Tony Crilly

50 Schlüsselideen

Mathematik

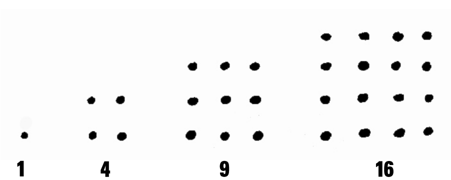
Aus dem Englischen übersetzt von Thomas Filk

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

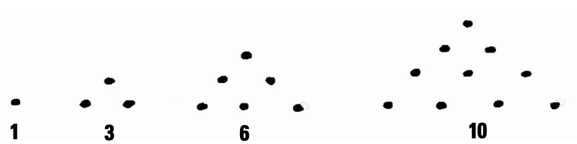
Inhalt

04 Quadratzahlen und Quadratwurzeln

Wenn Sie gerne Punkte malen und zu geometrischen Figuren ordnen, dann scheinen Sie ähnliche Vorlieben zu haben wie die alten Pythagoreer. Deren Anführer Pythagoras, der in erster Linie durch „seinen Satz“ bekannt ist, wurde auf der griechischen Insel Samos geboren, doch sein religiöser Geheimbund agierte in Süditalien. Für die Pythagoreer war die Mathematik der Schlüssel zum Verständnis des Universums.



Betrachten wir die Anzahl der Punkte in nebenstehenden Quadraten. Für das erste „Quadrat“ zählen wir nur einen Punkt. Die 1 war für die Pythagoreer die wichtigste Zahl überhaupt; man schrieb ihr eine übernatürliche Existenzform zu. Das ist schon einmal ein guter Anfang. Zählen wir nun die Punkte in den folgenden Quadraten, so finden wir die sogenannten „Quadratzahlen“: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... Man spricht manchmal auch von „perfekten Quadratzahlen“. Um zur jeweils nächsten Quadratzahl zu kommen, addiert man die Anzahl der Punkte in dem Haken ⌉ außerhalb des vorherigen Quadrats – zum Beispiel 9 + 7 = 16. Die Pythagoreer interessierten sich nicht nur für die Quadratzahlen, sondern sie untersuchten auch andere geometrische Formen, beispielsweise Dreiecke, Fünfecke und andere Polygone (Figuren mit vielen Seiten).



Die aufgemalten Dreieckszahlen sehen aus wie ein Steinhaufen. Für die Anzahl der Punkte findet man 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... Wenn Sie eine Dreieckszahl berechnen wollen, nehmen Sie die vorherige Dreieckszahl und addieren die Anzahl der Punkte in der untersten Reihe. Welche Dreieckszahl folgt nach der 10? Die unterste Reihe hat 5 Punkte, also erhalten wir als Summe 10 + 5 = 15.

Die Zahl 36 finden wir sowohl bei den Dreieckszahlen als auch unter den Quadratzahlen. Doch ein Vergleich der beiden Listen führt auf weitere überraschende Beziehun-

Zeitleiste

1750 v. Chr.
Die Babylonier erstellen Tabellen für Quadratwurzeln

525 v. Chr.
Die Pythagoreer beschäftigen sich mit zu geometrischen Figuren angeordneten Quadratzahlen

um 300 v. Chr.
Die von dem griechischen Mathematiker Eudoxos entwickelte Theorie der irrationalen Zahlen wird im 5. Buch von Euklids *Elementen* beschrieben

gen. Was ist zum Beispiel die Summe von jeweils zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen? Wir rechnen es aus und schreiben das Ergebnis in eine Tabelle – und siehe da, die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen ist eine Quadratzahl. Der Grund lässt sich auch ohne viele Worte einsehen. Dazu betrachten wir ein Quadrat aus vier Reihen mit jeweils vier Punkten und ziehen eine diagonale Linie etwas oberhalb der diagonalen Punkte im Quadrat. Die Punkte oberhalb der Linie bilden ein Dreieck und die Punkte unterhalb der Linie das nächstgrößere Dreieck. Das gilt für jedes beliebige Quadrat.

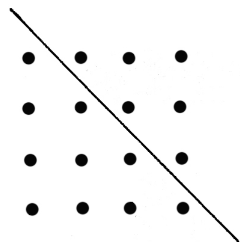
Von diesen „gepunkteten“ Diagrammen ist es nur noch ein kleiner Schritt zur Ausmessung von Flächen. Die Fläche eines Quadrats mit der Seitenlänge 4 beträgt $4 \times 4 = 4^2 = 16$ Quadrateinheiten. Ganz allgemein gilt: Bezeichnen wir die Länge einer Quadratseite mit x, dann ist die Fläche x^2.

Die Quadratfunktion x^2 ist auch die Grundlage für die Parabel. Die parabolische Form findet man zum Beispiel in Satellitenschüsseln und den Reflektorspiegeln von Autoscheinwerfern. Eine Parabel besitzt einen Brennpunkt. Die parallelen Signalstrahlen aus der Umgebung werden von der Schüssel reflektiert und treffen sich alle im Brennpunkt. Ein Sensor im Brennpunkt empfängt diese Strahlen und kann sie an einen Verstärker weiterleiten.

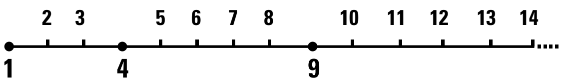
Bei einem Autoscheinwerfer ist es genau umgekehrt: Im Brennpunkt des parabolischen Reflektors befindet sich eine Glühbirne, deren Strahlen vom Reflektor als parallele Lichtstrahlen ausgesendet werden. Unter den Sportlern werden Kugelstoßer, Diskuswerfer und Hammerwerfer in der Parabel die Bahnkurve wiedererkennen, entlang der sich geworfene Gegenstände bewegen, bevor sie zur Erde fallen.

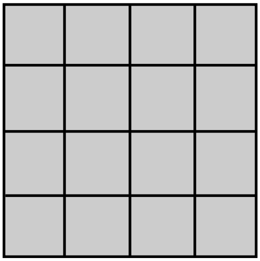
Die Summen aus zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen

1 + 3	4
3 + 6	9
6 + 10	16
10 + 15	25
15 + 21	36
21 + 28	49
28 + 36	64



Quadratwurzeln Nun drehen wir die Frage um und suchen die Seitenlänge eines Quadrats mit einer Fläche von 16 Quadrateinheiten. Die Antwort lautet einfach 4. Die Quadratwurzel von 16 ist 4, man schreibt meist $\sqrt{16}$. Das Symbol $\sqrt{}$ für Quadratwurzeln gibt es seit dem Beginn des 16. Jahrhunderts. Zu allen perfekten Quadratzahlen gehören ganze Zahlen als Quadratwurzeln: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$ usw. Dazwischen gibt es jedoch viele Lücken auf der Zahlengeraden, nämlich 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, ...





Für Quadratwurzeln gibt es noch eine interessante alternative Schreibweise. Ebenso wie x^2 das Quadrat einer Zahl angibt, können wir für eine Quadratwurzel auch $x^{1/2}$ schreiben. Das passt zu der Vorschrift, dass man Zahlen multipli-

630 n. Chr.
Brahmagupta entwickelt Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln

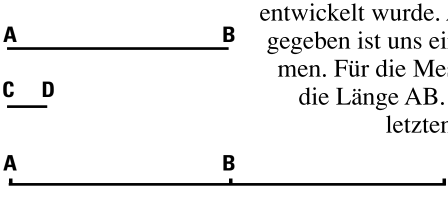
1550
Das Symbol $\sqrt{}$ wird für Quadratwurzeln verwendet

1872
Richard Dedekind formuliert eine Theorie der irrationalen Zahlen

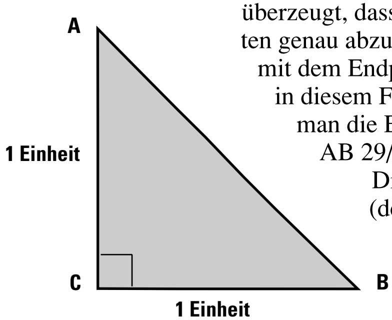
ziert, indem man ihre Potenzen addiert. Auf diesem Prinzip beruht auch das Rechnen mit dem Logarithmus, der ungefähr seit 1600 bekannt ist. Damals erkannte man, wie man das Problem der Multiplikation in ein Problem der Addition umwandeln kann. Aber das ist eine andere Geschichte. Alle oben genannten Zahlen haben Quadratwurzeln, allerdings handelt es sich nicht um ganze Zahlen. Fast jeder Taschenrechner hat eine $\sqrt{\ }$-Taste zum Ziehen einer Quadratwurzel, damit finden wir zum Beispiel $\sqrt{7} = 2{,}645751311$.

Betrachten wir $\sqrt{2}$ genauer. Auch die Zahl 2 hatte für die Pythagoreer eine besondere Bedeutung, denn sie ist die erste gerade Zahl. (Die Griechen erachteten die geraden Zahlen als weiblich und die ungeraden Zahlen als männlich – und den kleinen Zahlen ordneten sie eigenständige Persönlichkeiten zu.) Wenn Sie auf Ihrem Taschenrechner $\sqrt{2}$ bestimmen, erhalten Sie 1,414213562 (falls Ihr Taschenrechner diese Anzahl von Dezimalstellen ausgibt). Doch ist das wirklich die Quadratwurzel von 2? Zur Überprüfung berechnen wir $1{,}414213562 \times 1{,}414213562$ und erhalten 1,999999999. Das ist nicht ganz 2, denn 1,414213562 ist tatsächlich nur eine Näherung für die Quadratwurzel von 2.

Bemerkenswert ist jedoch, dass wir *nie* mehr als eine Näherung erhalten können! Die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ ist selbst mit Millionen von Dezimalstellen immer nur eine Näherung. Die Zahl $\sqrt{2}$ hat in der Mathematik eine besondere Bedeutung. Vielleicht ist sie nicht ganz so wichtig wie π oder e (▶ Kapitel 5 und 6), doch immerhin wichtig genug, um einen eigenen Namen zu haben – man nennt sie manchmal die „Pythagoreische Zahl“.



Lassen sich Quadratwurzeln als Brüche schreiben? Diese Frage hängt eng mit der Theorie des Messens zusammen, wie sie von den alten Griechen entwickelt wurde. Angenommen, wir wollen die Länge einer Linie AB ausmessen; gegeben ist uns eine unteilbare Einheit CD, mit der wir diese Messung vornehmen. Für die Messung legen wir unsere Einheit CD mehrfach hintereinander an die Länge AB. Wenn wir die Einheit m-mal anlegen können, und das Ende der letzten Einheit passt genau mit dem Ende von AB (am Punkt B) zusammen, dann ist die Länge von AB einfach m. Sollte das nicht der Fall sein, legen wir eine zweite Kopie von AB hinter die ursprüngliche Länge und fahren mit der Messung fort (siehe Abbildung). Die Griechen waren davon überzeugt, dass es mit einer endlichen Zahl n von Kopien von AB gelingt, die Einheiten genau abzutragen (sagen wir m-mal), sodass das Ende der m-ten Einheit genau mit dem Endpunkt der n-ten Kopie von AB übereinstimmt. Die Länge von AB wäre in diesem Fall m/n. Bräuchte man beispielsweise drei Kopien von AB und könnte man die Einheit CD genau 29-mal daneben legen, dann wäre die Länge von AB 29/3.



Die Griechen hatten sich auch überlegt, wie man die Länge der Seite AB (der Hypotenuse) in einem rechtwinkligen Dreieck ausmessen kann, bei dem die anderen beiden Seiten genau eine „Einheit“ lang sind. Nach dem Satz des Pythagoras würde man die Länge von AB symbolisch in der Form $\sqrt{2}$ schreiben. Die Frage lautet also nun, ob es zwei Zahlen m und n gibt, sodass $\sqrt{2} = m/n$?

Aus unseren Überlegungen und Erfahrungen mit dem Taschenrechner wissen wir, dass die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ möglicherweise unendlich lang ist, und diese Tatsache (dass die Dezimaldarstellung kein Ende hat) deutet bereits darauf hin, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch darstellen lässt. Andererseits hat auch die Zahl 0,3333333... kein Ende, doch sie entspricht dem Bruch 1/3. Wir brauchen also überzeugendere Argumente.

Ist $\sqrt{2}$ ein Bruch? Diese Frage führt uns zu einem der berühmtesten Beweise in der Mathematik. Er beruht auf einem Verfahren, das die Griechen geliebt haben: die *reductio ad absurdum* (die Rückführung auf einen Widerspruch). Zunächst wird angenommen, dass $\sqrt{2}$ nicht gleichzeitig ein Bruch und kein Bruch sein kann. Dieses Gesetz der Logik bezeichnet man als *tertium non datur* – den Ausschluss einer dritten Möglichkeit. In dieser Logik gibt es für Gegensätze kein Sowohl-als-auch. Die Beweisidee der Griechen war genial: Sie nahmen an, dass es einen Bruch gibt, und führten diese Annahme durch eine Folge von strengen logischen Schritten zu einem Widerspruch. Also gehen wir ebenfalls so vor. Angenommen

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

Wir können zusätzlich noch voraussetzen, dass m und n keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Diese Annahme ist möglich, denn andernfalls könnten wir diesen gemeinsamen Faktor herausdividieren. (Zum Beispiel hat der Bruch 21/35 denselben Wert wie 3/5, man hat lediglich durch den gemeinsamen Faktor 7 geteilt.)

Nun quadrieren wir beide Seiten der Gleichung $\sqrt{2} = m/n$ und erhalten $2 = m^2/n^2$ und somit $m^2 = 2n^2$. Hier können wir unsere erste Schlussfolgerung ziehen: Da m^2 das Doppelte einer anderen Zahl ist, muss m^2 eine gerade Zahl sein. Doch dann kann auch m selbst keine ungerade Zahl sein (denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist wieder eine ungerade Zahl), also muss m eine gerade Zahl sein.

Bisher ist die Logik zwingend, also fahren wir fort. Da m gerade ist, muss es das Doppelte einer anderen Zahl sein, sodass wir $m = 2k$ schreiben können. Indem wir beide Seiten dieser Gleichung quadrieren, erhalten wir $m^2 = 4k^2$. Zusammen mit der Tatsache $m^2 = 2n^2$ führt uns das auf die Beziehung $2n^2 = 4k^2$, und indem wir diese Gleichung durch 2 kürzen, erhalten wir $n^2 = 2k^2$. Doch auf eine ähnliche Gleichung sind wir schon einmal gestoßen! Wiederum können wir schließen, dass n^2 gerade sein muss, und damit muss auch n gerade sein. Durch reine Logik sind wir also zu dem Schluss gekommen, dass sowohl m als auch n gerade sein müssen, also haben sie 2 als gemeinsamen Faktor. Das widerspricht jedoch unserer Annahme, dass m und n keinen gemeinsamen Faktor haben sollen. Die Schlussfolgerung ist daher: $\sqrt{2}$ kann kein Bruch sein.

Ganz ähnlich lässt sich beweisen, dass sich keine Wurzel aus einer ganzen Zahl als Bruch darstellen lässt (außer es handelt sich um eine perfekte Quadratzahl). Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, bezeichnet man als „irrationale“ Zahlen. Wir sind also auf diesem Wege zu dem Ergebnis gekommen, dass es unendlich viele irrationale Zahlen geben muss.

Worum es geht

Der Weg zu den irrationalen Zahlen

05 π

π ist die berühmteste Zahl der Mathematik. Gleichgültig, welche Konstanten man auch betrachtet, π wird immer an der Spitze stehen. Gäbe es einen Oscar für Zahlen, wäre sie wohl jedes Jahr unter den Gewinnern.

Man erhält die Zahl π, ausgesprochen pi, wenn man den Umfang eines Kreises durch den Kreisdurchmesser dividiert. Ihr Wert, das Verhältnis dieser beiden Längen, hängt nicht von der Größe des Kreises ab; π ist wirklich eine mathematische Konstante. Auch wenn die Zahl π in natürlicher Weise mit dem Kreis zusammenhängt, taucht sie überall in der Mathematik auf, selbst an Stellen, die zunächst nichts mit einem Kreis zu tun zu haben scheinen.

Archimedes von Syrakus Schon in der Antike wurde dem Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser ein großes Interesse entgegengebracht. Bereits um 2000 v. Chr. erkannten die Babylonier, dass der Umfang eines Kreises ungefähr dreimal so lang ist wie sein Durchmesser.

Um 225 v. Chr. stellte Archimedes von Syrakus erste theoretische Überlegungen zur Zahl π an. Archimedes zählt sicherlich zu den größten mathematischen Genies der Geschichte. Mathematiker lieben Vergleiche, und Archimedes wird oft auf eine Stufe gesetzt mit Carl Friedrich Gauß (dem „Fürsten der Mathematik“) und Sir Isaac Newton. Gäbe es für Mathematiker eine Hall of Fame, wäre Archimedes in jedem Fall dort zu finden. Man kann von ihm allerdings nicht behaupten, dass er in einem Elfenbeinturm lebte. Abgesehen von seinen Beiträgen zu Astronomie, Mathematik und Physik entwarf er auch Kriegsgeräte wie Katapulte, Hebebäume und „Brennspiegel“, alles zu dem Zweck, die Römer auf Abstand zu halten. Trotzdem scheint er auch etwas von der geistigen Verschrobenheit eines Professors gehabt zu haben, anders lässt sich kaum verstehen, dass er plötzlich aus seinem Bad springt, nackt durch die Straßen rennt und „Heureka“ schreit, weil er das Gesetz vom hydrostatischen Gleichgewicht entdeckt hat. Wie er seine Entdeckungen zur Zahl π gefeiert hat, ist nicht bekannt.

Für einen Kreis mit dem Durchmesser *d* und Radius *r* gilt:

Umfang = $\pi d = 2\pi r$
Fläche = πr^2

Für eine Kugel mit dem Durchmesser *d* und Radius *r* gilt:

Oberfläche = $\pi d^2 = 4\pi r^2$
Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$

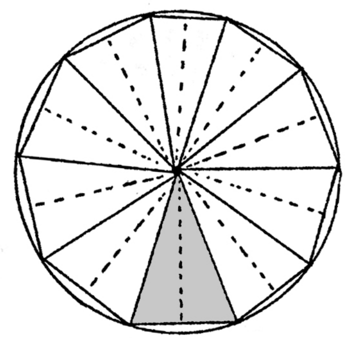
Wenn π als das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser definiert ist, ergibt sich sofort die Frage: Was hat das mit der Kreisfläche zu tun? Man kann ableiten, dass die Fläche eines Kreises mit dem Radius r gleich πr^2 ist diese For-

Zeitleiste

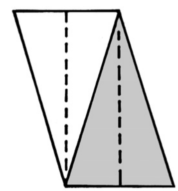
2000 v. Chr.
Die Babylonier nehmen für π den Wert 3

250 v. Chr.
Archimedes gibt für π die gute Näherung 22/7 an

mel ist vermutlich bekannter als die obige Definition von π (das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser). Zunächst überrascht jedoch, dass π diese Doppelfunktion für die Fläche und den Umfang übernimmt.



Wie kann man das beweisen? Eine Kreisfläche lässt sich in eine große Anzahl von schmalen gleichschenkligen Dreiecken aufteilen. Die Grundseite dieser Dreiecke bezeichnen wir mit b, und ihre Höhe ist näherungsweise gleich dem Radius r. Diese Dreiecke bilden zusammen ein Polygon (Vieleck) innerhalb des Kreises, dessen Fläche ungefähr der Kreisfläche entspricht. Beginnen wir mit 1 000 Dreiecken. Insgesamt wird es darum gehen, Kreisfläche und Kreisumfang immer besser anzunähern. Wir können je zwei benachbarte Dreiecke (näherungsweise) zu einem Rechteck zusammensetzen, dessen Fläche durch $b \times r$ gegeben ist, sodass die Gesamtfläche des Polygons $500 \times b \times r$ ist. Andererseits entspricht $500 \times b$ ungefähr der Hälfte des Umfangs und damit πr. Also ist die Fläche des Polygons ungefähr $\pi r \times r = \pi r^2$. Je mehr Dreiecke wir nehmen, umso näher kommt die Fläche des Polygons der Fläche des Kreises; letztendlich ist die Kreisfläche gleich πr^2.



Archimedes hatte festgestellt, dass der Wert von π zwischen 223/71 und 220/70 liegen muss. Ihm verdanken wir also die bekannte Näherung von 22/7 für den Wert von π. Die Ehre, das heutige Symbol π eingeführt zu haben, gebührt dem wenig bekannten walisischen Mathematiker William Jones, der im 18. Jahrhundert Vizepräsident der Royal Society von London wurde. Allgemein bekannt wurde das Symbol π als das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser durch den Mathematiker und Physiker Leonhard Euler.

Der exakte Wert von π Wir werden den exakten Wert von π niemals genau kennen, denn im Jahre 1768 konnte Johann Lambert beweisen, dass es sich um eine irrationale Zahl handelt. Die Dezimaldarstellung ist unendlich lang und zeigt keine erkennbaren Regelmäßigkeiten. Die ersten 20 Dezimalstellen sind 3,14159265358979323846... Im antiken China verwendete man für π den Wert $\sqrt{10} = 3{,}16227766016837933199$, und dieser Wert wurde auch von Brahmagupta um 500 n. Chr. übernommen. Das ist tatsächlich etwas genauer als der grobe Wert 3 und zeigt erst an der zweiten Dezimalstelle eine Abweichung zu π.

π lässt sich auch über Zahlenreihen bestimmen. Eine bekannte Darstellung ist:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Allerdings konvergiert diese Reihe nur sehr langsam gegen π. Zur Berechnung des Zahlenwerts ist sie nicht geeignet. Eine interessante gegen einen Ausdruck von π konvergierende Reihe stammt von Euler:

1706 n. Chr.
William Jones führt das Symbol π ein

1761
Lambert beweist, dass π irrational ist

1882
Lindemann beweist die Transzendenz von π

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots$$

Der geniale Autodidakt Srinivasa Ramanujan fand einige bemerkenswerte Näherungsformeln für π, unter anderem die folgende, die nur die Quadratwurzel von 2 enthält:

$$\frac{9801}{4412}\sqrt{2} = 3{,}141592\underline{7}300133056603139961890\ldots$$

Für die Mathematiker war π schon immer eine faszinierende Zahl. Während Lambert zeigen konnte, dass es sich bei π nicht um einen Bruch handeln kann, konnte der deutsche Mathematiker Ferdinand von Lindemann im Jahre 1882 eines der wichtigsten offenen Probleme im Zusammenhang mit π lösen. Er bewies, dass π eine „transzendente" Zahl ist. Das bedeutet, π kann keine Lösung einer algebraischen Gleichung sein. (Eine algebraische Gleichung enthält nur endliche Potenzen von der Unbekannten x und ihre Koeffizienten sind rationale Zahlen.) Durch die Lösung dieses „Jahrtausendproblems" konnte Lindemann gleichzeitig auch das Problem der „Quadratur des Kreises" lösen. Die Frage war, ob man aus einem gegebenen Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt konstruieren kann, wobei man für diese Konstruktion nur Zirkel und Lineal verwenden darf. Aus Lindemanns Beweis folgte eindeutig die Unmöglichkeit einer solchen Konstruktion. Heute spricht man von einer „Quadratur des Kreises", wenn man zum Ausdruck bringen will, dass etwas unmöglich ist.

Auch die Berechnung von π machte rasche Fortschritte. Im Jahre 1853 behauptete William Shanks, den Wert auf 607 Stellen genau berechnet zu haben (tatsächlich war seine Rechnung nur für die ersten 527 Stellen richtig). Heute können wir mithilfe von Computern den Wert von π auf zunehmend mehr Dezimalstellen bestimmen. Im Jahre 1949 benötigte ein ENIAC-Computer rund 70 Stunden, um π auf 2 037 Dezimalstellen zu berechnen. Im Jahre 2002 bestimmte man die Dezimaldarstellung von π auf schwindelerregende 1 241 100 000 000 Stellen genau, und es hat kein Ende. Würden wir entlang des Äquators die Zahl π aufschreiben, benötigten wir für den Wert von Shanks vielleicht 1,2 Meter, doch die Länge der Berechnung von 2002 würde uns 62-mal rund um die Erde führen!

Im Zusammenhang mit π wurden viele Fragen gestellt und viele auch beantwortet. Sind die Ziffern von π eine Zufallsfolge? Kann man in der Dezimaldarstellung jede beliebig vorgegebene endliche Zahlenfolge finden? Ist es beispielsweise möglich, irgendwo in der Entwicklung die Folge 0123456789 zu finden? Um 1950 hatte man noch keine Antworten auf diese Fragen. Niemand hatte diese Zahlenfolge in den 2 000 damals bekannten Dezimalstellen von π gefunden. Der führende holländische Mathematiker L. E. J. Brouwer behauptete sogar, diese Frage sei sinnlos, weil sie seiner Meinung nach nie überprüft werden könne. Tatsächlich fand man diese Zahlenfolge im Jahre 1997 beginnend an der Stelle 17 387 594 880. Bei unserem Bild vom Äquator würde diese Zahlenfolge ungefähr 5 000 Kilometer vor der ersten Erdumrundung auftauchen. Schon nach weniger als 1 000 Kilometern findet man zehnmal die Ziffer 6 hintereinander, doch man muss die Erde einmal umrunden und noch 6 500 Kilometer weiter gehen, bis man zum ersten Mal die Ziffer 7 zehnmal in Folge entdeckt.

π in der Dichtung

Wenn man sich wirklich die ersten Ziffern in der Dezimaldarstellung von π merken möchte, hilft vielleicht ein kleines Gedicht in englischer Sprache. Verfasst wurde es von dem Mathematiker Michael Keith in Anlehnung an das Gedicht *The Raven* von Edgar Allen Poe.

Der Anfang des Gedichts von Poe:
The Raven E. A. Poe
Once upon a midnight dreary, while I pondered weak and weary,
Over many a quaint and curious volume of forgotten lore, ...

Der Anfang von Keiths Version für π:
Poe, E. Near a Raven
Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.

Nimmt man jeweils die Anzahl der Buchstaben in jedem Wort (zehn Buchstaben entsprechen der Null), so erhält man aus Keiths gesamtem Gedicht die ersten 740 Dezimalstellen der Zahl π.

Die Bedeutung von π Welchen Vorteil bringt es, die Zahl π auf so viele Stellen genau zu kennen? Für die meisten Berechnungen reichen einige wenige Stellen vollkommen aus. Vermutlich benötigt keine praktische Anwendung mehr als zehn Dezimalstellen, und in vielen Fällen ist sogar die Näherung 22/7 von Archimedes gut genug. Doch die aufwendigen Berechnungen sind mehr als reiner Spaß. In erster Linie verwendet man sie, um die Leistungsfähigkeit von Computern zu testen. Außerdem üben diese Zahlen eine magische Faszination auf eine Gruppe von Mathematikern aus, die sich selbst die „Freunde von pi“ nennen.

Die vielleicht seltsamste Geschichte im Zusammenhang mit der Zahl π war ein Versuch im amerikanischen Bundesstaat Indiana, den Wert von π per Gesetz festzulegen. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts brachte der Arzt Dr. E. J. Goodwin diesen Gesetzesentwurf ein, um π „handhabbarer“ zu machen. Während des Verfahrens stieß man jedoch auf das praktische Problem, dass der Antragsteller den gewünschten Wert nicht absolut angeben konnte. Zum Glück für Indiana erkannte man, was für ein Unsinn es war, den Wert von π per Gesetz festlegen zu wollen, bevor das Gesetz verabschiedet wurde. Seither haben die Politiker die Zahl π in Ruhe gelassen.

33 Das Geburtstagsproblem

Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich in einem Bus auf Ihrer morgendlichen Fahrt zur Arbeit, und sie haben gerade nichts Besonderes zu tun. Da die Mitreisenden mit großer Wahrscheinlichkeit zufällig zusammengetroffen sind, können wir annehmen, dass ihre Geburtstage auch zufällig über das Jahr verstreut liegen. Insgesamt – Sie eingeschlossen – befinden sich nur 23 Reisende im Bus. Das ist nicht viel, aber es reicht für die folgende Behauptung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Passagiere am selben Tag Geburtstag haben, ist größer als 50 %. Glauben Sie das? Die meisten Menschen glauben es nicht, doch es stimmt. Selbst Experten der Wahrscheinlichkeitstheorie wie William Feller waren erstaunt.

Ein Bus ist für die weiteren Überlegungen zu klein, also verlegen wir das Argument in einen großen Saal. Wie viele Personen müssen sich in dem Saal befinden, sodass *mit Sicherheit* zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben? Ein (gewöhnliches) Jahr hat 365 Tage (der Einfachheit halber berücksichtigen wir keine Schaltjahre); wenn es also in dem Saal 366 Personen gibt, muss zumindest ein Paar am selben Tag Geburtstag haben. Es ist unmöglich, dass alle Personen an verschiedenen Tagen Geburtstag haben.

Das ist das Taubenschlagprinzip (manchmal auch Schubladenprinzip genannt): Wenn es $n + 1$ Tauben gibt, die sich auf insgesamt n Taubenschläge verteilen, muss ein Taubenschlag mehr als eine Taube enthalten. Bei 365 Personen könnten wir uns nicht sicher sein, dass es einen gemeinsamen Geburtstag gibt, denn die Geburtstage könnten sich auf die verschiedenen Tage im Jahr verteilen. Wenn sich jedoch 365 zufällig ausgewählte Personen im Saal befinden, wäre dies außerordentlich unwahrscheinlich. Selbst bei nur 50 anwesenden Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, immer noch 96,5 %. Wird die Anzahl der Personen kleiner, verringert sich auch die Wahrscheinlichkeit für einen gemeinsamen Geburtstag. Bei 23 Personen ist diese Wahrscheinlichkeit gerade eben größer als ½, und bei 22 Personen ist sie kleiner als ½. Die Zahl 23 ist die kritische Zahl. Doch auch wenn die Ant-

Zeitleiste

1654
Blaise Pascal begründet die Wahrscheinlichkeitstheorie

1657
Christiaan Huygens schreibt die erste veröffentlichte Arbeit über Wahrscheinlichkeiten

1718
Abraham de Moivre veröffentlicht *The Doctrine of Chance*; erweiterte Auflagen folgen in den Jahren 1738 und 1756

wort auf das klassische Geburtstagsproblem überraschen mag, es handelt sich nicht um ein Paradoxon.

Der Beweis Wie können wir uns davon überzeugen? Wir wählen zunächst eine beliebige Person. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zweite Person am selben Tag Geburtstag hat wie die erste Person ist $\frac{1}{365}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Personen nicht am selben Tag Geburtstag haben, ist somit eins minus diese Zahl (oder $\frac{364}{365}$). Die Wahrscheinlichkeit, dass eine weitere beliebig gewählte Person ihren Geburtstag am selben Tag hat wie eine der ersten beiden, ist $\frac{2}{365}$, und damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person *nicht* ihren Geburtstag am selben Tag hat wie eine der ersten beiden, eins minus diese Zahl (oder $\frac{363}{365}$). Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei Personen kein gemeinsamer Geburtstag vorliegt, ist daher das Produkt dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, oder $(\frac{364}{365}) \times (\frac{363}{365})$. Das ist ungefähr 0,9918.

Ebenso können wir auch 4, 5, 6, ... Personen behandeln und auf diese Weise das Geburtstagsparadoxon auflösen. Bei 23 Personen liefert unser Taschenrechner die Antwort 0,4927 für die Wahrscheinlichkeit, dass keine zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben. Die Verneinung davon bedeutet, dass zumindest zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, und die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist 1 – 0,4927 = 0,5073, also gerade eben größer als die kritische Grenze ½.

Für $n = 22$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen ihren Geburtstag am selben Tag haben, gleich 0,4757, also weniger als ½. Das scheinbar Paradoxe an dem Geburtstagsproblem hängt damit zusammen, wie es sprachlich formuliert wird. Es geht um zwei Personen, die am selben Tag Geburtstag haben, aber es wird nicht gesagt, welche zwei Personen das sind. Wir wissen nicht, wen es schließlich trifft. Wenn sich andererseits Trevor Thomson im Raum befindet, der am 8. März Geburtstag hat, dann lässt sich die Frage auch anders stellen.

Wie viele Personen haben zusammen mit Trevor Thomson Geburtstag? Zur Beantwortung dieser Frage ist die Rechnung eine andere. Die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Thomson nicht am selben Tag Geburtstag hat wie eine beliebige andere Person, ist $\frac{364}{365}$, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass sein Geburtstag mit keinem der Geburtstage der $n - 1$ anderen Personen im Raum zusammenfällt, durch $(\frac{364}{365})^{n-1}$ gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Thomson seinen Geburtstag mit einer anderen Person im Raum zusammen feiern kann, beträgt somit eins minus diese Zahl.

Wenn wir das für $n = 23$ berechnen, erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit 0,061151. Die Chance, dass jemand seinen Geburtstag am 8. März hat, ist somit nur 6 %. Wird n größer, wächst auch diese Wahrscheinlichkeit. Doch wir müssen schon bis $n = 254$ gehen (wobei Herr Thomson einbezogen wurde), um für die Wahrscheinlichkeit einen Wert von über ½ zu erhalten. Für $n = 254$ ist der Wert 0,5005. Hier liegt die Gren-

1920er-Jahre
Satyendra Nath Bose behandelt Einsteins Lichttheorie als ein Besetzungszahlproblem

1939
Richard von Mises formuliert das Geburtstagsproblem

ze, denn $n = 253$ ergibt nur 0,4991, also einen Wert unter ½. Es müssen sich also schon 254 Personen im Raum befinden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Thomson seinen Geburtstag mit einer zweiten Person zusammen feiern kann, größer als ½ ist. Das entspricht unserer Intuition vielleicht eher als die überraschende Lösung des klassischen Geburtstagsproblems.

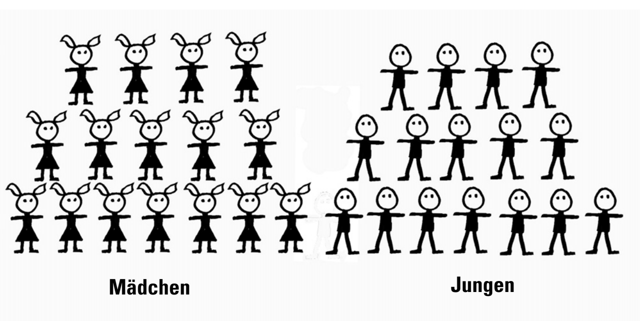
Andere Geburtstagsprobleme Das Geburtstagsproblem wurde in mehrfacher Hinsicht verallgemeinert. Eine mögliche Verallgemeinerung besteht in der Frage, ob drei Personen am selben Tag Geburtstag haben. In diesem Fall wären 88 Personen notwendig, damit die Wahrscheinlichkeit größer als ½ ist. Entsprechend werden auch die Gruppen größer, wenn man die Frage auf Gruppen von vier, fünf etc. Personen erweitert, die alle am selben Tag Geburtstag haben sollen. In einer Gruppe von 1 000 Personen ist die Wahrscheinlichkeit größer als ½, dass neun Personen am selben Tag Geburtstag haben.

Andere Verallgemeinerungen erhält man, wenn die Geburtstage nur nahe beieinander liegen sollen. In diesem Fall erhält man einen Treffer, wenn ein Geburtstag innerhalb einer bestimmten Anzahl von Tagen bei einem anderen Geburtstag liegt. Es reichen schon 14 Personen in einem Zimmer aus, damit die Wahrscheinlichkeit größer ist als ½, dass sich die Geburtstage von zwei Personen nur um maximal einen Tag unterscheiden.

Eine weitere Form des Geburtstagsproblems, das schon anspruchsvollere mathematische Verfahren erfordert, ist das Geburtstagsproblem für Jungen und Mädchen. Angenommen, in einer Klasse befinden sich ebenso viele Jungen wie Mädchen. Was wäre die kleinste Klasse, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Junge und ein Mädchen am selben Tag Geburtstag haben, größer ist als ½?

Die Antwort lautet, dass die minimale Klasse in diesem Fall 32 Kinder (16 Mädchen und 16 Jungen) haben muss. Das lässt sich mit den 23 Personen im klassischen Geburtstagsproblem vergleichen.

Ändert sich die Fragestellung etwas, erhalten wir neue Probleme (die allerdings auch nicht einfacher zu beantworten sind). Angenommen, vor der Kasse zu einem Bob-Dylan-Konzert hat sich eine lange Schlange gebildet, und die Leute stellen sich zufällig an. Da wir an Geburtstagsproblemen interessiert sind, betrachten wir nicht den Fall, dass sich gleichzeitig Zwillinge oder Drillinge anstellen. Die Fans betreten den Konzertsaal und werden nach ihrem Geburtstag gefragt. Eine mathematische Frage könnte lauten: Wie viele Leute müssen im Mittel den Saal betreten haben, bis zwei *aufeinanderfolgende* Personen am selben Tag Geburtstag haben? Eine andere Frage wäre: Wie viele Personen haben den Saal betreten, bis eine Person am selben Tag Geburtstag hat wie Trevor Thomson (8. März)?



Bei den Geburtstagsproblemen wird angenommen, dass die Geburtstage gleichförmig verteilt sind und dass jeder Tag dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, der Geburtstag einer willkürlich herausgegriffenen Person zu sein. Experimentell erweist sich diese Annahme als falsch (während der Sommermonate werden mehr Personen geboren), doch die Abweichungen sind klein genug, um die berechneten Ergebnisse nicht wesentlich zu ändern.

Geburtstagsprobleme sind Beispiele für sogenannte Besetzungszahlprobleme, bei denen es den Mathematikern darum geht, Kugeln nach bestimmten Regeln in Fächer oder Zellen zu verteilen. Beim Geburtstagsproblem ist die Anzahl der Zellen 365 (sie entsprechen den möglichen Geburtstagen) und die Kugeln, die beliebig in die Zellen verteilt werden, sind die Personen. Die Frage lässt sich dann auch so formulieren, dass die Wahrscheinlichkeit gesucht ist, mit der zwei Kugeln in derselben Zelle landen. Bei dem Problem mit der Schulklasse aus Mädchen und Jungen haben die Kugeln noch zwei verschiedene Farben.

Nicht nur Mathematiker sind an Geburtstagsproblemen interessiert. Der indische Physiker Satyendra Nath Bose war fasziniert von Einsteins Theorie des Lichts und dem Konzept der Photonen. Er verließ die üblichen physikalischen Wege und betrachtete das physikalische System als ein Besetzungszahlproblem. Für ihn waren die Zellen keine Jahrestage, wie beim Geburtstagsproblem, sondern die Energieniveaus der Photonen. Statt Personen auf Zellen zu verteilen, verteilte er Photonen auf diese Zustände. Auch in den anderen Naturwissenschaften gibt es viele Anwendungen von Besetzungszahlproblemen. Beispielsweise lässt sich in der Biologie die Ausbreitung von Epidemien als ein Besetzungszahlproblem formulieren – die Zellen sind in diesem Fall geographische Gebiete, und die Kugeln entsprechen Krankheiten. Das Problem besteht darin, herauszufinden, in welchen Gebieten die Krankheiten besonders häufig auftreten.

Die Welt ist voller überraschender Zufälle, doch nur die Mathematik gibt uns die Möglichkeiten an die Hand, ihre Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Das klassische Geburtstagsproblem ist nur die Spitze des Eisbergs, und in diesem Sinne ist es ein Einstieg in einen ernsthaften Bereich der Mathematik mit wichtigen Anwendungen.

Worum es geht

Die Berechnung von Zufällen