Messabweichung und Messunsicherheit

2

2.1 Arten von Messabweichungen

Das Ziel einer Messung ist die Bestimmung des wahren Wertes einer physikalischen Größe. Jeder Messwert wird durch die Unvollkommenheit der Messeinrichtung, des Messverfahrens oder durch Umweltbedingungen beeinflusst, sodass der wahre Wert der zu bestimmenden Größe nicht beliebig genau durch die Messung erfasst wird. Die Genauigkeit bzw. mögliche Abweichung des Messwertes vom wahren Wert ist zur Beurteilung des Messergebnisses wichtig.

Messabweichung
Die Messabweichung e beschreibt die Abweichung des Messwertes x vom wahren Wert x_w der Messgröße:

$$e = x - x_w. \tag{2.1}$$

Die Angabe kann, wie in Gl. 2.1 definiert, als Absolutwert oder auch relativ, bezogen auf den wahren Wert bzw. den Bezugswert, erfolgen. Die relative Messabweichung e_{rel} ist somit

$$e_{\text{rel}} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1. \tag{2.2}$$

Die Messabweichung hat immer die Dimension der Messgröße, die relative Messabweichung ist dagegen einheitslos und wird häufig in % angegeben. Für den wahren Wert x_w kann auch der sogenannte richtige Wert x_r verwendet werden (siehe Abschn. 1.2.2). Die Bestimmung der Messabweichung setzt voraus, dass der wahre bzw. der richtige Wert bekannt ist.

Beispiel 2.1
Die Spannung an den Klemmen einer Batterie wird gemessen. Der Messwert beträgt 1,27 V. Der wahre Wert der Spannung, der bekannt bzw. mit einem rückwirkungsfreien Referenzgerät gemessen sei, ist 1,283 V.

T. Mühl, *Einführung in die elektrische Messtechnik*, DOI 10.1007/978-3-8348-2063-1_2

Damit kann die Messabweichung bestimmt werden zu:

Messabweichung $e = x - x_w = 1{,}27\,\mathrm{V} - 1{,}283\,\mathrm{V} = -0{,}013\,\mathrm{V}$,

relative Messabweichung $e_{\mathrm{rel}} = \frac{e}{x_w} = \frac{-0{,}013\,\mathrm{V}}{1{,}283\,\mathrm{V}} = -0{,}0101 = -1{,}01\,\%$.

Messfehler

Früher wurde die Messabweichung, also die Differenz des Messwerts vom wahren Wert, als Fehler bezeichnet. Nach dem heutigen Stand wird im Sinne der Qualitätssicherung als Fehler grundsätzlich das Nichteinhalten von vereinbarten Anforderungen verstanden. Eine Abweichung des Messwertes vom wahren Wert muss aber nicht unbedingt aufgrund eines Messgerätedefektes vorliegen, sondern kann im Rahmen der spezifizierten Genauigkeit des Messgerätes liegen. In den heute gültigen Normen wie DIN 1319 [1.3] oder IEC359 [3.1] wird dementsprechend zwischen einer zulässigen Messabweichung und dem Fehlerfall, der bei Überschreitung der Fehlergrenze vorliegt, unterschieden. Liegen die Messabweichungen innerhalb des spezifizierten, zulässigen Bereichs, liegt kein Fehler vor, anderenfalls ist das Messgerät defekt.

Der Begriff Fehler, der im Zusammenhang mit Messungen auf Gauß zurückgeht, ist weit verbreitet, und im Englischen wird die Messabweichung als „Error“ bezeichnet. Deshalb kann der im Folgenden verwendete Begriff der Messabweichung auch mit Messfehler gleichgesetzt werden.

Ursachen für Messabweichungen

Nehmen wir an, eine Spannung wird mit einem Digitalvoltmeter gemessen. Der Messwert beträgt 5,43 mV. Es stellt sich die Frage, wie genau die Messung ist, bzw. welche Effekte zu einer Messabweichung führen können. Dazu wird das in Abb. 2.1 angegebene Schema betrachtet.

Die wesentlichen Ursachen von Messabweichungen sind:

- Rückwirkungen der Messeinrichtung auf das Messobjekt,
- Umwelteinflüsse auf die Messeinrichtung oder Störungen, die dem Messsignal überlagert sind,
- Unvollkommenheit des Messgerätes oder der Messwertverarbeitung.

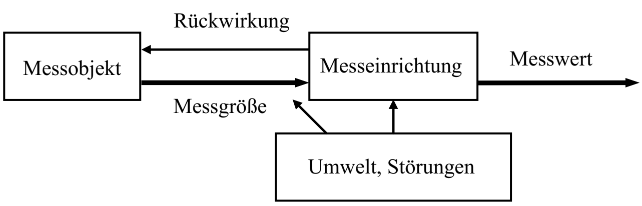

Abb. 2.1 Schema einer Messeinrichtung mit Störeinflüssen

Die Rückwirkung auf das Messobjekt, also die direkte Beeinflussung der Messgröße selbst, ist beispielsweise bei einer Spannungsmessung die Belastung der zu messenden Quelle mit dem Innenwiderstand des Spannungsmessers. Je nach Quell- und Messgeräteinnenwiderstand ändert sich die zu messende Spannung durch das Anschließen des Spannungsmessers. Die Rückwirkungen lassen sich nur selten völlig verhindern und müssen durch geeignete Maßnahmen auf einen akzeptablen Anteil reduziert werden. Umwelteinflüsse sind beispielsweise bedingt durch die Umgebungstemperatur, Feuchte, Luftdruck oder die Gebrauchslage. Unvollkommenheiten der Messeinrichtung können unter anderem durch Nichtlinearitäten, die Quantisierung bei digitalen Systemen oder das Rauschen, das in den Messeinrichtungen dem Messsignal überlagert ist, entstehen.

Betrachtet man die Ursachen einer Messabweichung, so können zwei grundsätzlich verschiedene Arten unterschieden werden: Es gibt Abweichungen, die systematischer Natur sind. Sie haben eine determinierte Ursache, die bei gleichen Randbedingungen immer gleiche Ergebnisse liefert. Wird die Messung wiederholt, ergeben sich stets dieselben systematischen Abweichungen. Anders sind zufällige Messabweichungen, die sich bei wiederholten Messungen ändern. Sie führen zu einer statistischen Verteilung der Messwerte.

2.2 Systematische Messabweichungen

Systematische Messabweichungen haben während der Messung einen konstanten Betrag mit einem bestimmten Vorzeichen oder unterliegen nur einer sehr langsamen Veränderung aufgrund einer Ursache, die die Messgröße determiniert verändert. Sie führen zu einer immer gleichen, zeitlich konstanten Differenz des Messwerts vom wahren Wert, d. h. zu einem „unrichtigen" Messergebnis. Systematische Messabweichungen sind durch Wiederholungen der Messungen unter gleichen Bedingungen nicht erkennbar!

Beispiel 2.2
Ein unvollkommener Abgleich der Messeinrichtung: Bei jedem Messvorgang ist der Messwert für eine bestimmte Messgröße aufgrund eines unvollkommenen Abgleichs der Messeinrichtung um den gleichen Betrag verfälscht. Ein Spannungsmessgerät zeigt beispielsweise immer einen 3 % zu hohen Wert an.

Temperaturgang der Messeinrichtung: Es besteht ein eindeutiger Einfluss der Umgebungstemperatur auf die Messeinrichtung. Der Messwert ist von der Temperatur abhängig, der Zusammenhang ist vorhersehbar und zeitlich konstant.

Rückwirkung durch den Eingangswiderstand eines Spannungsmessgerätes: Die zu messende Spannung wird bei der Messung mit dem Eingangswiderstand des Spannungsmessers belastet, was zu einer determinierten Reduzierung der Messspannung und damit zu einer systematischen Messabweichung führt.

2.2.1 Bekannte und unbekannte systematische Abweichungen

Bekannte systematische Messabweichungen
Sind die systematischen Abweichungen $e_{\text{sys},b}$ nach Betrag und Vorzeichen bekannt, so können sie korrigiert werden. Der negative Wert der bekannten, systematischen Abweichung wird als **Korrektion** K bezeichnet:

$$K = -e_{\text{sys},b}. \tag{2.3}$$

Damit ist der berichtigte oder korrigierte Messwert

$$x_{\text{korr}} = x + K. \tag{2.4}$$

Beispiel 2.3
Ein Spannungsmesser zeigt aufgrund der Abgleichunvollkommenheit zu hohe Spannungswerte an. Die Messabweichungen können durch eine Kalibrierung genau festgestellt werden. Mit Hilfe einer damit erstellten Korrekturtabelle ist es möglich, weitere Messwerte zu korrigieren.

Der Einfluss des Innenwiderstandes eines Spannungsmessers auf eine zu messende Spannung kann bei bekanntem Quellwiderstand berechnet und im Messergebnis korrigiert werden (siehe Abschn. 5.1.1).

Unbekannte systematische Messabweichungen
Es gibt systematische Abweichungen, die vermutet oder deutlich werden, deren Betrag und/oder Vorzeichen aber nicht eindeutig angegeben werden kann. In manchen Fällen ist ein Teil dieser Abweichungen abschätzbar und damit zu einem gewissen Grad korrigierbar. Vollständig unbekannte Abweichungen oder der nicht abschätzbare Anteil müssen wie zufällige Abweichungen (siehe Abschn. 2.3) behandelt werden.

Beispiel 2.4
Die Wärmeableitung und die dadurch verbundene Temperaturabsenkung durch einen das Messobjekt berührenden Temperaturfühler ist systematischer Natur, kann aber nur sehr aufwendig oder näherungsweise abgeschätzt werden.

Die Alterung und die damit verbundene Veränderung der Eigenschaften elektrischer Bauteile sind für jedes Bauteil determiniert, aber in der Regel wertemäßig nicht bekannt.

2.2.2 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen

Wird ein Messergebnis y durch eine mathematische Verknüpfung aus einzelnen Messwerten x_i ermittelt, gehen die Abweichungen der Messwerte in die Abweichung des Ergebnisses ein. Die Bestimmungsgleichung des Messergebnisses y sei

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.5}$$

Die Messabweichung des Ergebnisses e_y ergibt sich aus den Abweichungen der Messwerte e_{x_i} und dem wahren, fehlerfreien Funktionswert y_w

$$e_y = y - y_w = f(x_1 + e_{x_1}, \ldots, x_n + e_{x_n}) - f(x_1, \ldots, x_n).$$

Die Funktion lässt sich mit Hilfe einer Taylorreihe entwickeln, die für kleine Abweichungen e_{xi} nach dem ersten Glied abgebrochen werden kann. Damit lässt sich die Abweichung des Messergebnisses aus den Einzelabweichungen und den partiellen Ableitungen der Funktion f bestimmen:

$$e_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i} \cdot e_{x_i}. \tag{2.6}$$

Häufig wird Gl. 2.6 auch in der Form des totalen Differentials angegeben und die Abweichungen e durch Δy und Δx_i ersetzt.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i} \cdot \Delta x_i. \tag{2.7}$$

Mit Hilfe von Gl. 2.6 können folgende Regeln der Fortpflanzung systematischer Messabweichungen abgeleitet werden:

Addition von Messwerten → Addition der Abweichungen

$$y = x_1 + x_2 \qquad e_y = e_{x_1} + e_{x_2}.$$

Subtraktion von Messwerten → Subtraktion der Abweichungen

$$y = x_1 - x_2 \qquad e_y = e_{x_1} - e_{x_2}.$$

Multiplikation von Messwerten → Addition der relativen Abweichungen

$$y = x_1 \cdot x_2 \qquad e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$$

$$e_{\mathrm{rel}\,y} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = \frac{e_{x_1}}{x_1} + \frac{e_{x_2}}{x_2} = e_{\mathrm{rel}\,x_1} + e_{\mathrm{rel}\,x_2}$$

Division von Messwerten → Subtraktion der relativen Abweichungen

$$y = \frac{x_1}{x_2} \qquad e_y = \frac{1}{x_2} \cdot e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} \cdot e_{x_2}$$

$$e_{\mathrm{rel}\,y} = \frac{e_y}{y} = \frac{e_{x_1}}{x_1} - \frac{e_{x_2}}{x_2} = e_{\mathrm{rel}\,x_1} - e_{\mathrm{rel}\,x_2}.$$

Wichtig ist, dass die Vorzeichen der Abweichungen berücksichtigt werden. Unter Umständen kann die Kombination der Abweichungen zu einer Kompensation führen, so dass das Ergebnis eine kleinere relative Messabweichung besitzt als die Einzelmesswerte.

2.3 Zufällige Messabweichungen

Zufällige Messabweichungen entstehen aufgrund nicht beherrschbarer, nicht determinierter Einflüsse während der Messungen. Sie sind nicht vorausbestimmbar. Wird die Messung am selben Messobjekt unter gleichen Bedingungen wiederholt, führen sie zu einer Streuung der Messwerte, d. h. zu einem sogenannten unsicheren Messergebnis.

Beispiel 2.5
Thermisches Rauschen, das einer zu messenden Spannung überlagert ist.

Übergangswiderstände bei der Kontaktierung elektrischer Bauteile führen zu wenig reproduzierbaren Abweichungen bei der Widerstandsmessung.

Elektromagnetische Felder, die sich schnell ändern, können Messeinrichtungen unvorhersehbar beeinflussen (EMV).

Häufig ist eine Trennung von zum Teil unbekannten systematischen und zufälligen Abweichungen sehr schwer. Führen mehrere Ursachen zu voneinander unabhängigen, systematischen Messabweichungen mit unterschiedlichen Vorzeichen, können die Abweichungen als quasizufällig aufgefasst und wie zufällige Abweichungen behandelt werden. Beispielsweise ändert sich der Widerstandswert elektrischer Widerstände aufgrund der Alterung unterschiedlich stark. Wirken viele Widerstandswerte mit unterschiedlichem Vorzeichen auf eine Messgröße, kann die Alterung als quasizufällig für die Messgröße angesehen werden, auch wenn sie für den einzelnen Widerstand systematischer Natur ist.

Zur Beschreibung der zufälligen Messabweichungen wird die Messgröße X als statistische Größe (Zufallsgröße) aufgefasst, die zufallsabhängig verschiedene Werte annehmen kann. In den nachfolgenden Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass die bekannten systematischen Abweichungen korrigiert sind.

2.3.1 Beschreibung statistischer Größen

Nachfolgend werden die statistischen Grundlagen, die ausführlich in [2.1–2.5] dargestellt sind, beschrieben und auf messtechnische Anwendungen bezogen.

Verteilungsfunktion und Verteilungsdichtefunktion
Zur Beschreibung der Verteilung der Werte der Zufallsgröße wird die Verteilungsfunktion $F(x)$ bzw. die Verteilungsdichtefunktion $f(x)$ verwendet.

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist definiert als die Wahrscheinlichkeit (Prob), dass die Zufallsgröße X einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich x ist :

$$F(x) = \mathrm{Prob}\,(X \leq x)\,. \tag{2.8}$$

Für stetige Verteilungsfunktionen, die kontinuierlich sind und keine Sprünge aufweisen, wird die Verteilungsdichtefunktion $f(x)$ definiert als

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{2.9}$$

Der Wert $f(x)$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass X im Intervall x bis $x + \mathrm{d}x$ liegt. Aus Gl. 2.9 folgt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{und} \tag{2.10}$$

$$F(x \to \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1. \tag{2.11}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass X im Intervall $]a, b]$ liegt, ist

$$\mathrm{Prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Beispiel 2.6
Betrachtet wird ein Zufallszahlengenerator, der Zufallszahlen x zwischen -5 und 10 generiert. Damit wird $F(x) = 0$ für $x < -5$ und $F(x) = 1$ für $x > 10$. Der Verlauf von $F(x)$ zwischen -5 und 10 ist vom Zufallszahlengenerator abhängig und beispielhaft in Abb. 2.2a dargestellt. Abbildung 2.2b enthält die Verteilungsdichtefunktion des Zufallszahlengenerators und verdeutlicht den Zusammenhang der Gln. 2.10 und 2.12.

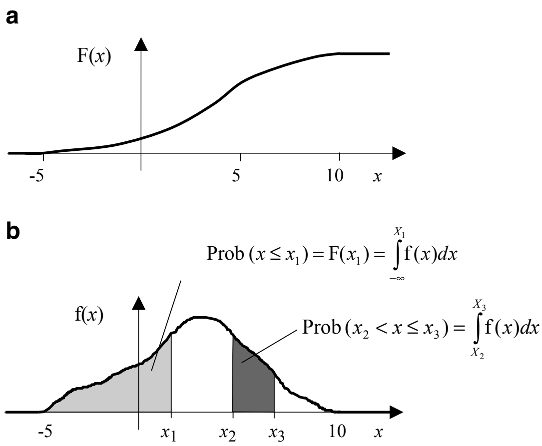

Abb. 2.2 Beispiel eines Zufallszahlengenerators, der Zahlen zwischen -5 und 10 generiert. **a** Verteilungsfunktion, **b** Verteilungsdichtefunktion

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Verteilungs- und Verteilungsdichtefunktion beschreiben eine Zufallsgröße vollständig. Für viele Anwendungen ist die Charakterisierung der Zufallsgröße mit dem Erwartungswert und der Varianz ausreichend.

Der Erwartungswert μ ist ein Maß für das Zentrum der Verteilung der Zufallsgröße und definiert als

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \,, \tag{2.13}$$

wobei N die Anzahl der Elemente x_i der Grundgesamtheit (Menge aller möglichen, der Betrachtungen zugrunde liegenden Elemente) ist.

Für stetige Zufallsgrößen kann der Erwartungswert auch aus der Verteilungsdichtefunktion bestimmt werden:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

Bei korrigierter systematischer Abweichung entspricht der Erwartungswert dem wahren Wert der Messgröße X :

$$\mu = x_w. \tag{2.15}$$

Die Varianz σ^2 ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Erwartungswert. Sie ist definiert als

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2, \tag{2.16}$$

bzw. für stetige Zufallsgrößen

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \mathrm{d}x. \tag{2.17}$$

Die Wurzel aus der Varianz wird als Standardabweichung oder Streuung σ bezeichnet. Sie entspricht der mittleren quadratischen Abweichung der Elemente vom Erwartungswert. Standardabweichung σ und Varianz σ^2 einer Messgröße sind ein Maß für die Streubreite der Messwerte.

Normalverteilung

Die Normalverteilung oder Gaußverteilung besitzt eine um den Erwartungswert symmetrische Verteilungsdichtefunktion. Sie ist deswegen wichtig, weil die Überlagerung vieler statistisch unabhängiger Zufallsgrößen gut durch eine Normalverteilung angenähert werden kann. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass sich die Verteilung einer Zufallsgröße, die durch mehrere, voneinander unabhängige Zufallszahlen bestimmt ist, mit zunehmender Zahl der Variablen einer Normalverteilung annähert [2.5]. In den meisten

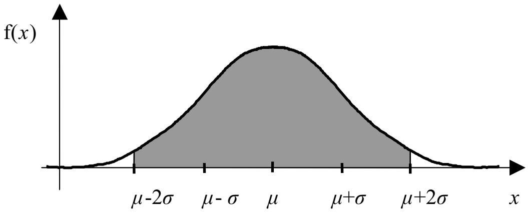

Abb. 2.3 Verteilungsdichtefunktion der Normalverteilung. Der Bereich, in dem die Zufallsvariable mit 95%iger Wahrscheinlichkeit liegt, ist schraffiert

praktischen Fällen der Messtechnik kann als gute Näherung mit der Normalverteilung gearbeitet werden. Voraussetzung ist, dass nicht eine einzelne Einflussgröße dominant ist, sondern mehrere Größen einen Beitrag zum Ergebnis liefern. Ebenso muss mit einer anderen Verteilungsdichtefunktion gerechnet werden, wenn entsprechende Kenntnisse über die besondere Verteilung einer Messgröße vorliegen.

Die Verteilungsdichtefunktion der Normalverteilung ist

$$f\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-0,5\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}. \tag{2.18}$$

In der Darstellung nach Gl. 2.18 sind die Konstanten auf den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ normiert. Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf der Verteilungsdichtefunktion. Schraffiert ist der Bereich $[\mu - 1{,}96\sigma, \mu + 1{,}96\sigma]$, in dem die Zufallsvariable mit 95%iger Wahrscheinlichkeit liegt.

Sind Messwerte normalverteilt, so bedeutet dies:

68,3 % aller Werte liegen im Bereich $\mu \pm \sigma$
95 % aller Werte liegen im Bereich $\mu \pm 1{,}96\,\sigma$
99 % aller Werte liegen im Bereich $\mu \pm 2{,}58\,\sigma$
99,7 % aller Werte liegen im Bereich $\mu \pm 3\,\sigma$

Gleichverteilung

Die Gleichverteilung oder Rechteckverteilung besitzt eine rechteckförmige Verteilungsdichtefunktion, bei der alle vorkommenden Werte die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen. Sie ist beispielhaft in Abb. 2.4 dargestellt und wird analytisch gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \mu - d < x < \mu + d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.19}$$

Die Varianz σ_{Gl}^2 kann nach Gl. 2.17 berechnet werden:

$$\sigma_{\mathrm{Gl}}^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-d}^{d} x^2 \cdot \frac{1}{2\,d}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6\,d}\left[x^3\right]_{-d}^{d} = \frac{1}{3}d^2. \tag{2.20}$$

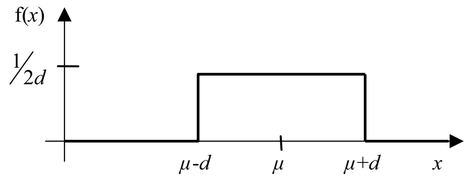

Abb. 2.4 Verteilungsdichtefunktion der Gleichverteilung

Die Streuung der Gleichverteilung σ_{Gl} ist

$$\sigma_{\text{Gl}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot d. \tag{2.21}$$

Wahl der Verteilungsfunktion

Abschließend soll die Frage geklärt werden, welche Verteilung für eine Messgröße angenommen werden kann. Ist die Verteilung bekannt, wird diese verwendet. Bei einer unbekannten Verteilung, kann in den meisten Fällen von einer Normalverteilung ausgegangen werden. Sprechen bestimmte Informationen gegen die Normalverteilung, werden andere Verteilungen angenommen. Beispielsweise wird bei Standardwiderständen eine Normalverteilung der Widerstandswerte um den Nominalwert ($\hat{=}$ Erwartungswert) angenommen, während bei selektierten Widerständen meist von einer Gleichverteilung der Widerstandswerte ausgegangen wird.

2.3.2 Stichprobe einer Messgröße

Die Grundgesamtheit ist die Gesamtmenge aller möglichen Messwerte x_i , und der Erwartungswert und die Varianz sind Eigenschaften dieser Grundgesamtheit. In der Praxis können nicht beliebig viele Einzelmessungen unter allen Bedingungen durchgeführt werden. Man spricht von einer Stichprobe mit dem Umfang n aus der Grundgesamtheit. Aus den Messwerten der Stichprobe können Schätzwerte für den Erwartungswert und die Varianz der Grundgesamtheit ermittelt werden.

Schätzung des Erwartungswertes und der Varianz

Der arithmetische Mittelwert oder auch nur Mittelwert $\bar{x}$ ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ und damit auch für den wahren Wert der Messgröße:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{2.22}$$

Die empirische Varianz s^2 ist ein Schätzwert für σ^2:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2. \tag{2.23}$$

http://www.springer.com/978-3-8348-0899-8

Einführung in die elektrische Messtechnik
Grundlagen, Messverfahren, Anwendungen
Mühl, Th.
2014, XIV, 300 S. 195 Abb. Mit 56 Beispielen und 24 Aufgaben mit Lösungen., Softcover
ISBN: 978-3-8348-0899-8