

# Table des matières

Préambule . . . . .	xv
Bibliographie . . . . .	xxi
<b>I L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques</b> <i>par Laurent Fargues</i>	
<b>Introduction . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>I Décomposition cellulaire de la tour de Lubin-Tate</b>	
I.1 Hypothèses et notations . . . . .	10
I.1.1 Espaces . . . . .	11
I.1.2 Action . . . . .	12
I.1.3 Scindage de l’espace de Rapoport-Zink . . . . .	12
I.1.4 Donnée de descente de Rapoport-Zink . . . . .	12
I.1.5 Polygone de Newton des points de torsion . . . . .	13
I.2 Application des périodes . . . . .	15
I.2.1 Définition . . . . .	15
I.2.2 Interprétation en termes du cristal $\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle . . . . .	17
I.2.3 La donnée de descente sur l’espace des périodes . . . . .	18
I.2.4 Formules explicites pour l’application des périodes et applications . . . . .	18
I.3 Domaine fondamental de Lafaille/Gross-Hopkins . . . . .	21
I.3.1 Lien entre le domaine fondamental et les points C.M . . . . .	26
I.4 Généralisation d’un théorème de Gross-Hopkins . . . . .	26
I.5 L’espace des paramètres de la décomposition cellulaire . . . . .	30
I.6 Les cellules rigides en niveau fini . . . . .	31
I.6.1 Digression philosophique . . . . .	31
I.6.2 Structures de niveau . . . . .	31

I.6.3	Fonctorialité de Hecke des $\mathcal{M}_{\Lambda, K}$ . . . . .	32
I.6.4	Les cellules . . . . .	34
I.6.5	Bord des cellules . . . . .	35
I.6.6	Donnée de recollement . . . . .	36
I.6.7	Réécriture en termes des arrêtes orientées de l'immeuble .	37
I.7	Décomposition cellulaire des espaces rigides en niveau fini . . . . .	37
I.8	Modèles entiers des cellules . . . . .	39
I.8.1	Niveau fini . . . . .	39
I.8.2	Niveau infini . . . . .	44
I.8.3	Donnée de descente . . . . .	45
I.9	Le schéma formel recollé en niveau fini . . . . .	45
I.10	Le schéma formel en niveau infini . . . . .	46
I.11	Décomposition cellulaire écrasée en niveau fini . . . . .	47
I.12	Une autre décomposition cellulaire . . . . .	48
<b>A Normalisé d'un schéma formel dans une extension de sa fibre générique</b>		
A.1	Généralités sur les espaces rigides . . . . .	49
A.2	Schémas formels normaux . . . . .	51
A.3	Normalisé dans une extension de la fibre générique . . . . .	52
<b>B Modules de Dieudonné et cristaux des <math>\mathcal{O}</math>-modules <math>\pi</math>-divisibles</b>		
B.1	Un lemme sur les $F$ -cristaux $\mathcal{O}$ -équivariants . . . . .	54
B.2	Structure du cristal de Messing d'un $\mathcal{O}$ -module $\pi$ -divisible . . . . .	56
B.3	$\mathcal{O}$ -extension vectorielle universelle d'un $\mathcal{O}$ -module $\pi$ -divisible . . . . .	56
B.4	Cristal de Messing généralisé et théorie de la déformation . . . . .	59
B.5	Exponentielle $\pi$ -adique . . . . .	60
B.5.1	$\mathcal{O}$ -puissances divisées ([17] section 10, [11] section 7) . . . . .	60
B.5.2	Logarithme . . . . .	61
B.5.3	Exponentielle . . . . .	63
B.6	Extension du cristal de Messing généralisé aux $\mathcal{O}$ -puissances divisées . . . . .	66
B.7	Théorie de la déformation des $\mathcal{O}$ -modules $\pi$ -divisibles . . . . .	69
B.8	Théorie de Dieudonné "classique" des $\mathcal{O}$ -modules $\pi$ -divisibles . . . . .	69
	Bibliographie . . . . .	71

## II L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld au niveau des points

II.1	Suite de Hodge-Tate des groupes $p$ -divisibles dans le cas infiniment ramifié . . . . .	77
II.1.1	Décomposition de Hodge-Tate d'un $\mathcal{O}$ -module $\pi$ -divisible . . . . .	80
II.2	Propriétés particulières de l'application de Hodge-Tate pour les groupes $p$ -divisibles formels de dimension 1 . . . . .	81
II.2.1	Les périodes de Hodge-Tate vivent dans l'espace de Drinfeld . . . . .	81
II.2.2	Raffinement, d'après Faltings . . . . .	82
II.2.3	Formule exacte . . . . .	84
II.3	Notations concernant les espaces de Lubin-Tate et de Drinfeld . . . . .	85
II.3.1	Modules de Dieudonné . . . . .	86
II.3.2	Notations concernant les espaces de Lubin-Tate . . . . .	86
II.3.3	Notations concernant les espaces de Drinfeld . . . . .	87
II.3.4	Quelques rappels sur Drinfeld classique . . . . .	88
II.4	Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{L}T}(K)/\sim$ en termes de modules filtrés . . . . .	90
II.5	Description de $\mathcal{M}^{\mathcal{D}r}(K)/\sim$ en termes de module filtré . . . . .	91
II.6	Prolongement des isogénies . . . . .	92
II.6.1	Prolongement . . . . .	92
II.6.2	Définition de l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ sur $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ . . . . .	92
II.7	Diverses descriptions des points de la tour de Lubin-Tate en niveau infini . . . . .	93
II.7.1	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés . . . . .	93
II.7.2	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ uniquement en termes du module de Tate . . . . .	94
II.7.3	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ en termes d'algèbre linéaire . . . . .	95
II.8	Diverses descriptions des points de la tour de Drinfeld en niveau infini . . . . .	96
II.8.1	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes de modules filtrés rigidifiés . . . . .	96
II.8.2	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ uniquement en termes du module de Tate . . . . .	97
II.8.3	Description de $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ en termes d'algèbre linéaire . . . . .	98
II.9	La bijection au niveau des points . . . . .	98
II.9.1	L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K)$ . . . . .	100
II.9.2	L'application $\mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{L}T}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{\infty}^{\mathcal{D}r}(K)$ . . . . .	101
II.9.3	Les deux applications sont inverses l'une de l'autre . . . . .	103
II.9.4	Retraçage des actions . . . . .	103

II.9.5	Bijection entre les points des espaces de Berkovich associés . . . . .	103
II.10	Traduction en termes de matrices de périodes . . . . .	104
II.11	L'isomorphisme conserve le degré . . . . .	107
II.12	Un point de vue différent sur la bijection . . . . .	109
II.12.1	Identification de $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_H$ avec l'application de Hodge-Tate de $G^D$ . . . . .	110
II.12.2	Identification de $K^n \twoheadrightarrow K^n/\text{Fil}_G$ avec l'application de Hodge-Tate de $H^D$ . . . . .	111
II.12.3	L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K)$ . . . . .	112
II.12.4	L'application $\mathcal{M}_\infty^{\mathcal{L}T}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_\infty^{\mathcal{D}r}(K)$ . . . . .	115
II.12.5	Les deux applications sont inverses l'une de l'autre . . . . .	116
<b>C Périodes entières des groupes <math>p</math>-divisibles</b>		
C.1	Groupes $p$ -divisibles sur les anneaux d'entiers de corps non-archimédiens . . . . .	118
C.2	Théorèmes de comparaison . . . . .	119
C.2.1	Le déterminant des périodes divisé par $2i\pi$ est une unité $p$ -adique . . . . .	121
Bibliographie . . . . .		130
<b>III L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld :</b>		
<b>démonstration du résultat principal</b>		
III.1	La bestiole du côté Drinfeld . . . . .	139
III.2	Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \widehat{\Omega}$ . . . . .	142
III.2.1	Définition de l'application de Hodge-Tate sur une cellule de $\mathfrak{X}_\infty$ . . . . .	142
III.2.2	Rappels de quelques résultats de [9] sur l'application de Hodge-Tate dans le cas d'un point . . . . .	144
III.2.3	Quelques rappels sur le schéma formel de Deligne-Drinfeld . . . . .	145
III.2.4	Sur le conoyau de l'application de Hodge-Tate . . . . .	150
III.2.5	Éclatement de la cellule et construction du morphisme de la cellule éclatée vers $\widehat{\Omega}$ . . . . .	151
III.2.6	Recollement des morphismes sur les cellules . . . . .	153
III.3	Construction du morphisme $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty \longrightarrow \mathcal{Y}_\infty$ . . . . .	157
III.3.1	Étude des normalisés de $\widehat{\Omega}$ dans la tour de Drinfeld . . . . .	157
III.3.2	Définition modulaire de $\mathcal{Y}_\infty$ . . . . .	160
III.3.3	Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini . . . . .	161
III.3.4	Construction d'éléments dans le module de Tate du $\mathcal{O}_D$ -module formel spécial tiré en arrière sur $\tilde{\mathfrak{X}}_\infty$ . . . . .	163
III.3.5	Construction du morphisme . . . . .	166

III.3.6	Un remède au canular . . . . .	168
III.3.7	Construction du morphisme . . . . .	170
III.4	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$ . . . . .	171
III.4.1	Applications de Hodge-Tate . . . . .	172
III.4.2	Éclatements et conoyau de l'application de Hodge-Tate . . . . .	173
III.4.3	Construction du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}(\mathbb{D}(\mathbb{H}))$ . . . . .	175
III.5	Relèvement du morphisme $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^{n-1}$ vers une cellule de l'espace de Lubin-Tate . . . . .	177
III.5.1	Éclatement équivariant de l'espace projectif formel . . . . .	177
III.5.2	Tiré en arrière de l'éclatement de l'espace projectif vers $\tilde{\mathcal{Y}}_\infty$ . . . . .	178
III.5.3	Relèvement vers la cellule . . . . .	179
III.6	Construction du morphisme $\tilde{\tilde{\mathcal{Y}}}_\infty \rightarrow \mathfrak{X}_\infty$ . . . . .	179
III.6.1	Caractérisation modulaire de $\mathfrak{X}_\infty$ . . . . .	179
III.6.2	Sur la suite de Hodge-Tate en niveau infini . . . . .	181
III.6.3	Construction d'éléments dans le module de Tate du groupe de Lubin-Tate universel tiré en arrière sur $\tilde{\tilde{\mathcal{Y}}}_\infty$ . . . . .	181
III.6.4	Construction du morphisme de $\tilde{\tilde{\mathcal{Y}}}_\infty$ vers $\mathfrak{X}_\infty$ . . . . .	184
III.7	Construction de l'isomorphisme . . . . .	185
III.7.1	De nouveaux éclatements . . . . .	186
III.7.2	Retour aux suites de Hodge-Tate en niveau infini . . . . .	188
III.7.3	Démonstration du théorème principal . . . . .	190
<b>D Compléments sur les schémas formels <math>\pi</math>-adiques</b>		
D.1	Quelques lemmes d'algèbre $\pi$ -adique . . . . .	193
D.2	Rappels sur les schémas formels $\pi$ -adiques . . . . .	194
D.3	Morphismes affines . . . . .	194
D.4	Limite projective dans la catégorie des schémas formels $\pi$ -adiques . . . . .	195
D.5	Normalisation dans la fibre générique . . . . .	195
D.6	Commutation de la normalisation dans la fibre générique et du passage à la limite projective . . . . .	197
D.7	Éclatements formels admissibles . . . . .	198
D.7.1	Définition et premières propriétés . . . . .	198
D.7.2	Adhérence "schématique" de la fibre générique . . . . .	199
D.7.3	Transformée stricte . . . . .	200
D.7.4	Commutation à la limite projective . . . . .	201
Bibliographie . . . . .		201

## IV Comparaison de la cohomologie des deux tours

IV.1	Schémas formels $\pi$ -adiques . . . . .	211
IV.1.1	Rappels sur les schémas formels $\pi$ -adiques . . . . .	212
IV.1.2	Morphismes topologiquement de type fini . . . . .	212
IV.1.3	Morphismes topologiquement de présentation finie . . . . .	213
IV.1.4	Morphismes affines . . . . .	213
IV.1.5	Morphismes finis . . . . .	214
IV.1.6	Morphismes topologiquement plats . . . . .	214
IV.1.7	Limite projective dans la catégorie des schémas formels $\pi$ -adiques . . . . .	215
IV.1.8	Adhérence “schématique” de la fibre générique . . . . .	215
IV.1.9	Éclatements formels admissibles . . . . .	217
IV.2	La topologie des ouverts admissibles . . . . .	220
IV.2.1	La catégorie des ouverts admissibles . . . . .	220
IV.2.2	La topologie et le topos admissible . . . . .	221
IV.2.3	Le topos admissible . . . . .	222
IV.2.4	Topos limite projective contre topos total . . . . .	223
IV.2.5	Fonctorialité de la topologie et du topos admissible . . . . .	225
IV.2.6	Commutation des topos admissibles à la limite projective . . . . .	226
IV.3	Le point de vue spectral sur la topologie admissible . . . . .	231
IV.3.1	Rappels sur les espaces spectraux . . . . .	231
IV.3.2	Prétopologie quasicompacte sur les espaces spectraux et passage à la limite projective . . . . .	231
IV.3.3	Application au topos admissible . . . . .	233
IV.3.4	Description de l’espace $ \mathfrak{X}^{\text{rig}} $ comme espace de Zariski- Riemann : le point de vue de Huber et Fujiwara . . . . .	233
IV.3.5	Ouverts surconvergens et espace analytique de Berkovich . . . . .	238
IV.4	Étude des morphismes finis localement libres . . . . .	239
IV.4.1	Morphismes finis localement libres . . . . .	239
IV.4.2	Morphismes finis localement libres rig-étales . . . . .	241
IV.4.3	Rigidité . . . . .	243
IV.4.4	Décomplétion des schémas formels finis localement libres rig-étales . . . . .	246
IV.5	Étude d’une certaine catégorie de morphismes rig-étales . . . . .	249
IV.5.1	Définitions . . . . .	249
IV.5.2	Les morphismes de type $(\mathcal{E})$ engendrent la topologie étale des espaces rigides usuels . . . . .	250
IV.5.3	Rigidité . . . . .	251
IV.5.4	Décompletion . . . . .	251

IV.6	Le topos rig-étale d'un schéma formel $\pi$ -adique quasicompact . . .	252
IV.6.1	Sur un point concernant les topologies de Grothendieck . . . . .	252
IV.6.2	Définitions . . . . .	253
IV.6.3	Lien entre les sites $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}\text{-rig-ét}}$ et $\mathfrak{X}_{\text{rig-ét}}$ pour $\mathfrak{X}$ admissible . . . . .	254
IV.6.4	Le théorème principal sur la décomplétion des topos rig-étales . . . . .	255
IV.7	Le topos rig-étale d'un schéma formel $\pi$ -adique non-quasicompact . . . . .	257
IV.7.1	Le topos . . . . .	257
IV.7.2	Cycles évanescents . . . . .	259
IV.7.3	Cohomologie à support compact . . . . .	259
IV.8	Le formalisme des faisceaux équivariants lisses . . . . .	259
IV.8.1	Hypothèses . . . . .	259
IV.8.2	$G$ -faisceaux lisses . . . . .	260
IV.8.3	Les différentes opérations reliant $G$ -faisceaux, $G$ -faisceaux lisses et faisceaux . . . . .	261
IV.8.4	Les $G$ -faisceaux lisses forment un topos . . . . .	266
IV.8.5	Le théorème d'acyclicité . . . . .	266
IV.8.6	Faisceaux lisses sur une tour formée par un pro-torseur . . . . .	270
IV.9	Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces analytiques de Berkovich . . . . .	274
IV.9.1	Rappels sur les faisceaux mous sur le site étale . . . . .	274
IV.9.2	Les quatre suites spectrales de cohomologie de Čech per- mettant de calculer la cohomologie à support compact . .	276
IV.9.3	Ouverts distingués . . . . .	278
IV.9.4	Les sites quasi-étales, quasi-étales compacts et étales . . .	281
IV.9.5	Faisceaux équivariants lisses . . . . .	282
IV.9.6	Résolutions molles de Godement-Berkovich . . . . .	285
IV.9.7	Le complexe de cohomologie à support compact équivariant lisse . . . . .	287
IV.9.8	Le complexe de cohomologie équivariant lisse à support dans un domaine analytique compact . . . . .	287
IV.9.9	Les opérations d'induction/restriction pour les faisceaux équivariants lisses . . . . .	289
IV.9.10	Les quatre résolutions/suites spectrales permettant de calculer la cohomologie à support compact équivariante lisse . . . . .	293

IV.10 Cohomologie à support compact équivariante-lisse des espaces rigides généralisés . . . . .	295
IV.11 Cohomologie à support compact équivariante- lisse des tours d'espaces analytiques . . . . .	301
IV.11.1 Hypothèses et notations . . . . .	301
IV.11.2 Faisceaux de Hecke sur la tour . . . . .	302
IV.11.3 Le complexe de cohomologie à support compact de la tour . . . . .	305
IV.11.4 Objets cartésiens sur la tour et domaine fondamental pour l'action des correspondances de Hecke . . . . .	306
IV.11.5 Faisceaux cartésiens sur la tour et espaces de périodes . .	312
IV.11.6 Résolution de Čech de la cohomologie de la tour par la cohomologie des cellules . . . . .	315
IV.11.7 Rajout d'une donnée de descente . . . . .	315
IV.12 Faisceaux de Hecke cartésiens et faisceaux rigides équivariants en niveau infini . . . . .	316
IV.12.1 Faisceaux lisses sur une tour . . . . .	316
IV.12.2 Principaux résultats . . . . .	317
IV.13 Application aux tours de Lubin-Tate et de Drinfeld . . . . .	319
IV.13.1 La correspondance de Jacquet-Langlands locale géométrique . . . . .	319
IV.13.2 Comparaison des complexes de cohomologie des deux tours . . . . .	320
Bibliographie . . . . .	321
<b>Index</b> . . . . .	323

## II L'isomorphisme des deux tours

### Une autre approche en égales caractéristiques

*par* **Alain Genestier et Vincent Lafforgue**

<b>Introduction</b> . . . . .	329
<b>I Rappels sur les deux tours et énoncé du théorème</b>	
I.1 Notations . . . . .	331
I.2 $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_D$ -modules formels . . . . .	332
I.3 Tour de Lubin-Tate . . . . .	333
I.4 Tour de Drinfeld . . . . .	335
I.5 Énoncé du théorème . . . . .	337



<b>II Théorèmes de représentabilité explicites</b>	
II.1	Modules de coordonnées . . . . . 341
II.2	Côté Lubin-Tate . . . . . 343
II.2.1	Structures de niveau . . . . . 345
II.2.2	Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente . . . . . 346
II.3	Côté Drinfeld . . . . . 348
II.3.1	Structures de niveau . . . . . 359
II.3.2	Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ et de la donnée de descente . . . . . 361
II.3.3	Le recouvrement mentionné en I.5, associé aux simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ . . . . . 363
<b>III Tour de Lubin-Tate et domaines fondamentaux</b>	
III.1	Décomposition cellulaire de la tour . . . . . 365
III.2	Le domaine fondamental . . . . . 369
<b>IV Réduction aux domaines fondamentaux</b>	
IV.1	Enoncé du théorème . . . . . 371
IV.2	Unicité de $\varphi_{P-\bullet\mathcal{O}^a}$ et de ses localisés, équivariance et recollement . . . . . 373
<b>V Démonstration du théorème IV.1.1</b>	
V.1	L'anneau intermédiaire . . . . . 379
V.1.1	Etude de $A_{\mathcal{I}nt}$ . . . . . 380
V.1.2	Intermédiaire : le déterminant de Moore . . . . . 381
V.1.3	Fin de l'étude de $A_{\mathcal{I}nt}$ . . . . . 382
V.2	Produit . . . . . 383
V.2.1	Le produit côté Lubin-Tate . . . . . 383
V.2.2	Le produit côté Drinfeld . . . . . 385
V.3	Décomposition . . . . . 387
V.3.1	Lemmes techniques . . . . . 390
V.3.2	Décomposition côté Lubin-Tate . . . . . 394
V.3.3	Décomposition côté Drinfeld . . . . . 399
V.4	Déterminants et structure de $\widetilde{\mathcal{O}}$ -algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ . . . . . 403
V.5	Démonstration de IV.1.1.2 . . . . . 405
Bibliographie . . . . . 405	