Geschichte der Arithmetik 1

1.1 Über die Anfänge des Rechnens

Für die meisten Menschen sind Zahlen die erste Assoziation zum Thema Mathematik. Tatsächlich kann man sagen, dass die ersten mathematischen „Tätigkeiten“ in der Geschichte der Menschheit mit dem Zählen zu tun haben. Die ältesten „mathematischen“ Artefakte, Beweise menschlicher Zähltätigkeit, sind Knochen und Steine mit Einritzungen und Kerben, die 30.000 oder mehr Jahre alt sind, also aus der Steinzeit stammen. Die zwei berühmtesten dieser Artefakte sind zwei Pavianknochen mit Einkerbungen: Der Lebombo-Knochen, über 43.000 Jahre alt und in den Lebombobergen im südlichen Afrika gefunden, sowie der Ishango-Knochen, ein etwa 20.000 Jahre alter Knochen der in Zentralafrika gefunden wurde. Der Knochen von Ishango ist besonders interessant, da seine Einkerbungen deutlich in drei Spalten gegliedert sind und innerhalb der Spalten gruppiert sind. Deswegen hat der Knochen viele Vermutungen und Theorien über sein Zweck ausgelöst [16, 29].

Knochen, Steine und Hölzer, die durch Einritzungen zum Zweck des Zählens verwendet wurden, sind allgemein als Kerbhölzer bekannt. Die Verwendung von Kerbhölzern erstreckt sich bis in die Neuzeit, in ländlichen Gegenden sogar bis heute. Interessant ist auch die Tatsache, dass die englische Institution *The English Exchequer* vom 12. Jh. bis zum Jahre 1826 zweiteilige Kerbhölzer bei Steuererhebungen und Darlehen verwendete [17].

Genauso alte, oder vielleicht sogar von Kerbhölzern ältere, Zählhilfsmittel sind Jetons (kleine Steine, Muscheln, ...). Jetons sind nicht für große Zahlen geeignet, aber es wird angenommen, dass gerade die Verwendung von Jetons zur Entwicklung des Rechnens führte, z. B. zur Subtraktion durch Wegnehmen von Jetons. Nach Entdeckung der Tonverarbeitung konnte man durch Jetons verschiedener Größen und Formen auch große Zahlen darstellen; viele solcher Tonjetons sind im Nahen Osten, aber auch andernorts gefunden [17].

F.M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-55352-7_1

Wann genau die Menschen zu Rechnen anfingen, ist weitgehend ungeklärt. Allgemein kann man sagen, dass das erste Rechenhilfsmittel die Finger waren. Dies führte auch, so Aristoteles, in den meisten Kulturen zum Zählen in Zehnergruppen, somit also zur Entwicklung des dezimalen Zahlensystems. Die ältesten erhaltenen schriftlichen Beweise menschlicher Rechentätigkeit entstammen der sumerisch-babylonischen und der altägyptischen Kultur, sind also etwa 4000 Jahre alt [17, 29].

1.2 Arithmetik in Mesopotamien und im alten Ägypten

Die ältesten erhaltenen mathematischen Schriften stammen aus Ägypten, aus den Perioden, die als Mittleres Reich und die Zweite Zwischenzeit bekannt sind. Die zwei wichtigsten und bekanntesten Originalquellen sind die Papyri Moskau (um 1850 v. Chr.) und Rhind (um 1650 v. Chr.). Aus älteren Zeiten sind auch Zahlen in hieroglyphischer Schrift z. B. auf Tempeln erhalten.

Die hieroglyphischen Ziffern sind wohl die bekanntesten unter den Zahlensystemen der alten Völker. Das Zahlensystem war dezimal aufgebaut, und so blieb es auch in den späteren hieratischen und demotischen Varianten. Es war aber kein Positionssystem, wie es unser modernes ist, sondern additiv aufgebaut: Die Zahlen wurden durch Reihung gebildet und die Werte einzelner Zeichen zusammengezählt. Es gab besondere Symbole für die Potenzen von 10, von 1 bis 1.000.000 [15, 29]. Alle sieben Zehnerpotenzsymbole der hieroglyphischen Schrift sind in der Tab. 1.1 dargestellt. Aus den Hieroglyphen entwickelte sich die, für das Schreiben auf Papyri besser geeignete, hieratische Schrift, in der die zwei genannten Papyri verfasst sind (hieratische Ziffern sind in der Abb. 1.1 dargestellt). Im 1. Jtsd. v. Chr. wurde sie von der demotischen Schrift ersetzt, in der es auch einige erhaltene mathematischen Schriften gibt, aber die Papyri Moskau und Rhind sind eindeutig die zwei bedeutendsten Quellen zur altägyptischen Mathematik, und mit deren Inhalten werden wir uns auch in den Kapiteln zur Algebra und Geometrie befassen.

Beispiel 1.1

Um z. B. die Zahl 2017 mit Hieroglyphen zu schreiben, brauchte man zwei Symbole für 1000 (eine Lotosblüte, 𓆼), ein Symbol für 10 (𓎆) und sieben Symbole für 1 (𓏺). Also könnte 2017, in hieroglyphischer Zahlschrift dargestellt, z. B. so aussehen:

𓆼𓆼𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺

Tab. 1.1 Hieroglyphische Zahlensymbole

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

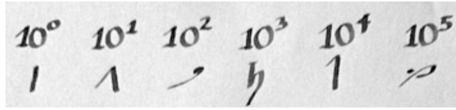


Abb. 1.1 Hieratische Zahlensymbole (nach [19])

Die alten Ägypter kannten auch (positive) Brüche. Spezifisch ist aber, dass alle[1] Brüche als Summen von Stammbrüchen (Brüchen mit dem Zähler 1) dargestellt wurden. Solche Darstellungen sind dementsprechend heutzutage auch als ägyptische Brüche bekannt. Sie wurden auch später von den Griechen und in den mittelalterlichen moslemischen Ländern benutzt.

Die hieroglyphische Notation eines Stammbruchs $\frac{1}{n}$ bestand aus dem Zeichen für Mund (𓂋), welches über dem Zahlensymbol für den Nenner gesetzt wurde. So entspricht z. B. 𓁨 dem heutigem $\frac{1}{1.000.000}$. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass man jeden (positiven) Bruch in (endlicher) ägyptischer Form darstellen kann, und auch, dass die Zerlegung nie eindeutig ist. Der Existenzsatz wurde erstmals von Fibonacci (Leonardo aus Pisa) Anfang des 13. Jh. bewiesen. Fibonaccis Methode der Zerlegung war, rekursiv immer wieder den größtmöglichen Stammbruch zu subtrahieren, bis man die gewünschte Zerlegung erhält [10, 28].

Beispiel 1.2

Wenden wir Fibonaccis Methode auf $\frac{4}{5}$ an. Der größte von $\frac{4}{5}$ kleinere Stammbruch ist $\frac{1}{2}$. Man rechnet: $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$. Der größte von $\frac{3}{10}$ kleinere Stammbruch ist $\frac{1}{4}$. Wieder subtrahiert man: $\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$, ein Stammbruch. Also ist $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

Fibonaccis Methode endet immer in endlich vielen Schritten. Der Beweis gründet sich auf der folgenden Tatsache:

Hilfssatz 1.1 (Fibonacci; Sylvester) *Gegeben sei ein positiver Bruch $\frac{p}{q} < 1$ mit $p \neq 1$. Sei $\frac{1}{n}$ der größte Stammbruch, der kleiner als $\frac{p}{q}$ ist. Dann ist $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{qn}$ ein Bruch mit der Eigenschaft, dass sein Zähler r kleiner als p ist.*

Der Beweis erfolgt durch Kontradiktion. Da der Hilfssatz garantiert, dass in Fibonaccis Algorithmus die Zähler eine absteigende Folge von natürlichen Zahlen bilden, endet man früher oder später mit einem Stammbruch. Dementsprechend gilt

Theorem 1.1 (Fibonacci) *Jeder positive Bruch kann in endlicher ägyptischer Form dargestellt werden.*

Wie schon erwähnt, ist die ägyptische Form nie eindeutig. Genauer gesagt, gilt:

Theorem 1.2 *Jeder positive Bruch hat unendlich viele ägyptische Formen.*

[1] Ausnahme von der Regel war ein spezielles Symbol für $\frac{2}{3}$.

Abb. 1.2 Symbole für Addition und Subtraktion im Rhindpapyrus (nach [15])

Beweis. Sei

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}. \tag{1.1}$$

Man teile

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

durch einen der Nenner k_i, z. B. durch k_n. Man erhält

$$\frac{1}{k_n} = \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}.$$

Die letzte Darstellung setzt man für $\frac{1}{k_n}$ in die Darstellung (1.1) ein und erhält somit eine neue Darstellung des gleichen Bruches in ägyptischer Form. Offensichtlich kann eine solche Substitution beliebig viele Male durchgeführt werden. □

Papyrus Rhind enthält eine bekannte altägyptische Tabelle der Zerlegungen von Brüchen in Stammbrüche. Diese Tabelle führt die ägyptischen Formen der Brüche $\frac{2}{n}$ (mit ungeradem $n \leq 101$) an. Es ist bis heute nicht geklärt, wie Ahmes, der Autor des Papyrus Rhind, die Tabelle zusammengestellt hat. Bei näherer Betrachtung bemerkt man aber, dass er in keinem Fall eine Zerlegung in der Form $\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ anführt. Auch scheint es, dass er den kürzeren Zerlegungen den längeren gegenüber den Vorzug gegeben hat [28].

Die alten Ägypter kannten alle vier Grundrechenarten. Addition und Subtraktion erfolgten auf ziemlich offensichtliche Weise durch Umgruppieren bzw. Entfernen von Zahlsymbolen der Zahlen, die addiert bzw. subtrahiert wurden. Es scheint auch, dass die alten Ägypter gelegentlich Symbole für Addition und Subtraktion benutzten (Abb. 1.2). Bekannt und interessanter ist aber die altägyptische Multiplikation und Division, die aus modernenr Sicht durch Kombination des Rechnens im binären und dezimalen Zahlensystemen erfolgt. Die Multiplikation wird durch eine Sequenz von Verdoppelungen durchgeführt, die Division analog durch sukzessives Halbieren [29]. Das Prinzip wird am einfachsten durch ein Beispiel beschrieben.

Beispiel 1.3

Wir wollen hier 25 mit 72 auf altägyptische Art multiplizieren. Man formt zwei Spalten, eine für jeden der Faktoren. Die erste Zahl in erster Spalte ist die 1, die zweite Spalte beginnt mit dem zweiten Faktor, hier also 72. Jede nächste Reihe wird durch

Verdoppelung der Zahlen in der vorigen Reihe berechnet. Die Verdoppelungen bricht man ab, sobald in der ersten Spalte eine Zahl, die größer als der erste Faktor ist, erreicht wird (diese Reihe wird ignoriert). Man erhält also:

1	72
2	144
4	288
8	576
16	1152

Nun führt man, beginnend mit der letzten Zahl in der ersten Spalte eine Reihe von Subtraktionen. Von dem ersten Faktor wird immer wieder die größtmögliche Zahl der ersten Spalte abgezogen. Die Reihen, in denen die subtrahierten Zahlen stehen, werden hervorgehoben. Hier haben wir 25 – 16 = 9, 9 – 8 = 1, 1 – 1 = 0:

1	**72**
2	144
4	288
8	**576**
16	**1152**

Zum Schluss werden die Zahlen der zweiten Spalte, die in den hervorgehobenen Reihen stehen, zusammengezählt, um das Ergebnis der Multiplikation zu erhalten. Hier erhält man also $25 \cdot 72 = 72 + 576 + 1152 = 1800$. Man kann leicht einsehen, dass eigentlich die Rechnung $25 \cdot 72 = (16 + 8 + 1) \cdot 72 = 2^4 \cdot 72 + 2^3 \cdot 72 + 2^0 \cdot 72$ durchgeführt wurde.

Die Division wurde, wie erwähnt, auf ähnliche Art und Weise durchgeführt, wobei bei Bedarf ägyptische Brüche benutzt wurden.

Im Gegensatz zur altägyptischen Mathematik sind relativ viele Quellen der Mathematik aus Mesopotamien erhalten. Der Grund ist leicht zu erkennen: Tontafeln sind haltbarer als Papyri. Es sind mehrere hundert Keilschrifttafeln mathematischen Inhalts aus der Zeit zwischen 2000 v. Chr. und 200 v. Chr. erhalten, die Mehrzahl aus der Periode des altbabylonischen Reiches (ca. 1900–1600 v. Chr.). Viele enthalten das typische Hilfmittel der babylonischen Arithmetik: Tabellen.

Die Zahlensymbole der babylonischen Periode haben sich aus älteren sumerischen Piktogrammen entwickelt. Es wird oft gesagt, dass die Babylonier ein positionales sexagesimales Zahlensystem benutzt haben, also Zahlen in der Basis 60 dargestellt haben. Das stimmt nur teilweise. In einigen Perioden war das Zahlensystem rein dezimal, und in allen „sexagesimalen" Perioden war das sexagesimale System doch sekundär dezimal [8]: Die Zeichen für die Ziffern sind aus den Zeichen (Keilen) für 1 und 10 aufgebaut.

Der Keil für die Ziffer 1 (also für Potenzen von 60) war vertikal (etwa in der Form V), und der Keil für die Ziffer 10 (also, für $10 \cdot 60^i$) war horizontal (etwa in der Form $<$). Das babylonische Zahlensystem ist das älteste bekannte Positionssystem. Es war kein reines Positionssystem, da ein Zeichen für fehlende Potenzen von 60 (also, für die Ziffer 0) fehlte. So kann eine Keilsequenz von der Form $<$V $10 \cdot 60 + 1 = 61$ bedeuten, aber auch z. B. $10 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^1$ oder $10 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60^{-1}$. Der exakte Zahlwert muss also aus dem Kontext ermittelt werden. Ein Zeichen für die Ziffer Null wurde erst in der Perserzeit (nach dem 6. Jh. v. Chr.) eingeführt, und auch dann nur als „inneres Lückenzeichen" [29], d. h., um fehlende 60er-Potenzen in der Mitte einer Zahl anzuzeigen, aber nicht für Endstellen. Trotzdem war dieses Zahlensystem, eben wegen des positionalen Aufbaus, von allen alten Zahlensystemen (vor Einführung des indoarabischen dezimalen Positionssystems) das Leistungsfähigste und wurde von vielen Mathematikern im antiken Griechenland und später in der moslemischer Welt verwendet, wenn man komplizierte Berechnungen (vor allem für astronomische Zwecke) durchführen musste.

Das sexagesimale System hat offensichtlich einen Nachteil, aber auch einen Vorteil. Der Vorteil ist, dass mehr Brüche in diesem System als in der Basis 10 eine endliche Darstellung haben; z. B. ist $\frac{1}{3} = 20 \cdot 60^{-1}$ (was oft mit $(0;20)_{60}$ dargestellt wird oder eben babylonisch als $<<$). Der Nachteil ist, dass z. B. die elementare Multiplikationstabelle 3600 Einträge hat. Das erklärt auch die vielen sumerisch-babylonischen Rechentafeln. Unter anderem findet man auch Tabellen von Quadratzahlen und Kehrwerten. Die wurden verwendet, um die Multiplikation und Division zu vereinfachen: Um zwei Zahlen zu multiplizieren, verwendete man Regeln, die wir heute mit den Formeln

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

oder

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

darstellen, und die Division war einfach, die Multiplikation mit dem Kehrwert durchzuführen [21, 22].

1.3 Altgriechische und römische Arithmetik

Der Begriff Arithmetik entstammt dem altgriechischen Wort *arithmos* ($\alpha' \rho\iota\theta\mu o' \varsigma$), Zahl. Die alten Griechen unterschieden eigentlich zwei Sorten von Arithmetik: die Logistik (das praktische Rechnen) und die eigentliche Arithmetik (die theoretische, wissenschaftliche Behandlung des Rechnens).

Die Logistik, die praktische Arithmetik also, verwendete altägyptische Methoden [15]. Als Rechenhilfsmittel benutzte man Rechensteine und Finger [29]. Zur schriftlichen Niederschrift von Zahlen wurden schon in der ionischen Periode (ca. 600–400 v. Chr.)

Tab. 1.2 Altgriechische akrophonische Ziffern

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10.000	50.000
Ι	𐅃	Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ	𐅇

eigene griechische Zahlzeichen entwickelt. Das älteste griechische Zahlensystem ist unter dem Namen akrophonische Ziffern bekannt, da die Ziffern eigentlich Anfangsbuchstaben der entsprechenden Zahlwörter waren (Tab. 1.2); die Ziffer für Eins, ein vertikaler Strich, ist die Ausnahme zu dieser Regel. Dieses Zahlensystem war, wie das altägyptische, additiv. Es ist auch offensichtlich, dass es sich um ein primär dezimales System handelt, mit Sekundärbasis 5, ähnlich wie das spätere römische Zahlensystem. Im Laufe der Zeit, etwa bis zum Ende des 3. Jh. v. Chr., wurde es langsam vom alphabetischen System verdrängt [15, 17, 29].

Das alphabetische griechische Zahlensystem ist auch als milesisches System bekannt und wurde bis in die postklassische Zeit verwendet. Ähnlich wie bei den alten Phöniziern, Hebräern und auch im Mittelalter bei den Arabern (*Abjad*), Kroaten (glagolitische Zahlen) und Süd- und Ostslawen (kyrillische Zahlen) beruht das griechische Alphabetsystem auf Verwendung aller Buchstaben des Alphabets zur Darstellung von Zahlen: Jede der Zahlen 1 bis 9 multipliziert mit einer Zehnerpotenz von 10^0 bis 10^4 hatte ein separates Symbol. Für Einser 1 bis 9, Zehner 10 bis 90 und Hunderter 100 bis 900 wurde je ein Buchstabe des Alphabets verwendet. Da das griechische Alphabet aber nur aus 24 Buchstaben besteht, wurden für die restlichen drei notwendigen Symbole drei archaische, semitische Buchstaben verwendet: *wau* (später *digamma* genannt) für 6, *koppa* für 90 und *sampi* für 900 (siehe Abb. 1.3). Für Tausender benutzte man die Symbole der Einser mit einem Strich links unten; so würde z. B. 2017 in griechischer alphabetischer Notation ͵$\beta\iota\zeta$ lauten. Für Zehntausender benutzte man den Buchstaben *M* (Anfangsbuchstabe von *MYPIOI*, Myriade) und setzte die Anzahl der Zehntausender darüber; in späterer Zeit wurden alternativ

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Α′ α′	Β′ β′	Γ′ γ′	Δ′ δ′	Ε′ ε′	Ϛ′ ϛ′	Ζ′ ζ′	Η′ η′	Θ′ ϑ′
10	Ι′ ι′	Κ′ ϰ′	Λ′ λ′	Μ′ μ′	Ν′ ν′	Ξ′ ξ′	Ο′ ο′	Π′ π′	Ϙ′ ϙ′
10^2	Ρ′ ρ′	Σ′ σ′	Τ′ τ′	Υ′ υ′	Φ′ φ′	Χ′ χ′	Ψ′ ψ′	Ω′ ω′	Ϡ′ ϡ′
10^3	͵Α ͵α	͵Β ͵β	͵Γ ͵γ	͵Δ ͵δ	͵Ε ͵ε	͵Ϛ ͵ϛ	͵Ζ ͵ζ	͵Η ͵η	͵Θ ͵ϑ
10^4	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$	$\overset{ϛ}{\mathrm{M}}$	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\eta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$

Abb. 1.3 Altgriechische alphabetische Ziffern (klassische Form)

je zwei Punkte über die Symbole gesetzt, anstatt sie über den Buchstaben M zu setzen. Also ist das ältere $\overset{\alpha}{M}$ gleichbedeutend mit späterem $\ddot{\alpha}$ oder modernem 10.000. Damit man die Zahlen vom Normaltext unterscheiden konnte, wurde am Ende der Zahl ein Apostroph angebracht, oder ein Strich über die ganze Zahl gezogen. Die Brüche wurden anfangs durch Stammbrüche dargestellt (siehe auch Beispiel 4.2), mit zwei Apostrophen; so bedeutete ε'' ein Achtel. Später, z. B. bei Heron und Diophant, findet man eine der heutigen ähnliche Schreibweise: Der Zähler wurde nicht über, sondern unter dem Nenner geschrieben. Parallel zu dieser gab es aber auch andere Schreibweisen für Brüche. In der Astronomie wurde das alphabetische Zahlensystem in Kombination mit babylonischem sexagesimalem Zahlensystem verwendet. So schreibt beispielsweise Theon von Alexandria in seinem Kommentar zu Ptolemäus' *Almagest*, ‚$\overline{\alpha\varphi\iota\varepsilon}\ \ \overline{\kappa}\ \ \overline{\iota\varepsilon}$ für 1515° 20′ 14″. [8, 17, 29].

Im 3. Jh. v. Chr. schrieb Archimedes einen Text, der *Sandrechnung* genannt wird. Er ist insofern für unser Thema interessant, weil Archimedes da ein System von Bezeichnungen für große Zahlen beschreibt. Sein System basiert auf der Zehnerpotenz 10^8. Die Zahlen bis 10^4, Myriade, hatten zu seiner Zeit eine einheitliche Bezeichnungsweise. Er erweiterte diese Bezeichnungen für Zahlen bis $\left((10^8)^{(10^8)}\right)^{(10^8)} = 10^{8\cdot 10^{64}}$. Dabei ist $10^8 = 10^4 \cdot 10^4$ eine Myriade Myriaden, die Zahlen bis $P = (10^8)^{(10^8)}$ werden Zahlen der ersten Periode genannt, und P ist dann die „Einheit" für die Zahlen zweiter Periode [2, 29].

Die theoretische (oder spekulative) Arithmetik begann mit den Pythagoreern, der philosophisch-mystisch-wissenschaftlichen Schule, die von **Pythagoras von Samos** im 6. Jh. v. Chr. begründet wurde. Nach pythagoreischer Philosophie besteht das Wesen der Welt in der Harmonie der Zahlen [29]. Dabei sind unter Zahlen die natürlichen Zahlen gemeint. Diese Verwendung des Begriffs „Zahl" wurde in der ganzen klassischen griechischen Periode beibehalten; Brüche waren für die alten griechischen Mathematiker keine Zahlen, sondern Verhältnisse zweier (natürlichen) Zahlen, und irrationale Größen wurden erst recht nicht als Zahlen betrachet. Dies war aber kein Hindernis, um sich in praktischen Situationen der Brüche zu bedienen (so findet man z. B. bei Eratosthenes den Bruch $\frac{11}{83}$ als Neigung der Ekliptik [29]). Diese praktischen Anwendungen waren aber allgemein als „minderwertig" im Verhältnis zu „richtiger" Mathematik angesehen.

Da die Pythagoreer alle Resultate Pythagoras zuschrieben, weiß man nicht, welche ihrer Resultate von Pythagoras selbst stammen und welche nicht. Trotzdem kann man mit hinreichender Sicherheit behaupten, dass die Pythagoreer mehrere wichtige mathematische Fakten bewiesen haben.

Bei den Pythagoreern wird zum ersten Mal in der Geschichte den Zahlen selbst eine eigene Bedeutung gegeben, die Zahlen wurden bei ihnen zum ersten Mal abstrakt: Eine Zwei ist nicht mehr nur ein Attribut (z. B. zwei Enten oder zwei Schiffe), sondern auch ein Subjekt. Den Zahlen wurden mystische Bedeutungen zugeordnet (somit begründeten die Pythagoreer die Numerologie). Trotzdem waren sie auch die ersten, die allgemeine Schlüsse über Zahlen ableiteten, also erste Resultate der theoretischen Arithmetik (und der Zahlentheorie) hervorbrachten [1, 3, 12, 29].

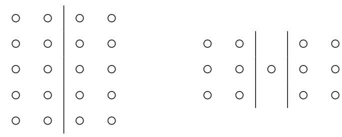


Abb. 1.4 Gerade und ungerade Zahlen

Abb. 1.5 Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen

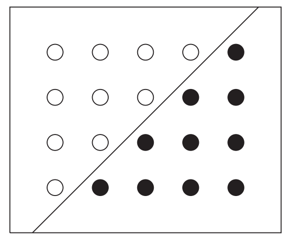


Abb. 1.6 Die doppelte Dreieckszahl ist eine Rechteckszahl

Die Pythagoreer klassifizierten die (natürlichen) Zahlen in verschiedene Gruppen, deren Eigenschaften durch Figurenlegen (z. B. Anordnungen von Punkten) veranschaulicht wurden.

Die Zahlen wurden in gerade und ungerade geteilt. Die geraden Zahlen sind solche, die in zwei gleiche Teile geteilt werden können, während bei der Zweiteilung einer ungeraden Zahl immer eine Eins[2] übrig bleibt (Abb. 1.4). Die Pythagoreer entdeckten auch alle Grundeigenschaften der Arithmetik mit geraden und ungeraden Zahlen, wie z. B., dass die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ungerade ist, oder dass das Produkt zweier geraden Zahlen gerade ist. Diese Resultate sind später im IX. Buch der *Elemente* von Euklid festgehalten [4].

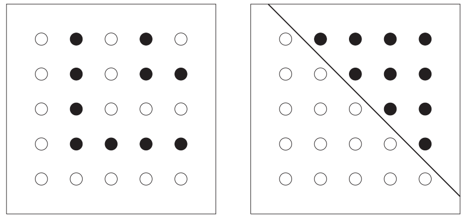
Eine zweite Klassifizierung waren die zwei Klassen, die heute als Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen bekannt sind. Die Primzahlen können nur durch eine lineare Anordnung dargestellt werden, während die zusammengesetzten Zahlen durch eine rechteckige Anordnung dargestellt werden können (Abb. 1.5).

Die Pythagoreer untersuchten auch vollkommene Zahlen (siehe Kap. 4.1) und verschiedene figurierte Zahlen: Polygonalzahlen (wie z. B. Dreieckszahlen und Quadratzahlen), Kubikzahlen, Pyramidenzahlen, ...

Die Dreieckszahlen sind Summen von der Form $D_n = 1 + 2 + \ldots + n$. Durch Aneinanderfügen zweier gleicher Dreieckszahlen (Abb. 1.6) stellten die Pythagoreer fest, dass $D_n = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt.

[2]Die Eins selbst, oder die Monade (*mónos*), war für die Pythagoreer und allgemein in der frühgriechischen Zeit nicht als Zahl angesehen, sondern der Ursprung, Grundbaustein, aller Zahlen. Dies ist besonders klar in der zweiten Definition des siebten Buches der *Elemente* von Euklid: Eine Zahl ist eine Menge von Einheiten [4].

Abb. 1.7 Quadratzahlen



Die Quadratzahlen $Q_n = n^2$ können durch quadratische Anordnung von Punkten visualiert werden. Durch das Betrachten solcher Anordnungen bemerkten die Pythagoreer, dass Quadratzahlen Summen aufeinanderfolgender ungeraden Zahlen, bzw. zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen, sind: $Q_n = 1+3+\ldots+(2n-1) = D_n+D_{n+1}$ (siehe Abb. 1.7). Die Pythagoreer bewiesen auch, dass gerade Quadratzahlen vierfache Quadratzahlen sind (d. h., eine gerade Quadratzahl ist immer durch 4 teilbar) und dass ungerade Quadratzahlen achtfache Quadratzahlen plus 1 sind (d. h., wenn n ungerade ist, ist $n^2 - 1$ durch 8 teilbar).

Die pythagoreischen Resultate der theoretischen Arithmetik können offensichtlich als zahlentheoretische Resultate betrachtet werden. Dementsprechend verlagern wir die Beschreibung eines Teiles ihrer Beiträge in den Abschn. 4.1.

Man sagt oft, die Pythagoreer wären die Ersten, die irrationale Zahlen entdeckt haben. Dies ist eine starke Vereinfachung der eigentlichen Entdeckung. Erstens, wie schon erwähnt, wurden nicht mal Brüche von den Pythagoreern als Zahlen angesehen. Zweitens, auch wenn man in der vorigen Behauptung das Wort „Zahlen" in „Größen" ändert, ist die Aussage insofern problematisch, da die Pythagoreer ja die Welt als durch (natürliche) Zahlen und deren Verhältnisse beschreibbar betrachteten, und somit die Existenz irrationaler Größen im direkten Widerspruch zu pythagoreischer Philosophie war. Nach dieser Philosophie mussten jede zwei gleichartige Größen (z. B. zwei Längen) kommensurabel sein. Dies bedeutet, dass für jede zwei Längen, zwei Flächen oder zwei Volumina ein Einheitsmaß existiert mit der Eigenschaft, dass die Messwerte der zwei Größen sich wie zwei ganze Zahlen verhalten. Modern ausgedrückt bedeutet dies, dass die Pythagoreer annahmen, alle Längen sind durch rationale Zahlen zu beschreiben. Doch gerade den Pythagoreern gelang auch der Beweis der Existenz inkommensurabler Größen, d. h., modern formuliert, der irrationalen Zahlen. Allgemein wird dies Hippasos von Metapont (um 450 v. Chr.) zugeschrieben. Er soll bewiesen haben, dass die Länge der Diagonale und der Seite eines Quadrats inkommensurabel sind [1, 3, 12, 29], d. h.,

Theorem 1.3 *Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.*

Beweis. Wir legen den Beweis im pythagoreischem Stil dar. Man nehme an, die Diagonale und die Seiten des grauen Quadrats (siehe Abb. 1.8) wären kommensurabel, d. h., es existieren ein Einheitsmaß d und zwei natürliche Zahlen m und n so, dass die Länge der Diagonale gleich md und der Seite nd ist. Man kann annehmen, dass die Zahlen

http://www.springer.com/978-3-662-55351-0

Geschichte der Mathematik kompakt
Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik
Brückler, F.M.
2017, XII, 171 S. 121 Abb., 24 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-55351-0