreiben wir zunächst

$$s_n - a = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - a = \frac{a_1 + \ldots + a_n - na}{n} = \frac{(a_1 - a) + \ldots + (a_n - a)}{n}\,,$$

also wegen der Dreiecksungleichung

$$|s_n - a| = \frac{|(a_1 - a) + \ldots + (a_n - a)|}{n} \leq \frac{|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|}{n}\,.$$

Wir wollen zeigen, dass das für große n klein wird. Von den Summanden im Zähler werden aber nur die mit den größeren Indizes klein, von den ersten, z. B. $a_1 - a$ wissen wir nichts – außer, dass sie beschränkt sind. Da wir diese am Schluss durch n teilen, liefern diese zur Summe nur einen kleinen Beitrag. Wir müssen aber aufpassen, dass von diesen ‚unkontrollierten' Summanden nicht allzu viele (z. B. $n/2$) da sind. Das ergibt sich, wenn man die Dinge sorgfältig aufschreibt:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $a_n \to a$ können wir N so wählen, dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \;\text{ für alle } n \geq N\,. \qquad (*)$$

(Wir nehmen hier $\varepsilon/2$, um später etwas 'Platz' für die Abschätzung zu haben.) Da die Folge $(a_n - a)$ konvergiert, ist sie beschränkt, d. h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n - a| \le C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (**)$$

Für $n > N$ gilt dann

$$\begin{aligned}|s_n - a| &\le \frac{|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|}{n} < \frac{CN + (n-N)\varepsilon/2}{n} = \frac{CN}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} \\ &\le \frac{CN}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

wobei wir für die ersten N Summanden die Abschätzung $(**)$ und für die letzten $n - N$ Summanden die Abschätzung $(*)$ verwendet haben.

Um unser Ziel $|s_n - a| < \varepsilon$ zu erreichen, brauchen wir $\frac{CN}{n} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Dies ist äquivalent zu $n \ge \frac{2CN}{\varepsilon}$. Also:

Wähle nun eine natürliche Zahl $N' \ge \frac{2CN}{\varepsilon}$. Für $n \ge N'$ gilt dann $\frac{CN}{n} \le \frac{CN}{N'} \le \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n \ge N'$ und $n \ge N$ (d. h. für $n \ge N'' := \max\{N, N'\}$) folgt also

$$|s_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit haben wir gezeigt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N'' \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \ge N''$ gilt: $|s_n - a| < \varepsilon$. Das heißt $s_n \to a$.

(2): Sei $a_n = (-1)^n$. Diese Folge divergiert, aber die Folge (s_n) konvergiert gegen Null, denn offenbar ist

$$s_n = \begin{cases} \frac{-1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

woraus $-\frac{1}{n} \le s_n \le 0$ für alle n folgt und damit wegen $-\frac{1}{n} \to 0$ und $0 \to 0$ nach dem Sandwichlemma, dass $s_n \to 0$.

Der Cesàro-Limes der Folge $(-1)^n$ ist also 0.

Lösung zu Übung 7-19 Man beobachtet, dass $(1+\sqrt{2})^n$ mit wachsendem n immer näher an einer ganzen Zahl liegt, für gerade n von unten (d. h. für große gerade n kommen viele Neunen direkt nach dem Komma), für ungerade n von oben (dasselbe mit Nullen).

Zum Beweis berechne $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(\sqrt{2})^k + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(\sqrt{2})^k = 2\sum_{k=0, k \text{gerade}}^n \binom{n}{k}(\sqrt{2})^k$, da sich die Summanden mit ungeradem k wegheben. Für gerades k ist $(\sqrt{2})^k \in \mathbb{N}$, also folgt $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n \in \mathbb{N}$. Nun ist $1 - \sqrt{2} = -0{,}4142\ldots$, also $(1-\sqrt{2})^n \to 0$ mit abwechselnden Vorzeichen. Das erklärt die Beobachtung. Genauer folgt mit $|(1-\sqrt{2})^n| < 2^{-n} < 10^{-3n/10}$ (wegen $|1-\sqrt{2}| < 2^{-1}$ und $2^{10} > 10^3$), dass die Anzahl der Nullen bzw. Neunen nach dem Komma etwa wie $3n/10$ wächst.

Übungen für Kapitel 8

Lösung zu Übung 8-8

„⇒“: Sei $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. Definiere x_n, z_n wie in Hinweis (4) zu Übung 8-7. Dann hat jedes x_n die Form $\frac{p_n}{q}$ mit $p_n \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ (Beweis mit Induktion: Dies ist wahr für $x_0 = x$, und $x_{n+1} = \{bx_n\}$ liegt in $[0,1)$ und $x_{n+1} = bx_n - z_{n+1} = \frac{bp_n - qz_{n+1}}{q}$). Also gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für p_n, also gibt es n_0 und $k \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} = x_{n_0+k}$. Dann folgt $x_{n_0+1} = x_{n_0+k+1}, x_{n_0+2} = x_{n_0+k+2}, \ldots$

„⇐“: Sei $x = (0, z_1 z_2 \ldots)_b$. Gilt $z_{n+k} = z_n$ für alle $n > n_0$, so ist $x = (0, z_1 \ldots z_{n_0} z_{n_0+1} \ldots z_{n_0+k} z_{n_0+1} \ldots z_{n_0+k} \ldots)_b = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{z_n}{b^n} + \left(\frac{z_{n_0+1}}{b} + \cdots + \frac{z_{n_0+k}}{b^k}\right)\left(\frac{1}{b^{n_0}} + \frac{1}{b^{2n_0}} + \frac{1}{b^{3n_0}} + \ldots\right)$. Die letzte Klammer ist eine geometrische Reihe mit Quotient b^{-n_0}, also gleich $\frac{b^{-n_0}}{1-b^{-n_0}}$ und daher rational. Damit ist x eine endliche Summe rationaler Zahlen, also rational.

Lösung zu Übung 8-11

(1) Die rechte Seite ist $A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_n(b_n - b_{n+1}) + A_n b_{n+1} = A_1 b_1 - A_1 b_2 + A_2 b_2 - \cdots + A_n b_n = A_1 b_1 + (A_2 - A_1) b_2 + (A_3 - A_2) b_3 + \cdots + (A_n - A_{n-1}) b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

(2) Sei $|A_n| \leq C$ für alle n. Wir zeigen, dass die rechte Seite in (1) für $n \to \infty$ konvergiert. Aus $b_n \to 0$ folgt $A_n b_{n+1} \to 0$. Der Term $\sum_{k=1}^n A_k(b_k - b_{k+1})$ ist die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^\infty A_k(b_k - b_{k+1})$, daher müssen wir die Konvergenz dieser Reihe zeigen. Dafür zeigen wir ihre absolute Konvergenz, also die Konvergenz von $\sum_{k=1}^\infty |A_k(b_k - b_{k+1})|$: Aus $b_k \geq b_{k+1}$ folgt $|A_k(b_k - b_{k+1})| = |A_k|(b_k - b_{k+1}) \leq C(b_k - b_{k+1})$ und damit $\sum_{k=1}^n C(b_k - b_{k+1}) = C(b_1 - b_{n+1}) \to Cb_1$ für $n \to \infty$. Wende nun das Majorantenkriterium an.

(3) Für $a_k = (-1)^{k-1}$ ist jedes A_n gleich 1 oder 0, also ist (2) direkt anwendbar.

Lösung zu Übung 8-12 Für jedes $n > 1$ ist $\sum_{m=2}^\infty n^{-m} = n^{-2}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, also $\sum_{n,m=2}^\infty n^{-m} = \sum_{n=2}^\infty \sum_{m=2}^\infty n^{-m} = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1$ (Teleskopreihe).

Übungen für Kapitel 9

Lösung zu Übung 9-5 Entwickelt man mit der binomischen Formel $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k 5^{k/2}$, dann kürzen sich in $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ die Terme mit geradem k weg, und für $k = 2m+1$ ist $5^k = \sqrt{5} \cdot 5^m$. Es folgt $a_n = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{2m+1} 5^m = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n+1}{1} + 5\binom{n+1}{3} + 5^2\binom{n+1}{5} + \ldots\right)$.

Dies ist zwar nicht so schön „geschlossen“ wie die Binet-Formel, aber immerhin offensichtlich rational. Da wir wissen, dass die Fibonacci-Zahlen ganzzahlig sind, folgt aus der Formel eine nicht offensichtliche Teilbarkeitseigenschaft für die Kombination der Binomialkoeffizienten in der Klammer.

Lösung zu Übung 9-6 Ist f gerade, so ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n = f(-x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle x mit $|x| < R$, also folgt durch Koeffizientenvergleich $(-1)^n a_n = a_n$ für alle n, also $-a_n = a_n$ und damit $a_n = 0$ für ungerade n. Die Umkehrung ist offensichtlich.

Lösung zu Übung 9-7 O. B. d. A. sei $a_0 = 1$ (sonst invertiere zunächst $\frac{1}{a_0}(a_0 + a_1 x + \dots)$ und teile dann das Ergebnis durch a_0). Dann ist $b_0 = 1$, $b_1 = -a_1$ und $b_n = -a_n - a_{n-1}b_1 - \dots - a_1 b_{n-1}$ für $n \geq 2$. Nach Übung 9-2 gibt es $C > 0$ mit $|a_n| \leq C^n$ für alle $n \geq 1$. Behauptung: Dann gilt $|b_n| \leq (2C)^n$ für alle $n \geq 1$. Wiederum nach Übung 9-2 folgt daraus das Gewünschte. Beweis mit Induktion: Für $n = 1$ ist $|b_1| = |a_1| = C < 2C$; gilt die Ungleichung für $1, \dots, n-1$, so folgt $|b_n| \leq |a_n| + |a_{n-1}|\,|b_1| + \dots + |a_1|\,|b_{n-1}| \leq C^n + C^{n-1}2C + \dots + C2^{n-1}C^{n-1} = (1 + 2 + \dots + 2^{n-1})C^n = (2^n - 1)C^n < 2^n C^n$, was zu zeigen war.

Die letzte Behauptung folgt direkt aus Satz 8.4.2 über das Cauchy-Produkt.

Lösung zu Übung 9-9 Wegen $a_0 = 0$ lautet die Rekursion $a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1}a_1$, und man erhält $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, $a_5 = 14$. Die Rekursion erinnert an das Cauchy-Produkt. Daher rechnen wir $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = f(x) - x$, also $f(x)^2 - f(x) + x = 0$ und damit $f(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x}$ oder $f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x}$. Wegen $f(0) = a_0 = 0$ folgt $f(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x}$.

Übungen für Kapitel 10

Lösung zu Übung 10-4 Die Aussage $x^b \ll a^x$ verallgemeinert Satz 7.5.3(1) auf reelle Exponenten. Hier ist ein alternativer Beweis: Für $x > 0$ ist $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^m}{m!}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Wählt man $m > b$, folgt $x^b \ll x^m < m!e^x$, also $x^b \ll e^x$. Ersetzt man x durch $x \log a$, folgt $x^b(\log a)^b = (x\log a)^b \ll e^{x\log a} = a^x$, also $x^b \ll a^x$.

Schließlich ist $x \to \infty$ äquivalent zu $y = e^x \to \infty$, also $\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(e^b)^x} = 0$ nach dem vorher Bewiesenen wegen $e^b > 1$.

Übungen für Kapitel 11

Lösung zu Übung 11-8 Es ist zu zeigen: Sind (x_n) und (x'_n) zwei Folgen mit Grenzwert x_0, so gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Dazu betrachte die Folge (x''_n), deren Glieder

der Reihe nach $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots$ sind. Diese konvergiert ebenfalls gegen x_0, daher besitzt die Folge $(f(x_n''))$ nach Voraussetzung einen Grenzwert. Damit müssen ihre beiden Teilfolgen $(f(x_n))$ und $(f(x_n'))$ denselben Grenzwert haben.

Lösung zu Übung 11-9 Sei o. B. d. A. f monoton wachsend. Es ist zu zeigen: Ist $x_0 \in I$ nicht rechter Randpunkt von I, so existiert $\lim_{x\to x_0+} f(x)$. Die Aussage für $f(x_0-)$ folgt durch Spiegelung.

Sei $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$. Für große n ist $x_n \in I$, und die Folge $(f(x_n))$ ist monoton fallend, daher existiert $A = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Sei zunächst $A \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle n_0, so dass $f(x_{n_0}) < A + \varepsilon$. Setze $\delta = \frac{1}{n_0}$. Für $x \in (x_0, x_0+\delta) = (x_0, x_{n_0})$ ist dann $f(x) \le f(x_0) < A+\varepsilon$ wegen der Monotonie. Außerdem ist $f(x) \ge A$, da ein n mit $x > x_0 + \frac{1}{n} = x_n$ existiert, also $f(x) \ge f(x_n) \ge A$ gilt. Insgesamt also $A < f(x) < A + \varepsilon$ für $x_0 < x < x_0 + \delta$, was zu zeigen war.

Der Beweis für $A = -\infty$ verläuft ähnlich.

Lösung zu Übung 11-10 Sei $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann existiert eine Folge (x_n) irrationaler Zahlen mit $x_n \to x_0$ (wähle z. B. $x_n = x_0 - \frac{\sqrt{2}}{n}$). Wegen $f(x_n) = 0\ \forall n$ und $f(x_0) \neq 0$ ist $f(x_n) \not\to f(x_0)$, also ist f unstetig in x_0.

Sei $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei M die Menge der rationalen Zahlen, deren Nenner kleiner oder gleich $\frac{1}{\varepsilon}$ ist und die kleiner als $|x_0| + 1$ sind. Dann ist M endlich, hat also keinen Häufungspunkt. Da x irrational ist, gilt $x_0 \notin M$, also gibt es $\delta > 0$ mit $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap M = \varnothing$ und $\delta < 1$. Nach Definition von M hat also jede rationale Zahl $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ einen Nenner $q > \frac{1}{\varepsilon}$ (wenn $x = \frac{p}{q}$ gekürzt), also gilt $f(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon$. Weiterhin ist $f(x) = 0$ für alle irrationalen x, insbesondere für x_0. Damit gilt $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Also ist f stetig in x_0.

Lösung zu Übung 11-12 Sei $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$. Es ist $\lim_{x\to n-} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to n+} f(x) = \infty$ für $n = 0, 1, 2, 3$, da dies jeweils für genau einen Summanden gilt und die anderen nahe n beschränkt sind. Nach dem Zwischenwertsatz hat also f in jedem Intervall $(n, n+1)$ mit $n = 0, 1, 2$ mindestens eine Nullstelle. Es hat auf jedem dieser Intervalle genau eine Nullstelle, da dort jeder der Summanden streng monoton wächst, also auch f. Weitere Nullstellen gibt es nicht, da f für $x < 0$ negativ und für $x > 0$ positiv ist.

Lösung zu Übung 11-13 Sei $C = f(0)$. Wähle C' so, dass $f(x) > C$ für $|x| > C'$. Nach dem Satz vom Minimum hat f auf $[-C', C']$ ein Minimum $x_{\min}$, also $f(x_{\min}) \le f(x)$ für alle $x \in [-C', C']$. Insbesondere ist $f(x_{\min}) \le f(0) = C$. Damit ist auch $f(x_{\min}) \le C < f(x)$ für alle $x \notin [-C', C']$, also ist $x_{\min}$ ein Minimum von f auf ganz $\mathbb{R}$.

Lösung zu Übung 11-14 Wegen $f(x) \to c \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$ gibt es ein N, so dass $|f(x) - c| < 1$ und daher $|f(x)| < |c| + 1$ für alle $x > N$ gilt. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum ist f auf dem Intervall $[0, N]$ beschränkt, $|f(x)| \le C$ für $x \in [0, N]$. Insgesamt folgt $|f(x)| \le \max\{|c| + 1, C\}$ für alle $x \in [0, \infty)$.

f muss kein Maximum oder Minimum haben. Ein Beispiel ohne Maximum ist $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Ein Beispiel, das weder Maximum noch Minimum hat, ist $\frac{x}{x+1} \sin x$.

Ohne die Voraussetzung der Stetigkeit gilt die Behauptung nicht. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$, $f(0) = 0$.

Lösung zu Übung 11-15 Sei $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$ für $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Es ist zu zeigen, dass g eine Nullstelle hat. Wegen $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = -g(0)$ haben $g(\frac{1}{2})$ und $g(0)$ unterschiedliches Vorzeichen, oder sind Null. Im letzteren Fall sind wir sofort fertig, sonst folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

Die allgemeine Aussage gilt genau dann, wenn $h = \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Lösung zu Übung 11-19 Im Folgenden sei immer $0 \le x < 1$. Partielle Summation, s. Übung 8-11, ergibt

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = s_N x^{N+1} + \sum_{n=0}^{N} s_n (x^n - x^{n+1}) = s_N x^{N+1} + (1 - x) \sum_{n=0}^{N} s_n x^n$$

mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Die Folge (s_N) ist beschränkt, da $\lim_{N\to\infty} s_N$ existiert, also folgt, dass $s_N x^{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ und daher

$$f(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \,.$$

Schreibe $s = \lim_{N\to\infty} s_N$, also $s = f(1)$. Mit $s = (1 - x)\frac{s}{1-x} = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s x^n$ folgt

$$f(x) - s = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \,.$$

Wir teilen dies auf als

$$f(x) - s = A_N(x) + B_N(x),\ A_N(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{N} (s_n - s) x^n \,,\ \ B_N(x)$$
$$= (1 - x) \sum_{n=N+1}^{\infty} (s_n - s) x^n$$

wobei N noch gewählt wird. Für festes N ist $A_N(x) \to 0$ für $x \to 1$. Außerdem

$$|B_N(x)| \le (1 - x) \sum_{n=N+1}^{\infty} |s_n - s| x^n \le \left(\sup_{n>N} |s_n - s| \right) (1 - x) \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \left(\sup_{n>N} |s_n - s| \right),$$

da die letzte Summe gleich $x^{N+1}(1 - x)^{-1}$ ist.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle N, so dass $\left(\sup_{n>N} |s_n - s|\right) < \varepsilon$. Dann wähle $\delta > 0$, so dass $|A_N(x)| < \varepsilon$ für $x > 1 - \delta$. Dann folgt für dieses N und diese x

$$|f(x) - s| \leq |A_N(x)| + |B_N(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

was zu zeigen war.

Übungen für Kapitel 12

Lösung zu Übung 12-2

(1) Induktion: Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Gilt die Gleichung für n, so ist $(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n-i+1)}\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ $f^{(i)} g^{(n-i+1)}$. Mit $j = i + 1$ ist die erste Summe gleich $\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)}$. Wegen $\binom{n}{-1} = 0$ kann diese Summe auch ab $j = 0$ laufen, und wegen $\binom{n}{n+1} = 0$ kann die zweite Summe $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)}$ bis $n+1$ laufen. Mit $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ folgt $(fg)^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)}$, was zu zeigen war.

(2) $x^2 e^x + 2 \cdot 2014\, x e^x + 2 \cdot \binom{2014}{2} e^x$.

(3) Wende die Produktregel auf $f(x) = e^{ax}$, $g(x) = e^{bx}$ an und setze danach $x = 0$.

Lösung zu Übung 12-3 Für festes $y \geq 0$ setze $g(x) := (x + y)^a - x^a - y^a$. Es gilt $g(0) = 0$ und $g'(x) = a\left((x + y)^{a-1} - x^{a-1}\right) \leq 0$ wegen $a - 1 \leq 0$ und $x + y \geq x$. Also ist g monoton fallend auf $[0, \infty)$, daher gilt $g(x) \leq 0$ für alle x und damit die Ungleichung.
Für $a = \frac{1}{2}$ folgt die Ungleichung auch aus $x + y \leq (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2$ durch Ziehen der Wurzel.
Die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x) = x^a$ folgt dann aus $f(x+y) - f(x) \leq y^a$ (wesentlich für die Gleichmäßigkeit: die rechte Seite ist unabhängig von x) und $\lim_{y\to 0} y^a = 0$.

Lösung zu Übung 12-4

(1) Das ist $f'(0)$ für $f(x) = a^x$ (nach Definition der Ableitung). Mit $f'(x) = a^x \log a$ folgt $f'(0) = \log a$. Alternativ mit l'Hospital[2].

(2) Mit $h = \frac{1}{x}$ ist $\log(1 + \frac{1}{x})^x = x \log(1 + \frac{1}{x}) = \frac{\log(1+h)}{h} = \frac{\log(1+h) - \log 1}{h}$. Für $x \to \infty$ ist $h \to 0$, und der letzte Quotient ist per Definition die Ableitung von $\log z$ bei $z = 1$, also gleich $\frac{1}{z}$ bei $z = 1$, also gleich $\frac{1}{1} = 1$. Damit folgt $\lim_{x\to\infty} \log(1 + \frac{1}{x})^x = 1$, also $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e^1 = e$ wegen Stetigkeit der Exponentialfunktion.

(3) Die Binomialreihe liefert $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$, wobei $O(x^3)$ für eine Funktion der Form $x^3 h(x)$ (mit h stetig bei $x = 0$) steht, also $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2} =$

[2] Das ist aber overkill, da l'Hospital mit der Definition der Ableitung bewiesen wurde. Man sollte immer den konzeptuell direktesten Weg kennen.

$\frac{(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+O(x^3))+(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+O(x^3))-2}{x^2} = -\frac{1}{4} + \frac{O(x^3)}{x^2} \to -\frac{1}{4}$ für $x \to 0$. Alternativ könnte man l'Hospital zweimal anwenden.

Lösung zu Übung 12-5 Sei $a \neq -\infty$, der Fall $a = -\infty$ lässt sich mit der Substitution $y = \frac{1}{x}$ auf den Fall $b = 0$ (und Grenzwert bei b) zurückführen. Schreibe $L = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < L$, $\varepsilon < 1$. Wähle $\delta > 0$ derart, dass $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| < \varepsilon$ für $a < \xi < a + \delta$. Setze $y = a + \delta$ und wähle $\delta' \in (0, \delta)$ derart, dass für $a < x < a + \delta'$ gilt, dass $\left|\frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)} - 1\right| < \varepsilon$. Dies geht wegen $f(x), g(x) \to \infty$ für $x \to a$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (x, y)$ mit $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wegen $a < \xi < y = a + \delta$ ist $L - \varepsilon < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < L + \varepsilon$. Daraus und aus $1 - \varepsilon < \frac{1-g(y)/g(x)}{1-f(y)/f(x)} < 1 + \varepsilon$ folgt nun $(L - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (L + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$, also $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < (L + 1)\varepsilon + \varepsilon^2 < (2L + 1)\varepsilon$, für alle x mit $a < x < a + \delta'$. Da ε beliebig war, folgt $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Lösung zu Übung 12-6 Für $g(x) = \log f(x) = x \log x$ ist $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ nach Übung 10-4, also $\lim_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1$. Es ist $f'(x) = (e^{g(x)})' = g'(x)e^{g(x)} = (1+\log x)x^x$, einziger stationärer Punkt ist daher $x = e^{-1}$, und f ist monoton fallend auf $(0, e^{-1})$ und steigend auf (e^{-1}, ∞). Das Verhalten von f nahe Null lässt sich am besten mittels der Taylorentwicklung $e^s = 1 + s + s^2 h(s)$ mit $h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{(n+2)!}$ stetig bei Null analysieren. Es folgt $f(x) - 1 = x \log x + x^2(\log x)^2 h(x \log x)$, insbesondere ist die durch $\tilde{f}(0) = 1$ stetig fortgesetzte Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar, da $\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{f(x)-1}{x} = \log x + x(\log x)^2 h(x \log x) \to -\infty$ für $x \to 0$ gilt.

Lösung zu Übung 12-10 Wir schreiben $\binom{a}{n} = \frac{a}{1}\frac{a-1}{2}\dots\frac{a-n+1}{n} = (-1)^n(1 - \frac{a+1}{1})(1 - \frac{a+1}{2})\dots(1 - \frac{a+1}{n})$. Mit der Ungleichung $\log x \le x - 1$ können wir die Frage, ob das Produkt für $n \to \infty$ gegen Null geht, in eine Frage über eine Summe verwandeln: Für $k > a + 1$ folgt $\log(1 - \frac{a+1}{k}) \le -\frac{a+1}{k}$, daher wählen wir ein $k_0 > a + 1$ und spalten das Produkt für $n \ge k_0$ als $\binom{a}{n} = (-1)^n(1 - \frac{a+1}{1})(1 - \frac{a+1}{2})\cdots(1 - \frac{a+1}{k_0-1})\, T_n$ mit $T_n = (1 - \frac{a+1}{k_0})(1 - \frac{a+1}{k_0+1})\cdots(1 - \frac{a+1}{n})$. Es folgt $\log T_n \le -(a+1)(\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_0+1} + \cdots + \frac{1}{n})$. Da die harmonische Reihe divergiert und $a + 1 < 0$ ist, gilt $\log T_n \to -\infty$, also $T_n \to 0$ für $n \to \infty$ und damit auch $\binom{a}{n} \to 0$.

Eine andere Lösung ist mittels der Idee zu Übung 7-4(3) möglich.

Lösung zu Übung 12-11 Man zeigt zunächst mit Induktion, dass $f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$ für $x > 0$ und Polynome $p_0, p_1, p_2, \dots$ gilt. Man beweise und verwende dann $\lim_{x \to 0+} x^{-n} e^{-1/x} = 0$ für alle n.

Lösung zu Übung 12-12 $g(x) = f(x)f(1-x)$, wobei f die Funktion aus Übung 12-11 ist. Da auch die Nullfunktion für $x \ge 1$ gleich Null ist, ist g durch seine Werte in $x \ge 1$ nicht eindeutig festgelegt.

Lösung zu Übung 12-14 Für $g(x) = e^{-x} f(x)$ gilt $g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \leq 0$ für alle x. Also ist g monoton fallend, d. h. $g(x) \leq g(0) = 0$ für alle x. Wegen $f(x) \geq 0$ ist aber $g(x) \geq 0$, also folgt $g(x) = 0$ und damit $f(x) = 0$ für alle x.

Lösung zu Übung 12-15 Schreibe (vgl. der Hinweis) $t_n(x, x_0) = (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x_0^{n-1}) - nx_0^{n-1} = (x^{n-1} - x_0^{n-1}) + (x^{n-2} - x_0^{n-2})x_0 + \cdots + (x - x_0)x_0^{n-2}$ und wende $x^k - x_0^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \cdots + x_0^{k-1})$ für $k = 1, \ldots, n-1$ an. Fasst man zusammen, folgt $t_n(x, x_0) = (x - x_0)s_n(x, x_0)$ mit $s_n(x, x_0) = x^{n-2} + 2x^{n-3}x_0 + \cdots + (n-1)x_0^{n-2}$. Für $|x|, |x_0| \leq r$ ist $|s_n(x, x_0)| \leq \binom{n}{2} r^{n-2}$. Da die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} |a_n| r^{n-2}$ für alle $r < R$ konvergiert (selber Beweis wie für $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_0^{n-1}$), folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ und C existiert, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n(x, x_0)| \leq C$ für alle x mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt (wähle z. B. $\varepsilon = (R - |x_0|)/2$, denn dann ist $|x| < r := (R + |x_0|)/2 < R$ für alle diese x). Damit folgt $|D(x, x_0)| \leq C|x - x_0|$ für alle x mit $|x - x_0| < \varepsilon$, also $\lim_{x \to x_0} D(x, x_0) = 0$.

Lösung zu Übung 12-16

(1) Die Tangentengleichung ist $y - f(\overline{x}) = f'(\overline{x})(x - \overline{x})$. Für $y = 0$ folgt $\overline{x}' = x = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$. Da f strikt monoton wächst, folgt aus $\overline{x} \geq \xi$ und $f(\xi) = 0$, dass $f(\overline{x}) \geq 0$, also $\overline{x}' \leq \overline{x}$. Nach Taylor (oder Mittelwertsatz) ist $f(\overline{x}) = f(\xi) + (\overline{x} - \xi)f'(\eta) = (\overline{x} - \xi)f'(\eta)$ für ein $\eta \in [\xi, \overline{x}]$. Da f konvex ist, gilt $f'(\eta) \leq f'(\overline{x})$, also folgt $f(\overline{x}) \leq (\overline{x} - \xi)f'(\overline{x})$ und damit $\overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})} \geq \xi$, insgesamt also $\overline{x}' \in [\xi, \overline{x}]$.

Für $f(x) = x^2 - r$ ist $\overline{x}' = \overline{x} - \frac{\overline{x}^2 - r}{2\overline{x}} = \frac{1}{2}\left(\overline{x} + \frac{r}{\overline{x}}\right)$, vgl. das Heron-Verfahren in Übung 7-11.

(2) Aus (1) (mit $\overline{x} = x_n$, $\overline{x}' = x_{n+1}$) folgt induktiv $\xi \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle n. Also ist (x_n) monoton fallend und nach unten beschränkt, hat also einen Grenzwert ξ'. Aus $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ folgt für $n \to \infty$ wegen der Stetigkeit von f und f', dass $\xi' = \xi' - \frac{f(\xi')}{f'(\xi')}$, also $f(\xi') = 0$. Da f strikt monoton ist, hat f genau eine Nullstelle, also folgt $\xi' = \xi$.

(3) Da die Formel für x_{n+1} die Werte von f und f' bei x_n enthält, schreiben wir die Taylorformel um den Punkt x_n hin, ausgewertet bei ξ (da wir dort den Funktionswert kennen): $0 = f(\xi) = f(x_n) + (\xi - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(\eta)$ für ein $\eta \in [\xi, x_n]$, also $f(x_n) = (x_n - \xi)f'(x_n) - \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(\eta)$. Daraus folgt

$$x_{n+1} - \xi = x_n - \xi - \frac{(x_n - \xi)f'(x_n) - \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 f''(\eta)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}(\xi - x_n)^2 \frac{f''(\eta)}{f'(x_n)}.$$

Da $f'(a) = m$ und f' monoton wächst, ist $f'(x_n) \geq m$. Mit $0 \leq f''(\eta) \leq M$ folgt die Behauptung.

Lösung zu Übung 12-17 Sei o. B. d. A. $f'(a) < \gamma < f'(b)$. Wir betrachten zunächst den Fall $\gamma = 0$. Nach dem Satz vom Maximum und Minimum nimmt f in einem Punkt $\xi \in [a, b]$ sein Minimum an. Wegen $f'(a) < 0$ ist a kein Minimum für f, also $\xi \neq a$ und analog ist wegen $f'(b) > 0$ auch $\xi \neq b$. Also ist ξ ein innerer Punkt, also gilt $f'(\xi) = 0$, was zu zeigen war.

Ist γ beliebig, so definiere $g(x) = f(x) - \gamma x$ und wende den ersten Teil auf g an.

Übungen für Kapitel 13

Lösung zu Übung 13-3 Der Konvergenzradius ist jeweils 1, und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ divergiert für $z = 1$, konvergiert aber für alle z mit $|z| = 1$, $z \neq 1$. Diese Konvergenz folgt aus dem Dirichletkriterium (Übung 8-11) – das analog für komplexe Zahlen gilt (gleicher Beweis) –, da die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gleich $\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ und daher durch $\frac{2}{|1-z|}$ beschränkt sind.

Wegen $z^4 = 1 \Leftrightarrow z \in \{\pm 1, \pm i\}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n}$ genau für alle z mit $|z| \leq 1$, $z \notin \{\pm 1, \pm i\}$.

Die letzte Behauptung folgt aus $\sin nx = \operatorname{Im} z^n$ für $z = e^{ix}$ und der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ für $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Lösung zu Übung 13-4 Wir nehmen als Ecken $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ mit $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $P = 1$. Zu bestimmen ist $a = |1-\omega| \cdot |1-\omega^2| \cdots |1-\omega^{n-1}| = |p(1)|$ mit $p(t) = (t-\omega)(t-\omega^2)\cdots(t-\omega^{n-1})$. Das Polynom $p(t)$ hat Grad $n-1$, die Nullstellen $\omega, \ldots, \omega^{n-1}$ und Leitkoeffizienten 1. Andererseits hat das Polynom $t^n - 1$ die Nullstellen $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$, also hat $q(t) = \frac{t^n-1}{t-1} = 1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1}$ den Grad $n-1$, die Nullstellen $\omega, \ldots, \omega^{n-1}$ und Leitkoeffizienten 1. Daher muss $p(t) = q(t)$ für alle t sein, also $a = |p(1)| = |q(1)| = |n| = n$. Das Produkt der Längen ist also n.

Lösung zu Übung 13-5 Die Folge (a_n) ist periodisch mit Periode 8, d. h. $a_{n+8} = a_n$ für alle n, für beliebige Anfangswerte. Dies lässt sich zum Beispiel so erklären: Mit der Methode der erzeugenden Funktionen (Abschn. 9.2) sieht man, dass $a_n = Az_1^n + Bz_2^n$ für gewisse $A, B \in \mathbb{C}$, wobei z_1, z_2 die Lösungen der Gleichung $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$, also $z_{1,2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$ sind. Die Periodizität folgt nun aus $z_1^8 = z_2^8 = 1$.

Übungen für Kapitel 14

Lösung zu Übung 14-5 Setze $z = e^{ix}$, dann ist $\cos nx = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$, insbesondere $q = \cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Wegen $(z + z^{-1})^3 = z^3 + 3z + 3z^{-1} + z^{-3} = (z^3 + z^{-3}) + 3(z + z^{-1})$ ist $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$, also $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, also $T_3(q) = 4q^3 - 3q$. Ähnlich leitet man $T_4(q) = 8q^4 - 8q^2 + 1$ her. Offenbar ist $T_0(q) = 1$, $T_1(q) = q$.

Um eine Rekursion zu finden, versuchen wir, $z^{n+1} + z^{-n-1}$ mit $z^n + z^{-n}$ und $z + z^{-1}$ in Verbindung zu bringen. Es ist $(z^n + z^{-n})(z + z^{-1}) = z^{n+1} + z^{n-1} + z^{-n+1} + z^{-n-1} =$

$(z^{n+1}+z^{-(n+1)})+(z^{n-1}+z^{-(n-1)})$, also folgt $2qT_n(q)=T_{n+1}(q)+T_{n-1}(q)$ oder $T_{n+1}(q)=2qT_n(q)-T_{n-1}(q)$. Daraus folgt induktiv dass $T_n(q)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Lösung zu Übung 14-6 Die Folge (a_n) ist beschränkt, aber nicht periodisch. Beweis:

1) Mit der Methode der erzeugenden Funktionen (Abschn. 9.2) sieht man, dass $a_n = Az_1^n + Bz_2^n$ für gewisse $A, B \in \mathbb{C}$, wobei z_1, z_2 die Lösungen der Gleichung $z^2 - \frac{1}{2}z + 1 = 0$ sind, also $z_{1,2} = \frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$. Es ist $|z_1| = 1, |z_2| = 1$, also ist (a_n) beschränkt (durch $|A| + |B|$). Genauer berechnet man $A = -B = -\frac{2}{\sqrt{15}}i$, also $a_n = -\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{Re}(iz_1^n)$ und damit $|a_n| \le \frac{4}{\sqrt{15}}$ für alle n.

2) Berechnet man $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$, $a_4 = -\frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8}$, beobachtet man, dass anscheinend $a_n = \frac{u_n}{2^{n-1}}$ für eine ungerade Zahl u_n gilt, für alle $n \ge 1$. Dies lässt sich leicht mit Induktion beweisen: Es gilt für $n = 1, 2$ und gilt es für a_{n-2} und a_{n-1} (mit $n \ge 3$), so folgt $a_n = \frac{1}{2}\frac{u_{n-1}}{2^{n-2}} - \frac{u_{n-2}}{2^{n-3}} = \frac{u_{n-1}-4u_{n-2}}{2^{n-1}}$. Daraus folgt die Behauptung, da mit u_{n-1} auch $u_n := u_{n-1} - 4u_{n-2}$ ungerade ist.

Schließlich folgt aus $a_n = \frac{u_n}{2^{n-1}}$ mit u_n ungerade, dass für $n < m$ immer $a_n \neq a_m$ ist. Also ist (a_n) nicht periodisch.

Die Nicht-Periodizität ist eng verwandt mit der Aussage:

$$\text{Der Winkel } \varphi := \arccos\frac{1}{4} \text{ ist kein rationales Vielfaches von } \pi. \qquad (*)$$

Beweis von $(*)$: Wäre $\varphi = \frac{k}{l}\pi$ mit $k, l \in \mathbb{N}$, so folgte aus $\cos\varphi = \frac{1}{4}$, $\cos 2l\varphi = \cos 2k\pi = 1$, dass $T_{2l}(\frac{1}{4}) = 1$, wobei T_{2l} das Tschebyscheff-Polynom ist (vgl. Übung 14-5). Aus der dort bewiesenen Rekursion $T_{n+1}(q) = 2qT_n(q) - T_{n-1}(q)$, $T_0(q) = 1$, $T_1(q) = q$ folgt aber für $c_n := T_n(\frac{1}{4})$, dass $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n - c_{n-1}$, $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{4}$. Wie für die a_n zeigt man induktiv, dass $c_n = \frac{\text{ungerade}}{2^{n+1}}$ für alle $n \ge 1$, woraus $c_n \neq 1$ folgt, insbesondere $T_{2l}(\frac{1}{4}) \neq 1$. Damit ist $(*)$ bewiesen.

Beziehung von $(*)$ zur Folge (a_n): Es ist $a_n = -\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{Re}(iz_1^n)$ und $z_1 = e^{i\varphi}$. Wegen $(*)$ sind die Zahlen $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots$ alle verschieden modulo 2π, d. h. die Punkte $e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{N}$ auf dem Einheitskreis sind alle verschieden. Also sind die Punkte iz_1^n alle verschieden. Wären nun die a_n periodisch, also etwa $a_{n+N} = a_n$ für alle n und ein festes N, so müssten unter iz_1^n, iz_1^{n+N}, iz_1^{n+2N} zwei gleiche vorkommen (denn es gibt höchstens zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit demselben Realteil). Damit folgt aus $(*)$, dass die a_n nicht periodisch sind.

Lösung zu Übung 14-8 Leitet man beide Seiten ab (Rechtfertigung s. unten), folgt $-\frac{1}{\sin^2 x} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n\pi)^2}$. Addiert man $\frac{1}{x^2}$, folgt $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(x-n\pi)^2}$. Nun ist $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{(1-\frac{x^2}{6}+\dots)^2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(1 - (1 + \frac{x^2}{3} + \dots)\right) = -\frac{1}{3} + \dots$, wobei die binomische Reihe $(1+t)^{-2} = 1 - 2t + \dots$ verwendet wurde und Punkte für höhere Potenzen stehen. Im Grenzwert $x \to 0$ folgt also $-\frac{1}{3} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}$ und daraus die Behauptung.

Man muss noch das gliedweise Ableiten der Reihe rechtfertigen. Wir verwenden Satz 12.2.5. Die Reihe ist als $\cot x = \frac{1}{x} + \lim_{N\to\infty} f_N(x)$ mit $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right)$ zu verstehen. Wegen $f_N(0) = 0\,\forall N$ existiert $\lim_{N\to\infty} f_N(0)$, und es ist $f_N'(x) = -\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2}\right)$. Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, der Abschätzung $|x - n\pi|, |x+n\pi| \geq \frac{n\pi}{2}$ für $|x| \leq \frac{n\pi}{2}$ (also alle großen n) und dem Weierstraßkriterium folgt die Konvergenz von $f_N'(x)$, gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, daher folgt die Behauptung.

Übungen für Kapitel 15

Lösung zu Übung 15-1

(1) Die gesuchte Fläche ist die disjunkte (bis auf Ränder) Vereinigung der Rechtecke $[q^{k+1}, q^k] \times [0, q^{ks}]$, der Flächeninhalt ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty}(q^k - q^{k+1})q^{sk} = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{(1+s)k} = (1-q)\frac{1}{1-q^{1+s}}$$

(geometrische Reihe mit Quotient q^{1+s}).

(2) Die Treppenstufen von f_q werden für $q \to 1$ immer schmaler. Anschaulich ist klar, dass $f_q \to f$ für $q \to 1$ gleichmäßig konvergiert, und mit Satz 15.2.8 folgt

$$\int_0^1 x^s\,dx = \lim_{q\to 1}\frac{1-q}{1-q^{1+s}} = \lim_{q\to 1}\frac{1}{1+q+q^2+\ldots q^s} = \frac{1}{s+1}.$$

(3) Zu (1): Setze

$$f_{q,n}(x) = \begin{cases} f_q(x) & \text{für } x \geq q^n \\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann ist

$$f_q(x) - f_{q,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq q^n \\ f_q(x) & \text{sonst.}\end{cases},$$

und da f_q monoton wächst, ist $0 \leq f_q(x) - f_{q,n}(x) \leq f_q(q^n) = q^{s(n-1)}$ für alle x, also $\sup_x |f_q(x) - f_{q,n}(x)| = q^{s(n-1)}$. Wegen $q < 1$ konvergiert dies für $n \to \infty$ gegen Null, also konvergiert $f_{q,n} \xrightarrow{n\to\infty} f_q$ gleichmäßig. Damit ist $\int_0^1 f_q = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_{q,n}$, das ist der Grenzwert der Partialsummen der in (1) angegebenen Reihe, also der Wert der Reihe.

Zu (2): Der Beweis von Lemma 15.2.6 verwendet an keiner Stelle, dass die Anzahl der Unterteilungspunkte x_i endlich ist. Wir können daher das Lemma anwenden, müssen aber zeigen, dass die Maximalbreite der Treppenstufen gegen Null geht. Nun gilt für jedes k, dass $q^k - q^{k+1} = q^k(1-q) \leq 1 - q \to 0$ für $q \to 1$, was zu zeigen war.

Lösung zu Übung 15-2 O. B. d. A. sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wir müssen zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion T existiert mit $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$. Sei also $\varepsilon > 0$. Nach Übung 11-9 existieren die einseitigen Grenzwerte von f in jedem Punkt von $[a,b]$. Wir bestimmen die Punkte $x_0, x_1, \ldots$ wie folgt. Sei $x_0 = a$.

(1) Sei $x_1 = \sup\{x \in [a,b] : f(x) < f(x_0+) + \varepsilon\}$. Falls $x_1 < b$, dann folgt $f(x_1+) \geq f(x_0+) + \varepsilon$.
(2) Falls $x_1 < b$, dann sei $x_2 = \sup\{x \in [a,b] : f(x) < f(x_1+) + \varepsilon\}$. Falls $x_2 < b$, dann folgt $f(x_2+) \geq f(x_1+) + \varepsilon \geq f(x_0+) + 2\varepsilon$.
(3) Falls $x_2 < b$, dann sei $x_3 = \sup\{x \in [a,b] : f(x) < f(x_1+) + \varepsilon\}$.

Wir fahren so fort, bis ein $x_m = b$ ist. Dass dies tatsächlich eintritt, sieht man wie folgt: Für jedes k gilt: Falls $x_k < b$, dann ist $f(x_k+) \geq f(x_0+) + k\varepsilon$. Weil f nach oben durch $f(b)$ beschränkt ist, muss es ein m mit $x_m = b$ geben. Wir erhalten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ (wegen $f(x_0+) < f(x_1+) < \ldots$). Wir definieren nun $T : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $T(x_k) = f(x_k)$ für $k = 0, \ldots, m$ und

$$T(x) = f(x_k+) \text{ für } x \in (x_k, x_{k+1}),\ k = 0, \ldots, m-1.$$

Für $x \in (x_k, x_{k+1})$ gilt $f(x_k+) \leq f(x) < f(x_k+) + \varepsilon$ wegen der Monotonie von f und nach Definition von x_{k+1}, also $0 \leq f(x) - T(x) < \varepsilon$. Also ist $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$, was zu zeigen war.

Lösung zu Übung 15-3 Sei $T : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beliebige Treppenfunktion und$0 = x_0 < x_1 \cdots < x_m = 1$ die zugehörige Unterteilung. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es im Intervall (x_0, x_1) eine rationale Zahl α, und da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es in diesem Intervall eine irrationale Zahl β. Es gilt $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 0$ und $T(\alpha) = T(\beta)$. Daher muss eine der Differenzen $f(\alpha) - T(\alpha)$, $T(\beta) - f(\beta)$ mindestens $\frac{1}{2}$ sein, also gilt $\sup_{[0,1]} |T(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$.

Daher kann f nicht gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen sein.

Lösung zu Übung 15-4

(1) Siehe den Beweis von Proposition 10.3.4.
(2) Es ist

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}}$$

Wendet man Korollar 15.2.7 auf $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1,2]$ an, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \log 2 - \log 1 = \log 2$$

und damit $\lim_{n\to\infty} s_n = \log 2$.

Lösung zu Übung 15-5 Wegen $aq^n = 1$ muss $q = q_n = a^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$ mit $c = 1/a$ sein. Definiert man die Treppenfunktion T_n durch $T_n(x) = \frac{1}{aq^{i-1}}$ auf $[aq^{i-1}, aq^i)$, so ist $\frac{aq^i - aq^{i-1}}{aq^{i-1}} = q-1$ für jedes i, also $\int_a^1 T_n(x)\,dx = n(q-1)$. Damit folgt $n(\sqrt[n]{c}-1) \to \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = -\log a = \log c$ für $n \to \infty$. Dies lässt sich auch direkt aus $\frac{d}{dx}c^x = c^x \log x$ bei $x = 0$ erhalten, da $n(\sqrt[n]{c}-1) = \frac{c^h - c^0}{h}$ mit $h = \frac{1}{n}$.

Lösung zu Übung 15-9 Wir zeigen dies mit Induktion über n. Für $n = 0$ ist

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

zu zeigen, das ist genau die Aussage des Hauptsatzes. Die Aussage gelte nun für $n-1$, und f sei $n+1$ mal stetig differenzierbar. Es genügt,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)\,.$$

zu zeigen. Dazu integriere partiell in $R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$ mit $u'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ und $v(t) = f^{(n)}(t)$. Für u verwende die Stammfunktion $u(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$ (nachrechnen, dass dann u' wie gewünscht ist!). Wegen $v' = f^{(n+1)}$ folgt

$$R_n(x) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\Big|_{t=x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x)$$

was zu zeigen war.

Lösung zu Übung 15-10

(1) Es ist $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$ wegen $1+\tan^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$. Die anderen Identitäten folgen ähnlich.

(2) Mit der Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ ist

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| \\ &= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.\end{aligned}$$

Dies ist eine Stammfunktion für $\frac{1}{\sin x}$ auf jedem Intervall, das kein ganzzahliges Vielfaches von π enthält.

Lösung zu Übung 15-11 Sei zunächst $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Für $x \in [k, k+1)$ ist $EM(x) = x-k-\frac{1}{2}$, also $EM'(x) = 1$. Mit partieller Integration folgt

$$\int_k^{k+1} 1 \cdot f(x)\,dx = (x-k-\frac{1}{2})f(x)\Big|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} EM(x)f'(x)\,dx$$
$$= \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} EM(x)f'(x)\,dx\,.$$

Summation von $k = 1$ bis $k = n-1$ ergibt

$$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{f(n)}{2} - \int_1^n EM(x)f'(x)\,dx$$

und damit die Formel.
(2) Anwendung der Summenformel auf $f(x) = x^a$ ergibt $\sum_{k=1}^n k^a = \frac{n^{a+1}}{a+1} + R(n)$ mit

$$R(n) = -\frac{1}{a+1} + \frac{1+n^a}{2} + \tilde{R}(n)\,, \quad \tilde{R}(n) = \int_1^n EM(x)ax^{a-1}\,dx\,.$$

Nun ist $-\frac{1}{2} \le EM(x) \le \frac{1}{2}$ für alle x, also folgt wegen $ax^{a-1} \ge 0$ aus der Monotonie des Integrals wegen $\int_1^a ax^{a-1}\,dx = n^a - 1$

$$-\frac{n^a-1}{2} \le \tilde{R}_n \le \frac{n^a-1}{2}$$

und daraus

$$-\frac{1}{a+1} + 1 \le R_n \le -\frac{1}{a+1} + n^a$$

was wegen $a+1 \ge 1$ stärker als die geforderte Ungleichung ist.

http://www.springer.com/978-3-658-05946-0

Analysis I
Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums
Grieser, D.
2015, XIII, 351 S. 70 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-05946-0