

## 2 Muster und Strukturen – wegweisend für algebraisches Denken

*The beauty [...] is, in many cases, a highly abstract, inner beauty, a beauty of abstract form and logical structure, a beauty that can be observed, and appreciated, only by those sufficiently well trained in the discipline.*

(Devlin 1997, S. 6)

Im vorangegangenen Kapitel wurden **Muster und Strukturen** bereits als wesentliches Element der algebraischen Denkförderung herausgearbeitet. In der Beschäftigung mit Beziehungen von konkreten Zahlobjekten oder geometrischen Objekten zueinander wird ein möglicher Weg zur Förderung der Sicht auf die mathematischen Strukturen als neue (abstrakte) Objekte der gedanklichen Auseinandersetzung gesehen.

Muster und Strukturen haben bei der Förderung und Anregung algebraischen Denkens insbesondere aus der *Perspektive der Generalisierung* von arithmetischen Problemen große Bedeutung: „What needs to be learned about generalizing is the process of exploring a given situation for patterns and relationships, organizing the data systematically, recognizing the relations and expressing them verbally and symbolically, and seeking explanation and appropriate kinds of justification or proof according to level?“ (Bell 1995, S. 50).

In der aktuellen Sicht der *Mathematik* wird diese häufig generell *als Wissenschaft von den Mustern* bezeichnet. Dies betrifft natürlich die mathematischen Strukturen, die sich in Zahlen oder Formen ganz allgemein finden lassen. Mathematik beschreibt diese Muster in ihrer Sprache und in mathematischen Funktionen, Relationen, Aussagen. Wittmann mahnt, man müsse sich „auf die *wahre Natur des Faches Mathematik* besinnen: *Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern*, die im Prozess entwickelt, erforscht, fortgesetzt und verändert werden können“ (Wittmann 2004, Hervorhebungen im Original, S. 1).

In der Literatur findet sich eine doppelte Interpretation und Sichtweise des Themenfelds ‚Muster und Strukturen‘: Zum einen als eigenständiges Inhaltsgebiet und zum anderen als grundlegende Idee, die sich durch alle Gebiete der Mathematik hindurchzieht bis hin zur oben zitierten Deutung der Mathematik selbst als Wissenschaft von den Mustern (vgl. auch Wittmann 2003). In reichhaltigen mathematischen Fragestellungen und Lernumgebungen kann es demzufolge immer zumindest ermöglicht werden, auch zu Grunde liegende Strukturen und Muster für ihre Entdeckung und Beschäftigung bereitzustellen (vgl. Steinweg 2003, 2000a).

## 2.1 Muster und Strukturen in Bildungsstandards und Lehrplänen

Muster und Strukturen als vermeintlich eigenständiges Thema treten in den sogenannten inhaltsbezogenen Kompetenzen der Bildungsstandards Mathematik der Grundschule (KMK 2004, vgl. auch Walther et al. 2007) neben Zahlen und Operationen, Raum und Form, Größen und Messen, Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit auf:

### „3.3 Muster und Strukturen

#### *Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen*

- strukturierte Zahldarstellungen (z. B. Hunderter-Tafel) verstehen und nutzen,
- Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z. B. in Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen,
- arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben.

#### *funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen*

- funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben (z. B. Menge–Preis) und entsprechende Aufgaben lösen,
- funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen,
- einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen“

(KMK 2004, S. 10 f.)

Diesem Verständnis der Muster und Strukturen als ‚neuen‘ Inhaltsbereich schließt sich z. B. auch der Bildungsplan Grundschule Mathematik Hamburg (2011) sowie der in Baden-Württemberg (2004) an. Letzterer präsentiert ihn als vierte Leitidee. Für die Kompetenzen nach Jahrgang 4 heißt es:

„Die Schülerinnen und Schüler können geometrische und arithmetische Muster in innermathematischen und außermathematischen Kontexten erkennen, be-

schreiben und Vorhersagen zur Fortsetzung treffen; Zeichen und Symbolkonstellationen als verschlüsselte Informationsquellen und als Notationsform in unterschiedlichen Zusammenhängen erkennen; analoge Muster selbst kreativ entwickeln, beschreiben und mit anderen – auch historischen – vergleichen; Regelmäßiges und einfache arithmetische Gesetzmäßigkeiten erkennen, erklären und für eigenes Gestalten nutzen; aus Sachaufgaben die mathematische Struktur herauslösen und umgekehrt vorgegebene Strukturen veranschaulichen.

#### Inhalte

- Zeichen, Symbole, Formen, Figuren, Zahlen
- Muster mit Bezügen zu Kunst und Geschichte (römische Ornamente)<sup>44</sup> (Baden-Württemberg 2004, S. 61).

Es wird hier gleichsam deutlich, dass obwohl die eigenständige Leitidee ‚Muster und Strukturen‘ zu anderen Leitideen und Inhaltsbereichen abgegrenzt wird, doch eine Verwobenheit mit diesen gesehen und eingefordert wird. Dennoch bleiben die angedeuteten Inhaltsaufgaben als illustrierende Beispiele für die Lehrpersonen in der Praxis in diesem Bildungsplan insbesondere auf spezielle Aufgaben begrenzt. Die Nennung von Symbolkonstellationen, die vermutlich auch auf Darstellung in Variablenform abzielt, bleibt eher vage.

Wittmann und Müller (2007) kommentieren die beschriebene *Doppelbedeutung des Themas ‚Muster und Strukturen‘*, indem sie den Inhaltsbereich der Bildungsstandards als „übergeordnet“ identifizieren. Sie zeigen anhand von theoretischen Ausführungen und Beispielen, „dass es sich bei *Muster und Strukturen* nicht einfach um einen Aspekt des Mathematikunterrichts handelt, sondern dass dieser Aspekt grundlegend ist“ (Wittmann und Müller 2007, S. 42, H. i. O.). Dieser integrative Ansatz wird ebenfalls im Lehrplan Nordrhein-Westfalen (2008) oder auch in Thüringen (2010) verfolgt, indem Muster nicht als eigenständige Inhaltsidee auftreten, sondern an gegebener Stelle bei anderen Inhalts- und Prozessbeschreibungen. „Dem Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen kommt eine wesentliche Rolle im Mathematikunterricht zu. Muster und Strukturen bestimmen häufig die einzelnen Themenbereiche und können zur Verdeutlichung zentraler mathematischer Grundideen genutzt werden. Von daher werden sie im Folgenden nicht als eigener Bereich ausgewiesen, sondern sind integraler Bestandteil aller Bereiche“ (Nordrhein-Westfalen 2008, S. 56). Dabei werden geometrische und arithmetische Muster gleichermaßen erwähnt sowie das entdeckende Erarbeiten und auch die kreative Gestaltung eigener Muster in den Blick genommen: „Erfassen, Erforschen, Verändern und Neugestalten arithmetischer und geometrischer Muster“ (Thüringen 2010, S. 9).

## 2.2 Muster und Strukturen in internationalen Standards

In internationalen Standards finden sich ebenfalls diverse Hinweise auf Muster. Bemerkenswert ist, dass *Muster und Strukturen* hier ohne jede Vorbehalte *explizit der Algebra zugeordnet* werden. In den deutschen Bildungs- und Lehrplänen im Bereich der Grundschule hingegen wird der Begriff ‚Algebra‘ in keinem Bundesland namentlich erwähnt. Sogar im Rahmenlehrplan Grundschule Mathematik Berlin und Brandenburg (2004), der für die Grundschule Inhalte und Prozesskompetenzen bis zur 6. Jahrgangsstufe (Berliner Modell) beschreibt, fehlt eine solche explizite Nennung. Lediglich im Kerncurriculum für die Grundschule Niedersachsen (2006) findet sich im Glossar ein Hinweis auf verschiedene Zahlaspekte, in denen ein algebraischer Aspekt genannt wird, der sich auf die Eigenschaften der Rechenoperationen (Kapitel 4) bezieht: „Zahlen als Rechenzahlen für algebraische Strukturen und Gesetzmäßigkeiten ( $3 + 5 = 5 + 3$ )“ (Niedersachsen 2006, S. 40).

In den **Vereinigten Staaten von Amerika** gibt es kein nationales Curriculum oder allgemein gültige Bildungsstandards. Wesentliche Orientierung für lokale Bildungspolitik oder schulinterne Curricula bieten jedoch die durch das National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000) formulierten Standards. Hier gehören Muster zum Inhaltsbereich Algebra, der bereits vom Kindergarten an als eigener Bereich gelistet wird und über alle Schuljahre hinweg (d. h. vom Kindergarten bis Jahrgang 12) folgende Kompetenzziele festhält:

- Understand patterns, relations, and functions
- Represent and analyze mathematical situations and structures using algebraic symbols
- Use mathematical models to represent and understand quantitative relationships
- Analyze change in various contexts

Die Muster und Beziehungen werden in diesen Standards zunächst unabhängig vom Gebrauch von algebraischen Symbolen gesehen. Für die einzelnen Jahrgangsstufen differenziert und ausführlicher dargelegt, finden sich in den NCTM-Standards für den Unterpunkt ‚Muster, Relationen und Funktionen‘, die in Tabelle 2.1 dargestellten Ziele.

Auch in dieser Übersicht wird deutlich, dass die ersten symbolischen Darstellungen von Mustern erst ab Jahrgang 6 vorgesehen werden und in den unteren Jahrgängen das Erkennen von Mustern und die verbalen Beschreibungen oder das Nutzen von Tabellen im Vordergrund stehen. Im Unterschied zu vielen deutschen Lehrplänen werden für die Beschreibungen ab dem 3. Jahrgang auch bereits Grafen einbezogen.

**Tabelle 2.1** Ziele der Jahrgänge nach NCTM (2000) Standards (US)

Pre-K-2 Expectations	<p>In pre-K through grade 2 all students should-</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• sort, classify, and order objects by size, number, and other properties;</li> <li>• recognize, describe, and extend patterns such as sequences of sounds and shapes or simple numeric patterns and translate from one representation to another;</li> <li>• analyze how both repeating and growing patterns are generated.</li> </ul>
Grades 3-5 Expectations	<p>In grades 3-5 all students should-</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• describe, extend, and make generalizations about geometric and numeric patterns;</li> <li>• represent and analyze patterns and functions, using words, tables, and graphs.</li> </ul>
Grades 6-8 Expectations	<p>In grades 6-8 all students should-</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• represent, analyze, and generalize a variety of patterns with tables, graphs, words, and, when possible, symbolic rules;</li> <li>• relate and compare different forms of representation for a relationship;</li> <li>• identify functions as linear or nonlinear and contrast their properties from tables, graphs, or equations.</li> </ul>

In **Großbritannien** ist ein *nationales Curriculum* verbindlich vorgeschrieben. Im Jahr 2011 wurde es wesentlich überarbeitet. Es ist wiederum in Jahrgangsbereiche strukturiert und gibt Hinweise für die zu erreichenden Ziele in diesen sogenannten Key Stages. Key Stage 1 umfasst dabei die Schulbesuchsjahre 1 und 2, Key Stage 2 die Schulbesuchsjahre 3 bis 6.

Zusätzlich zur Einteilung in Jahrgangsbereiche werden Niveaustufen (level) formuliert, die sich über alle Schuljahre hinweg verteilen und damit eine durchgängige Zielsetzung in verschiedenen Tiefen und Breiten deutlich machen. Den Jahrgangsbereichen werden die Niveaustufen insofern zugewiesen, dass im Mittel davon ausgegangen wird, dass die meisten Kinder am Ende des Key Stage 1 die zweite Stufe und am Ende von Key Stage 2 die vierte Stufe erreichen (vgl. Department of Education UK 2011).

Im Gegensatz zu früheren Versionen des nationalen Curriculums in Großbritannien werden keine sehr ausführlichen Hinweise und Beispiele mehr wie in einem festen Rahmen gegeben, sondern lediglich die Stufen, die erreicht werden sollen, grob skizziert. Zum Themenfeld ‚Muster und Strukturen‘ finden sich, wie schon bei den NCTM-Standards, Hinweise im Bereich „Number and

Algebra“. Auch hier wird der Begriff der Algebra von Anfang an genutzt, da die Niveaustufen über alle Schuljahre hinweg formuliert sind.

**Tabelle 2.2** Zielbeschreibungen nach Stufen (Department of Education UK 2011)

Attainment target level descriptions “Ma2 Number and algebra”	
Level 1	Pupils count, order, add and subtract numbers when solving problems involving up to 10 objects. They read and write the numbers involved.
Level 2	[...] They use the knowledge that subtraction is the inverse of addition. [...] They recognise sequences of numbers, including odd and even numbers
Level 3	[...] They use mental recall of the 2, 3, 4, 5 and 10 multiplication tables and derive the associated division facts. [...]
Level 4	[...] Pupils recognise and describe number patterns, and relationships including multiple, factor and square. They begin to use simple formulae expressed in words. Pupils use and interpret coordinates in the first quadrant
Level 5	[...] They construct, express in symbolic form, and use simple formulae involving one or two operations. They use brackets appropriately. Pupils use and interpret coordinates in all four quadrants.

Etliche Hinweise verweisen auf Eigenschaften von Rechenoperationen, die hier in Kapitel 3 noch einmal aufgegriffen werden. Zudem werden Zahlenfolgen und Muster und Beziehungen als Ziele benannt. Bezüglich der Muster findet sich eine Zuordnung der symbolischen Beschreibung von Muster und Strukturen erst nach dem sechsten Schulbesuchsjahr. Durch die Formulierung von durchgängigen Zielen wird deutlich, dass die individuelle Entwicklung der Schülerinnen und Schüler auch in den unteren Jahrgängen bereits auf höheren Niveaustufen verortet werden kann, die curriculare Zielsetzung für den Großteil der Kinder liegt jedoch bei der verbalen Beschreibung von Mustern.

Ferner weist das nationale Curriculum von Großbritannien darauf hin, dass Wissen, Fertigkeiten und Verstehen *explizit* auch *durch Muster* gefördert werden sollen. Hier wird der Bezug zur Algebra noch deutlicher, indem es heißt: „During the key stage, pupils should be taught the knowledge, skills and understanding through: [...] c. using patterns and relationships to explore simple algebraic ideas“ (Department of Education UK 2011).

## 2.3 Muster regen das Denken an

Zusammenfassend können Muster und Strukturen als Wesenselement der Mathematik selbst, als Inhaltsobjekt der Auseinandersetzung spätestens vom ersten Schuljahr an und gleichzeitig auch als Element der Algebra identifiziert werden, wie in den internationalen Standards deutlich wird.

Die Beschäftigung mit Mustern ist dabei eine innermathematische Auseinandersetzung mit Zahlen, geometrischen Formen und Zahlbeziehungen. Es kann dabei auf äußere Motivation durch Einkleidungen und außermathematische Bezüge verzichtet werden. Die Muster haben an sich einen *Aufforderungscharakter*, der im besten Fall zu einem spielerischen, kreativen Umgang führt und vor allem Denkprozesse fördert, die in Routineaufgaben von Rechenprozeduren fehlen.

Muster regen dazu an, *über die Mathematik nachzudenken* und die Muster zu nutzen, zu beschreiben und ggf. auch Erklärungsversuche abzugeben. Damit werden die allgemeinen Bildungsstandards des Problemlösens, Kommunizierens und Argumentierens angesprochen, aber auch die des Darstellens, da ein Muster z. B. in Sprache übersetzt und somit in eine andere Darstellungsform übertragen wird. Gleichsam ergibt sich, dass diese Art der mathematischen Denk- und Handlungsweise auch algebraischen Charakter hat, indem deutlich wird, dass nicht das Produkt eines singulären Lösungsprozesses in den Vordergrund rückt, sondern die Struktur des Musters, das Konzept, Objekt der Auseinandersetzung ist. Diese ‚prozeptuelle‘ oder auch konzeptionelle Sicht kann sogar in Beziehung gebracht werden zur allgemeinen Denkförderung: „Das Denken in Mustern bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie, weil viele Einzelfälle mit einem Schlag gemeinsam erfasst werden können. Unser ganzes kognitives System ist auf Muster ausgerichtet, denn das Gehirn wäre nicht in der Lage, jeden Einzelfall gesondert zu behandeln. Erkennen basiert immer auf Musterbildung“ (Wittmann und Müller 2007, S. 48).

Lernenden, denen es gelingt, Muster zu *erkennen*, die dahinterliegenden Strukturen zu *beschreiben* und ggf. zudem mathematisch zu *begründen*, agieren auf einer Art **Metaebene** über der rein arithmetischen Betrachtung und Lösung von Prozeduren. Die arithmetischen Prozeduren sind dabei integrativer Bestandteil der Musterbetrachtung und keineswegs überflüssig. Routiniert ausgebildete Kompetenzen in Rechenfertigkeiten und Kenntnissen (z. B. des Einspluseins) unterstützen umgekehrt den Überblick über ein Muster sowie dessen Beschreibung.

In Anlehnung an Wittmann und Müller (1992, S. 180) werden zwei Wesen von Mustern unterschieden: *reflexive* und *immanente*, d. h. inhärente Strukturen. Bei inhärenten Mustern ist dieses gleichsam Bestandteil der Aufgabe und somit von

Beginn der Beschäftigung an im Handeln und Denken verankert. Eine reflexive Übung ergibt erst nach der Erstbegegnung auf prozeduraler Rechenebene ein Muster in den erzielten Ergebnissen. Diese können dann in der Reflexion danach entdeckt und beschrieben werden.

In beiden Formen ist eine Phase der **bewussten Wahrnehmung** des Musters enthalten, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten der Auseinandersetzung möglich wird. Bei einer reflexiven Aufgabe tritt sie in der Reflexionsphase auf, bei einer immanenten muss von Anfang an das Muster bewusst beachtet werden. „Bewußtheit entsteht in der Regel dann, wenn wir stutzig werden, und, anstatt sofort zu handeln, innehalten, um die verschiedenen Verhaltensmöglichkeiten im Geiste durchzugehen“ (Donaldson 1982, S.105 f.). Momente des Stutzigwerdens können nur durch solche Aufgaben initiiert werden, bei denen es etwas zu entdecken gibt. „Rechnen und Nachdenken gehören dabei zusammen und sind in unterschiedlicher Intensität und unterschiedlicher Reihenfolge denkbar“ (Steinweg 2003, S. 68).

Das Argument, Denken in Mustern sei nur besonders leistungsstarken Lernenden möglich, geht dabei fehl. Vielmehr ist ein umgekehrtes Phänomen in der Praxis erkennbar: Diejenigen Lernenden, die Muster auf einer ‚prozeptuellen‘ und konzeptuellen Ebene betrachten, werden, weil sie es können, oftmals auch als leistungsstark identifiziert (Wittmann und Müller 2007, S. 49). Es zeigt sich in den Erfahrungen z. B. im Algebraprojekt (Anhang), dass auch und vielleicht gerade ‚rechenschwächere‘ Kinder, denen die Routinen der prozeduralen, arithmetischen Auseinandersetzung nicht so leicht von der Hand gehen, Begeisterung für Muster zeigen und diese auch entdecken können. Die Strukturen innerhalb einer Aufgabe sind für sie also umgekehrt eine Unterstützung, die u. U. weniger ausgefeilten arithmetischen Kompetenzen mit mathematischem Blick auf Strukturen zu stützen.

## 2.4 Über Folgen nachdenken – algebraisches Denken fördern

Folgen aus geometrischen Objekten oder aus Zahlen spielen deshalb in der Förderung algebraischen Denkens eine besondere Rolle, da der Fokus der Aufmerksamkeit auf der Suche nach der Aufbaustruktur liegt. Mindestens drei Elemente der Arbeit mit Folgen zielen zumindest indirekt auf die Förderung algebraischen Denkens.

### ■ Fokus auf Beziehungen der Objekte

Die Bearbeitung von Folgen erwartet im besten Fall nicht nur passende weitere Folgenglieder, sondern auch eine Auskunft über ‚die Regel‘, die hinter dem Mus-



ter steht. Beim Versuch, die Aufbauregel zu erkennen, können auch arithmetische Überlegungen eine Rolle spielen, da z. B. die Anzahl gleicher Objekte, die hintereinander auftreten, beachtet werden muss. Ebenso kann die Beziehung zwischen den Folgengliedern, wenn es sich um Zahlenfolgen handelt, arithmetischer Natur sein. Insgesamt verschiebt sich jedoch der Fokus auf eben diese verbindenden Operationen und nicht auf ‚die Lösung‘ einer einzelnen Rechenaufgabe. Dies sind wichtige Denkhandlungen, die für algebraisches Denken wertvoll sind.

#### ■ **Strukturen nutzen und beschreiben**

Die *Aufbauregel* muss nicht zwingend mündlich oder schriftlich geäußert werden. Um weitere Folgeglieder zu bestimmen, muss aber über eine passende Regel nachgedacht werden; und genau hier ist die Nähe zu algebraischem Denken zu erkennen. Die Einzelobjekte, also die Folgeglieder, müssen in ihren Beziehungen zueinander erkannt werden. Diese *Beziehungen* begründen eine Struktur, ein Muster, dem auch alle weiteren Glieder folgen.

Das Verständnis von Zahlenmustern kann in verschiedenen Schritten des Verstehens erfolgen (Steinweg 2001, S. 115 ff.). Die Komplexität und Anforderung des Musterverständnisses steigt dabei zunehmend an. Zunächst gilt es, Muster zu *erkennen* und z. B. für Fortsetzungen zu *nutzen*. Hierfür muss, wie oben beschrieben, bereits ein individuelles Verständnis der Struktur aufgebaut worden sein. Es zeigt sich implizit in der Fortsetzung des Musters. Muster zu *beschreiben*, erfordert in einem nächsten Schritt eine verbale Darstellung (schriftlich oder mündlich), die die vorliegende Struktur exemplarisch in die Beschreibung einbezieht oder aber schon generalisierend die Struktur als solche allgemeiner darstellt. Im letzten Schritt des Verstehens können Muster *begründet* werden. Die Struktur wird also nicht nur dargestellt, sondern ihr Auftreten auch mathematisch in seinen Zusammenhängen erklärt. Auch hier ist es wiederum vorstellbar, dass die Begründungen am Beispiel verhaftet bleiben oder aber auf Allgemeingültigkeit des erkannten Phänomens verweisen.

#### ■ **Unvollständigkeit der konkreten Lösung erfahren**

Zudem ist es bei Folgen aus geometrischen Objekten oder aus Zahlen offensichtlich, dass die Folge unendlich fortgesetzt werden kann. Es kann somit *keine abschließende und allumfassende Lösung* geben, die im Heft oder an der Tafel festgehalten werden könnte. Die Schülerinnen und Schüler lernen also einen Aufgabentyp kennen, der eine nicht abgeschlossene, konkrete Lösung hat. Auch hierin liegt ein Wesenszug von algebraischen Aufgaben, die oft nicht als konkrete Einzellösung, sondern als in gewisser Weise noch offene Antworten von den Lernenden akzeptiert werden müssen. Je älter die Lernenden sind, umso eher kann von dieser Unabgeschlossenheit ausgehend der Impuls erwachsen, das

Muster ‚anders‘ zu verstehen und durch erste ‚Formeln‘ zu fassen, in denen auch Variablen eine Rolle spielen können (Kapitel 5).

Wenn diese Elemente unter der Brille der algebraischen Kompetenz den Lehrpersonen bewusst sind, so können diese durch **Bewusstmachung im Gespräch** oder in der Art und Weise der individuellen Reaktion auf Bearbeitungen auch für die Schülerinnen und Schüler erkennbar werden. Das bedeutet konkret, die Offenheit der ‚Lösung‘ bei Folgen anzusprechen, die Beziehungen zwischen Folgengliedern auch optisch (z. B. durch Pfeilbilder, Farben) hervorzuheben und zu thematisieren, die erkannten ‚Regeln‘ zu verbalisieren und unterschiedliche Regeln zu diskutieren.

Im Gegensatz zum Irrglauben, Folgen seien eindeutig nach einem bestimmten Muster fortsetzbar, wie er immer dann deutlich wird, wenn z. B. Tests eine Auswertung in falsche und richtige Fortsetzungen vorsehen, sind Folgen mathematisch auf *sehr unterschiedliche Art und Weisen* ‚richtig‘ fortsetzbar. Beim Einsatz von Folgen im Primar- und unterem Sekundarbereich ist das Kriterium für eine ‚richtige‘ Fortsetzung allein dies, dass die Aufbauregel sinnvoll erklärt werden kann. Selbst die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... muss dabei nicht mit den Folgengliedern 5, 6 usw. fortgesetzt werden. Genauso stimmig wäre es, die Folge wie eine ‚Welle‘ zu interpretieren, bei der die Glieder zunächst ansteigen und dann wieder absteigen: 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, ... oder in der Variation der Dopplung des ‚ersten‘ Glieds auch 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, ...

Folgen oder auch ‚wachsende Muster‘ sind aber nicht auf Zahlen als Objekte beschränkt. Die Geschichte der Algebra lehrt, dass es eben gerade nicht darum geht, nur Zahlen, sondern Strecken, Volumina oder Flächen als Objekte der Betrachtung zu nutzen. Algebraisches Denken wird als Denken in Beziehungen dieser Objekte zueinander verstanden: „Algebra is foremost a means to manipulate relations“ (Charbonneau 1996, S. 35).

Im Weiteren werden nun zunächst Folgen in Formen- und Farbenmustern und dann in Zahlenfolgen näher betrachtet. Zahlenfolgen sind dabei nicht allein auf ihren Urtypus einer Folge beschränkt, sondern sie lassen sich auch in andere Aufgabenformate hineindeuten und darin entdecken. Geometrische Muster und Zahlenmuster können dabei zu Darstellungen in Form von Termen führen. Das Wechsel- und Zusammenspiel zwischen geometrischer Repräsentation und Term wird noch einmal besonders im Folgenden betrachtet.

## 2.5 Formen- und Farbenmuster

In diversen Veröffentlichungen im boomenden Feld der mathematischen Frühförderung finden sich Problemstellungen, in denen Kinder **Folgen aus geo-**



<http://www.springer.com/978-3-8274-2079-4>

Algebra in der Grundschule  
Muster und Strukturen– Gleichungen– funktionale  
Beziehungen  
Steinweg, A.S.  
2013, IX, 278 S. 170 Abb., Softcover  
ISBN: 978-3-8274-2079-4