7 Differentialrechnung

Von Mark Twain stammt der Ausspruch, Isaac Newton hätte nur dabei zugesehen, wie ein Apfel vom Baum fiel – eine reichlich alltägliche Erfahrung, aber seine Eltern waren einflussreiche Leute und machten eine große Sache daraus. Diese Charakterisierung von Newtons Gravitationstheorie hat Twain wohl nicht ernst gemeint, denn die Entwicklung der Newtonschen Physik, die man Ihnen noch heute in Ihren Physik-Vorlesungen nahezubringen versucht, war sicher eine der größten wissenschaftlichen Leistungen, die ein einzelner Mensch jemals zustande brachte.

Dennoch werde ich über diesen Teil von Newtons Arbeit nichts berichten, denn wir befinden uns hier in einem Mathematik-Buch und nicht in einem über Physik. Was uns in diesem Kapitel beschäftigt, ist die *Differentialrechnung*, von Newton als *Fluxionsrechnung* bezeichnet. Er entwickelte sie Ende des siebzehnten Jahrhunderts sozusagen als Abfallprodukt seiner physikalischen Forschungen, als er versuchte, das Problem der Geschwindigkeit in den Griff zu bekommen und dafür einfach das brauchte, was wir heute eine Ableitung nennen. Ein paar Jahre später fand unabhängig von Newton auch der deutsche Mathematiker und Philosoph Gottfried Wilhelm Leibniz die Prinzipien der Differentialrechnung, aber über diese Geschichten werde ich Ihnen später mehr berichten, wenn Sie über die Differentialrechnung selbst etwas besser informiert sind.

Wir gehen wie gewohnt schrittweise vor. Zu Anfang des Kapitels erkläre ich Ihnen, was eine Ableitung ist und was man damit anstellt. Dann überlegen wir uns ein paar Regeln für das Differenzieren und berechnen die Ableitungen einiger Funktionen. Anschließend haben wir das notwendige Rüstzeug, um im Rahmen von Extremwertaufgaben Maxima und Minima zu bestimmen und den Verlauf von Funktionskurven systematisch zu untersuchen. Zum Abschluss des Kapitels zeige ich Ihnen dann, wie man mit Hilfe der Differentialrechnung eine bestimmte Art von Grenzwerten recht leicht berechnen kann und wie das näherungsweise Lösen von Gleichungen mit dem Newton-Verfahren funktioniert.

T. Rießinger, *Mathematik für Ingenieure*, DOI 10.1007/978-3-662-54807-3_7

7.1 Einführung

Um klar zu machen, wozu man Ableitungen eigentlich braucht, beginnen wir mit einem Beispiel aus der Ökonomie, dem Problem der Gewinnmaximierung.

7.1.1 Beispiel Es gibt immer noch Firmen, die ein Monopol auf ein bestimmtes Produkt haben, auch wenn immer mehr Monopole wie zum Beispiel das der Post aufgelöst werden. Wie kann nun ein Monopolist seinen Gewinn maximieren? Zum Teil sicher über die Gestaltung des Preises, und ich werde jetzt ein einfaches Modell vorstellen, mit dem man dieses Problem angehen kann.

Ist p der Preis pro Stück, so wird der erzielte Umsatz natürlich von der Absatzmenge x abhängen und $U = p \cdot x$ betragen. Um neue Käuferschichten zu locken, mag es aber sinnvoll sein, den Stückpreis p zu senken, wenn erkennbar ist, dass dadurch die Absatzzahlen in die Höhe getrieben werden können. Der Stückpreis wird also in Abhängigkeit vom Absatz x monoton fallen, und zur Beschreibung dieser Politik benutze ich die einfachste aller fallenden Funktionen, nämlich

$$p = a_0 - a_1 x,$$

wobei a_0, a_1 positive Zahlen sind. Der Umsatz berechnet sich dann aus

$$U = px = (a_0 - a_1 x)x = a_0 x - a_1 x^2.$$

Zur Bestimmung des Gewinns müssen wir vom Umsatz die Kosten abziehen, die man gewöhnlich in fixe und variable Kosten unterteilt: die fixen Kosten K_f sind unabhängig vom Absatz, denn in jedem Fall müssen Gehälter, Zinsen, Mieten und Ähnliches bezahlt werden. Die variablen Kosten dagegen sind von der abgesetzten Menge abhängig, und auch hier nehmen wir das einfachste Modell, indem wir sie durch $K_v = k_v \cdot x$ berechnen. Damit erhält man Gesamtkosten von $K = k_v x + K_f$, die vom Umsatz abgezogen werden müssen, um den Gewinn G zu bestimmen. Folglich ist

$$G = U - K = a_0 x - a_1 x^2 - k_v x - K_f = -a_1 x^2 + (a_0 - k_v)x - K_f.$$

Die Gewinnfunktion unseres Monopolisten entpuppt sich als quadratisches Polynom, das man als nach unten geöffnete Parabel darstellen könnte. Unsere bisherigen Kenntnisse erlauben es uns auszurechnen, ab welcher Absatzmenge x überhaupt kein Gewinn mehr erzielt wird, weil der Stückpreis zu niedrig geworden ist: Sie brauchen nur die Nullstellen der Gewinnfunktion zu bestimmen. Viel interessanter ist aber nicht die Frage nach der Verlustzone, denn das Unternehmen wird sein Ziel wohl kaum darin sehen, immer knapp dem Konkurs zu entkommen. Die wichtigere Frage ist die nach dem Absatz x_0, der maximalen Gewinn verspricht. Das lässt sich nicht so einfach mit dem Lösen einer Gleichung entscheiden, und das wesentliche Hilfsmittel zur Lösung solcher Optimierungsprobleme ist die Differentialrechnung, die sich mit der Steigung von Tangenten befasst. Am optimalen Punkt hat die Kurventangente nämlich die Steigung 0, sie liegt waagrecht in der Ebene, und wenn man weiß, wie man solche Steigungen ausrechnet, kann man mit etwas Glück auch feststellen, wo sie zu Null werden.

Wir werden uns also im folgenden mit der Steigung von Tangenten zu befassen haben. Am Beispiel einer einfachen Funktion kann man sich die Vorgehensweise verdeutlichen.

7.1.2 Beispiel Es sei $f(x) = x^2$ und $x_0 = 1$. Wegen $y_0 = f(1) = 1$ hat der zugehörige Kurvenpunkt die Koordinaten $P = (1/1)$. Die Steigung der Tangente im Punkt $(1/1)$ ist auf den ersten Blick schwer zu berechnen, aber mit anderen Geraden sieht es schon besser aus. Nehmen wir einmal einen beliebigen Punkt $Q = (x/y)$ auf der Kurve. Da Q ein Kurvenpunkt ist, muss $y = x^2$ gelten. Die *Sekante* durch P und Q hat dann, wie Sie der Abb. 7.1 entnehmen können, die Steigung

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

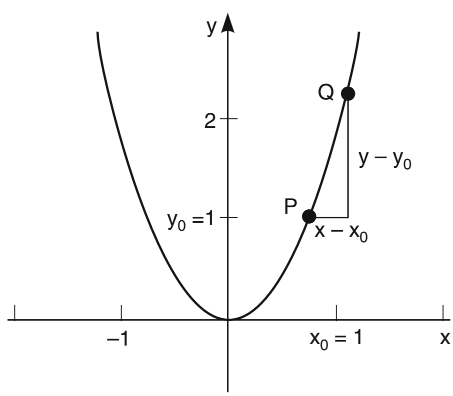
Nun ist das zwar keine Tangente, aber je näher der Punkt Q an den Punkt P heranrückt, desto schwerer kann man die Sekante von der eigentlichen Tangente unterscheiden. Etwas mathematischer ausgedrückt: für $x \to x_0$ wird Q gegen P streben und die Sekante in eine Tangente übergehen. Die Steigung der Tangente ergibt sich somit als Grenzwert der Sekantensteigungen, und das heißt:

$$\text{Steigung} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Zum Glück haben Sie im fünften Kapitel gelernt, wie man solche Grenzwerte ausrechnet. Es gilt nämlich:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2,$$

Abb. 7.1 Sekantensteigung



denn mit der dritten binomischen Formel können Sie $x - 1$ aus $x^2 - 1$ herauskürzen und behalten $x + 1$ übrig.

Die Steigung der Tangente für $f(x) = x^2$ im Punkt $(1/1)$ ist demnach 2. In der Regel sagt man dazu: f hat in $x_0 = 1$ die Ableitung 2.

Das Verfahren, Sekantensteigungen zu nehmen und die Sekanten gegen die Tangente konvergieren zu lassen, ist natürlich nicht auf die Funktion $f(x) = x^2$ beschränkt. Man kann für jede Funktion und für jeden Punkt aus ihrem Definitionsbereich zumindest versuchen, ob die Prozedur erfolgreich durchgeführt werden kann, ob also der Grenzwert tatsächlich existiert. Falls ja, nennt man die Funktion *differenzierbar*, falls nein, hat man eben Pech gehabt.

7.1.3 Definition Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Man sagt, f ist *differenzierbar* in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ die Ableitung oder auch die erste Ableitung von f in x_0. Man bezeichnet $f'(x_0)$ auch als den Differentialquotienten von f im Punkt x_0.

Diese Definition macht also nichts weiter als das Verfahren aus dem Beispiel 7.1.2 auf beliebige Funktionen zu übertragen. Mit dem Quotienten aus den Differenzen der Funktionswerte und den Differenzen der x-Werte beschreibt man die Steigung der Sekanten, und mit dem Grenzübergang $x \to x_0$ sorgt man dafür, dass die Sekanten nach und nach in Tangenten übergehen. Sie sehen daran, dass wir die esoterisch anmutenden Dinge über Grenzwerte von Funktionen, die ich Ihnen im fünften Kapitel berichtet habe, jetzt sehr gut brauchen können, denn die Ableitung ist als ein solcher Grenzwert definiert.

Das Wort *differenzierbar* hat man wohl deswegen gewählt, weil andauernd mit *Differenzen* umgegangen werden muss. Es wurde übrigens von Leibniz in die Diskussion eingeführt und hat sich dort bis heute behauptet.

Manche Bücher definieren Differenzierbarkeit scheinbar ein wenig anders, aber das ist nur eine Frage der Schreibweise.

7.1.4 Bemerkung Manchmal schreibt man auch $x = x_0 + \Delta x$, wobei der griechische Buchstabe Δ für Differenz steht. Man hat dann $\Delta x = x - x_0$, und wenn x gegen x_0 geht, konvergiert natürlich $\Delta x \to 0$. Deshalb ist eine andere gebräuchliche Schreibweise für die Ableitung auch

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Wenn man nun schon die Differenz der x-Werte als Δx bezeichnet, sollte man auch konsequent genug sein, die Differenz der Funktionswerte mit

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

oder

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

abzukürzen. Es gilt dann

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bzw.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Deshalb findet man auch oft die Schreibweise

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) \text{ oder auch } f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Erwähnt werden sollte noch, dass die Physiker dazu neigen, alles ganz anders zu machen, und für die Ableitung nach der Zeitvariablen t zum Beispiel $\dot{y}(t)$ schreiben. Diese Schreibweise geht auf Newton zurück.

Newton war Physiker, und deshalb benutzen Physiker bis heute seine Punktschreibweise. Leibniz dagegen war alles Mögliche: Philosoph, Jurist, Theologe, Physiker, Bibliothekar und eben auch Mathematiker, und vielleicht ist das der Grund, warum auch alle möglichen Leute heute seine Schreibweisen in der Differential- und Integralrechnung bevorzugen. In jedem Fall gehen die d-Schreibweise aus Bemerkung 7.1.4 und das moderne Integralzeichen auf Leibniz zurück.

Zur Übung berechnen wir ein paar Ableitungen.

7.1.5 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = c$, das heißt, $f(x)$ ist eine konstante Funktion. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Folglich ist $f'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, die Tangenten sind also stets waagrecht, wie es zu erwarten war.

(ii) Es sei $f(x) = x$. Das Schaubild von f ist die erste Winkelhalbierende, und man wird erwarten, dass eine Gerade ihre eigene Tangente ist und die Ableitung deshalb überall 1 ergibt. Tatsächlich gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Die Rechnung bestätigt also glücklicherweise die Anschauung.

(iii) Es sei $f(x) = x^2$. Das Schaubild von f ist die sogenannte Normalparabel, und hier liefert die Anschauung keine Vermutung mehr über die Tangentensteigung, man kommt um die Definition der Ableitung nicht herum. Wir rechnen also:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} x + x_0 \\ &= 2x_0. \end{aligned}$$

Dabei habe ich wieder einmal die dritte binomische Formel benutzt, um den Quotienten von $x^2 - x_0^2$ und $x - x_0$ als $x + x_0$ zu identifizieren. Dass dann der Term $x + x_0$ für $x \to x_0$ nach $2x_0$ konvergiert, ist kaum der Erwähnung wert. Es gilt also

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

(iv) Es sei $f(x) = x^3$. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0}.$$

Und jetzt? Das ist gar nicht so schlimm, wie es aussieht. Offenbar müssen wir hier den Linearfaktor $x - x_0$ aus dem Polynom $x^3 - x_0^3$ herauskürzen. Der Wert x_0 ist aber offenbar Nullstelle von $x^3 - x_0^3$, und im Abschn. 5.2 haben Sie gelernt, wie man Linearfaktoren, die von Nullstellen herstammen, loswerden kann: mit dem Horner-Schema. Wir notieren also das Horner-Schema für das Polynom $x^3 - x_0^3$ und den Punkt x_0. Vergessen Sie dabei nicht, auch die Koeffizienten von x^2 und x in der ersten Zeile des Schemas aufzuführen. Sie sind zwar gleich 0, aber auch die Nullen müssen notiert werden.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -x_0^3 \\ & & + & + & + \\ x_0 & & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ \cline{2-5} & 1 & x_0 & x_0^2 & 0 \end{array}$$

In 5.2.5 haben wir uns über die Interpretation dieses Schemas geeinigt: es gilt nämlich

$$x^3 - x_0^3 = (x - x_0) \cdot (x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2),$$

also

$$\frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = x^2 + x_0 x + x_0^2 \to 3x_0^2 \text{ für } x \to x_0.$$

Deshalb ist

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

(v) Es sei $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$. Für $x > 0$ ist $|x| = x$ und für $x < 0$ ist $|x| = -x$. Folglich haben wir

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x > 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

aber

$$\lim_{x \to 0, x < 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x < 0} \frac{-x}{x} = -1.$$

Es macht also einen Unterschied, ob Sie sich der Null von links oder von rechts nähern: einmal kommt im Grenzwert -1 heraus und einmal 1. Sie erinnern sich daran, dass wir bei der Definition eines Grenzwertes von der Funktion verlangt haben, dass sie sich entscheidet. Ganz gleich, aus welcher Richtung man gegen x_0 strebt, die Funktionswerte müssen sich immer gleich verhalten. Da das hier nicht der Fall ist, kann das nur bedeuten, dass der relevante Grenzwert nicht existiert. Folglich ist $f(x) = |x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Die Beispiele aus 7.1.5 legen eine Vermutung nahe. Es scheint eine Regel für die Ableitung von einfachen Polynomen zu geben, und der nächste Satz bestätigt diese Vermutung.

7.1.6 Satz Man definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^n$. Dann ist f überall differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

Beweis Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Es bleibt uns nichts anderes übrig: wir müssen die Definition der Differenzierbarkeit verwenden und in den inzwischen vertrauten Quotienten einsetzen. Es gilt dann

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}.$$

In 7.1.5 (iv) haben Sie aber schon gesehen, wie man jetzt weiter vorgehen kann. Mit Hilfe des Horner-Schemas dividieren wir den Linearfaktor $x - x_0$ ab und sehen uns an, was dabei wohl herauskommt. Das Horner-Schema sieht jedenfalls so aus:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x_0^n \\
 & & + & + & \dots & + & + \\
x_0 & & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\
\hline
 & 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & 0
\end{array}$$

Wieder können wir Satz 5.2.5 verwenden, um zu bemerken, dass

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x_0 \cdot x^{n-2} + x_0^2 \cdot x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-2} \cdot x + x_0^{n-1})$$

gilt. Abdividieren ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= x^{n-1} + x_0 \cdot x^{n-2} + x_0^2 \cdot x^{n-3} + \cdots + x_0^{n-2} \cdot x + x_0^{n-1} \\
&\to x_0^{n-1} + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^2 \cdot x_0^{n-3} + \cdots + x_0^{n-2} \cdot x_0 + x_0^{n-1} \\
&= n \cdot x_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}. \qquad \triangle$$

Wir sollten das negative Beispiel 7.1.5 (v) nicht ganz aus den Augen verlieren. Wenn Sie einmal die Funktion $f(x) = |x|$ aufzeichnen, dann werden Sie feststellen, dass sie genau an der kritischen Stelle $x_0 = 0$ einen Knick hat. Sie ist zwar durchgehend stetig, aber sie ist eben nicht glatt genug, um bei 0 differenzierbar zu sein. Auf diese Weise kann man anschaulich beschreiben, wann eine Funktion differenzierbar ist: wenn ihre Funktionskurve tatsächlich das ist, was man sich unter einer Kurve vorstellt, schön rund und glatt, und nicht eckig und kantig. Sobald eine Funktion ein Eck hat und ihre Glattheit aufgibt zugunsten eines plötzlichen Richtungswechsels, muss sie damit rechnen, ihre Differenzierbarkeit zu verlieren.

Bevor ich Sie im nächsten Abschnitt mit einigen Ableitungsregeln vertraut mache, möchte ich Ihnen noch kurz berichten, dass weder Newton noch Leibniz über eine so präzise Definition der Ableitung verfügten wie wir, obwohl sie die Differentialrechnung sehr weit ausbauten und eine große Menge von Problemen damit lösten. Die Konvergenzbetrachtungen, die wir mit so viel Mühe durchgeführt haben, gab es zu ihrer Zeit noch nicht, und sie mussten die Tangentensteigung mit etwas zweifelhaften Mitteln berechnen. Sehen Sie sich einmal die verschiedenen Schreibweisen in Bemerkung 7.1.4 an. Die Bezeichnung $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung legt die Auffassung nahe, dass es sich hier um einen

Quotienten handelt, und weil wir die Differenzen in Zähler und Nenner jeweils gegen 0 gehen ließen, könnte man bei gutem Willen sagen, dass hier zwei unendlich kleine Größen dy und dx durcheinander geteilt werden. Es dürfen keine Nullen sein, mit denen man operiert, denn durch Null darf man nicht dividieren. Daraus entsteht die Sprechweise von den *unendlich kleinen Größen*: sie sind nicht Null, aber doch kleiner als jede beliebige positive Zahl.

Falls Ihnen das jetzt sehr dubios vorkommt, dann haben Sie durchaus recht. Natürlich sind die unendlich kleinen Größen nichts, was man innerhalb der reellen Zahlen rechtfertigen könnte, eine Zahl ist entweder gleich Null oder nicht, und wenn sie nicht gleich Null ist, dann ist sie alles andere als unendlich klein. Das Dumme war nur, dass in der Frühzeit der Analysis die Vorstellung eines Grenzwertes, mit dem wir so locker hantieren, schlicht nicht bekannt war, so dass man, um die Steigung einer Tangente zu berechnen, auf die zweifelhafte Konzeption des unendlich Kleinen verfiel. Die Anfänge der Differentialrechnung waren also keineswegs genau fundiert, aber sie überzeugte die Mathematiker der damaligen Zeit durch ihre enormen Anwendungsmöglichkeiten. Der eine oder andere mag allerdings doch ein schlechtes Gewissen gehabt haben, denn Leibniz neigte zum Beispiel dazu, sich um den Begriff des Unendlichen herumzudrücken; obwohl er in seinen Argumentationen ständig benutzte, dass eine Größe wie dx zwar nicht 0, aber doch unendlich klein ist, gab er das nirgendwo zu.

Zum Glück brauchen wir uns heute nicht mehr mit der Frage zu quälen, ob die Sätze der Differentialrechnung wohl einen höheren Gültigkeitsanspruch haben als religiöse Mysterien, was beispielsweise noch 1734 ein Philosoph namens George Berkeley vehement bestritt. Wir können sie einfach mit Hilfe der Grenzwertregeln herleiten.

7.2 Ableitungsregeln

Am einfachsten ist die Situation beim Addieren von Funktionen und bei der Multiplikation mit einer Konstanten: die Ableitung verträgt sich problemlos mit diesen Operationen.

7.2.1 Satz

(i) Es seien f differenzierbar, $c \in \mathbb{R}$ und $g(x) = c \cdot f(x)$. Dann ist auch g differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = c \cdot f'(x).$$

(ii) Es seien $f_1, \ldots, f_n$ differenzierbar und $g(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$. Dann ist auch g differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = f_1'(x) + \cdots + f_n'(x).$$

Beweis

(i) Wir nehmen uns ein beliebiges x_0 heraus und verwenden die Definition der Differenzierbarkeit. Es gilt dann

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} = c \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to c \cdot f'(x_0)$$

für $x \to x_0$, denn $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0)$ für $x \to x_0$.

(ii) Ich beschränke mich hier auf den Fall $n = 2$, um nicht so viel schreiben zu müssen. In diesem Fall ist $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Für den Differentialquotienten erhalten wir somit

$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f_1(x)+f_2(x)-(f_1(x_0)+f_2(x_0))}{x-x_0}\\ &= \frac{f_1(x)+f_2(x)-f_1(x_0)-f_2(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0} + \frac{f_2(x)-f_2(x_0)}{x-x_0}\\ &\to f_1'(x_0)+f_2'(x_0)\end{aligned}$$

für $x \to x_0$, denn der erste Quotient geht gegen $f_1'(x_0)$ und der zweite gegen $f_2'(x_0)$.
$\triangle$

Sie sehen schon an diesen einfachen Aussagen, wie man Regeln über die Ableitung beweisen kann: man nimmt die Funktion, um die es geht, und setzt sie in die Definition der Ableitung ein. Mit etwas Glück kommt dann etwas Brauchbares heraus. Der Satz 7.2.1 genügt immerhin, um die Ableitungen von Polynomen auszurechnen.

7.2.2 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = -x^2 + 2x$. Dann ist $f'(x) = -2x + 2$.

(ii) Es sei $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$. Dann ist $g'(x) = 6x^2 - 10x + 7$.

(iii) Es sei $G(x) = -a_1x^2 + (a_0 - k_v)x - K_f$ die Gewinnfunktion aus dem Beispiel 7.1.1. Dann ist $G'(x) = -2a_1x + a_0 - k_v$. Wir werden uns später überlegen, wie man aus dieser Ableitung die Absatzmenge berechnet, mit der ein maximaler Gewinn erzielt werden kann.

Die Differentialrechnung wäre ziemlich dünn, wenn man sie nur auf Polynome anwenden könnte. Wir sollten deshalb herausfinden, wie man die Ableitungen komplizierterer Funktionen bestimmen kann. Bisher haben wir nur die Wirkung der Addition von Funktionen untersucht, und es würde sicher nichts schaden, auch eine Regel für das Produkt und den Quotienten von Funktionen zu haben. Diese Regeln kannte auch schon Leibniz, aber leider musste er feststellen, dass das Leben beim Multiplizieren und Dividieren nicht mehr ganz so einfach ist wie beim Addieren: die Ableitung des Produkts unterscheidet sich vom Produkt der Ableitungen.

7.2.3 Beispiel Es seien $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^2$. Dann ist $(f \cdot g)(x) = x^3 \cdot x^2 = x^5$. Folglich ist $(f \cdot g)'(x) = 5x^4$. Da aber $f'(x) = 3x^2$ und $g'(x) = 2x$ gilt, haben wir $f'(x) \cdot g'(x) = 3x^2 \cdot 2x = 6x^3$. Da für fast alle x die Ungleichung $5x^4 \neq 6x^3$ gilt, müssen wir schließen:

$$(f \cdot g)'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x).$$

Das ist bedauerlich, aber nicht weiter schlimm. Schließlich gibt es eine sogenannte Produktregel und eine Quotientenregel, wenn sie auch vielleicht nicht der ersten intuitiven Vorstellung entsprechen, die man sich von solchen Regeln macht. Dennoch sind sie einfach zu handhaben.

7.2.4 Satz Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gelten:

(i) $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar mit

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0).$$

(ii) Für $g(x_0) \neq 0$ ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)},$$

wobei $g^2(x_0)$ eine abkürzende Schreibweise für $(g(x_0))^2$ ist.

Man nennt diese Regeln *Produkt- bzw. Quotientenregel*.

Beweis

(i) Zum Beweis der beiden Regeln verwende ich wieder die Definition 7.1.3. Für die Produktregel muss ich also das Produkt der beiden Funktionen in die Definition einsetzen und zusehen, dass ich etwas Vernünftiges herausbekomme. Da die Regel etwas komplizierter aussieht als die Additionsregel, wird vielleicht beim Einsetzen nicht alles so glatt gehen wie in 7.2.1, und tatsächlich muss ich einen kleinen Trick benutzen, der uns in verschiedenen Ausprägungen noch gelegentlich begegnen wird. Zunächst einmal gilt

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}.$$

Nun muss ich aber irgendwie die Ableitungen von f und g ins Spiel bringen, und das kann ich bewerkstelligen, indem ich im Zähler des Bruchs den Wert $f(x_0)g(x)$ erst abziehe und dann gleich wieder addiere. Damit habe ich nichts am Wert des Quotienten geändert, aber ich kann dann leichter damit umgehen.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= g(x)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &\to g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \text{ für } x\to x_0,\end{aligned}$$

denn die beiden Quotienten in der letzten Zeile konvergieren definitionsgemäß gegen die Ableitungen von f bzw. g, und $g(x)$ wird für $x \to x_0$ kaum etwas anderes übrigbleiben als gegen $g(x_0)$ zu konvergieren. Durch den einfachen Kunstgriff, eine Zahl abzuziehen und gleich wieder zu addieren, konnten wir also den Differentialquotienten von $f \cdot g$ auf eine Kombination der Differentialquotienten von f und g zurückführen.

(ii) Praktisch den gleichen Trick verwende ich beim Beweis der Quotientenregel. Ich werde im folgenden einfach kommentarlos die Gleichungen aufschreiben und empfehle Ihnen, sie sich anhand der Erläuterungen zur Produktregel selbst zu erklären.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}\\ &= \frac{\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}}{x-x_0}\\ &= \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)\cdot g(x)\cdot g(x_0)}\\ &= \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\cdot\left(g(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &\to \frac{1}{g^2(x_0)}\cdot(g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)) \text{ für } x\to x_0,\end{aligned}$$

womit die Quotientenregel gezeigt ist. △

Sollten Sie beim Durcharbeiten der Beweise das eine oder andere Problem gehabt haben, dann grämen Sie sich nicht so sehr. In jedem Fall werden Sie an den Beispielen sehen, was man mit den Regeln anfangen kann. Sie werden aber auch sehen, dass der bisherige Stand unserer Kenntnisse noch bedenkliche Lücken aufweist, die wir so bald wie möglich schließen sollten.

7.2.5 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^3 \cdot (2x^2 + 1)$. Offenbar ist f ein Produkt, und die Produktregel gestattet die Berechnung der Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (2x^2 + 1) + 4x \cdot x^3 = 6x^4 + 3x^2 + 4x^4 = 10x^4 + 3x^2.$$

Ich habe hier die Formel 7.2.4 (i) wörtlich angewendet. Zuerst multipliziere man die Ableitung der ersten Funktion ($3x^2$) mit der zweiten Funktion und addiere dann dazu das Produkt aus der Ableitung der zweiten Funktion ($4x$) mit der ersten Funktion. Das Ergebnis ist natürlich nicht besonders aufregend, denn genausogut hätten wir erst die Klammer in der Definition von f ausmultiplizieren und die Funktion $f(x) = 2x^5 + x^3$ ableiten können. Auch dabei ergibt sich $f'(x) = 10x^4 + 3x^2$.

(ii) Dagegen liefert die Quotientenregel eine neue Klasse differenzierbarer Funktionen, nämlich die rationalen Funktionen, die man als Quotienten von Polynomen gewinnt. Zum Beispiel berechnet sich die Ableitung von

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x + 5}$$

aus

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (2x + 5) - 2 \cdot (x^2 + 1)}{(2x + 5)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 - 2}{(2x + 5)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 10x - 2}{4x^2 + 20x + 25}. \end{aligned}$$

(iii) Sie erinnern sich, wie ich in 7.1.6 mit Hilfe des Horner-Schemas auf etwas mühselige Weise die Funktion $f(x) = x^n$ abgeleitet habe. Jetzt, da wir die Produktregel zur Verfügung haben, geht das wesentlich eleganter, vorausgesetzt man ist bereit, sich der vollständigen Induktion zu bedienen. Sie beruht auf der Idee, eine Aussage für $n = 1$ nachzurechnen und dann zu zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt, sofern sie für $n \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Für $n = 1$ heißt die Funktion $f(x) = x$, und dass ihre Ableitung $f'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$ ist, bedarf kaum der Erwähnung. Der Induktionsanfang ist damit gesichert. Als Induktionsvoraussetzung nehme ich jetzt an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung von x^n gleich nx^{n-1} ist. Ich muss testen, wie sich die Ableitung von x^{n+1} verhält. Nun ist aber

$$x^{n+1} = x^n \cdot x,$$

und deshalb können wir die Ableitung von x^{n+1} mit der Produktregel aus den Ableitungen von x^n und von x berechnen. Es folgt:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})' &= (x^n \cdot x)' \\ &= (x^n)' \cdot x + (x)' \cdot x^n \\ &= nx^{n-1} \cdot x + 1 \cdot x^n \\ &= nx^n + x^n \\ &= (n+1)x^n.\end{aligned}$$

Wenn die Formel für n gilt, dann gilt sie also auch für $n + 1$. Da sie für $n = 1$ richtig war, muss sie nach dem Induktionsprinzip für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

(iv) Es gibt aber nicht nur natürliche Exponenten. Wir sind noch nicht so weit, dass wir die Funktion x^a für einen beliebigen Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ableiten können, das wird erst im Lauf des Kapitels möglich sein. Im Moment steht es uns immerhin offen, ganzzahlige und damit auch negative Exponenten zu betrachten. Es sei also

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Offenbar kann man auf f die Quotientenregel anwenden, und zufällig sind uns sowohl die Ableitung des Zählers als auch die Ableitung des Nenners bekannt. Aus 7.2.4 folgt dann

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

In der ersten Gleichung habe ich die Quotientenregel benutzt und dabei verwendet, dass die Ableitung der konstanten Funktion gleich Null ist, während die Ableitung von x^n gerade nx^{n-1} ergibt. Die zweite Gleichung macht von den Rechenregeln des sechsten Kapitels Gebrauch, genauer gesagt von 6.2.4 (iv), um $(x^n)^2 = x^{2n}$ zu erhalten. Für die letzte Gleichung brauche ich ebenfalls die Regeln der Potenzrechnung, nämlich den Satz über das Dividieren von Potenzen aus 6.2.4 (ii).
Die Gleichung

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

gilt also für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Nun sehen Sie aber auch die Lücke, die ich vorhin kurz angedeutet habe. Was soll man eigentlich beim derzeitigen Stand der Dinge mit der Produktregel anfangen? Alles was wir beherrschen, ist das Ableiten von Polynomen und rationalen Funktionen, und während das Produkt von zwei Polynomen wieder ein Polynom ergibt, erhält man beim Multiplizieren

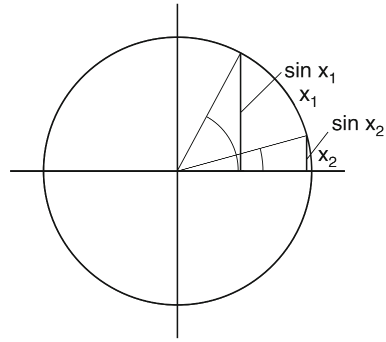


Abb. 7.2 Verhältnis von $\sin x$ zur Bogenlänge x

zweier rationaler Funktionen auch nur eine neue rationale Funktion. Wir können daher zur Zeit die Produktregel nur auf solche Fälle anwenden, wo wir sie gar nicht brauchen.

Sie werden zugeben, dass das keine begeisternde Situation ist. Die Lage wäre wesentlich erfreulicher, wenn die Ableitungen von ein paar aufwendigeren Funktionen wie Sinus oder Cosinus vorliegen würden, die man dann nach Lust und Laune mit irgendwelchen Polynomen multiplizieren könnte, um die Produktregel anzuwenden. Ich werde deshalb jetzt die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen berechnen. Für den Sinus brauche ich einen kleinen Hilfssatz, auf dessen genauen Beweis ich verzichte.

7.2.6 Lemma Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Beweis Ein genauer Beweis wäre nicht sehr schwer, aber er ist wohl nicht so wichtig. Sehen Sie sich lieber einmal die Abb. 7.2 an. Der Sinuswert ist zwar immer kleiner als der x-Wert, aber für kleine x-Werte unterscheidet sich die Bogenlänge immer weniger von der senkrechten Koordinate, die ja den Sinus von x angibt. Deshalb ist anzunehmen, dass das Verhältnis von $\sin x$ und x gegen 1 strebt, wenn x sich der Null nähert. △

Verfallen Sie nicht dem Glauben, dass das Lemma jetzt in aller Genauigkeit bewiesen wäre. Die anschauliche Begründung genügt aber, um die Aussage plausibel zu machen, denn sie hat nur Hilfscharakter für den Beweis des nachfolgenden Satzes, in dem ich die Ableitungen von Sinus und Cosinus berechne.

7.2.7 Satz Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \sin x \text{ und } g(x) = \cos x,$$

sind differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \cos x \text{ und } g'(x) = -\sin x.$$

Beweis Hier kann und will ich Ihnen einen genauen Beweis nicht ersparen. Er ist aber auch nicht sehr schwer, da wir im sechsten Kapitel schon eine Menge Vorarbeit geleistet haben – wir wissen Bescheid über die Stetigkeit der trigonometrischen Funktionen und kennen die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus. Beides werde ich jetzt gleich brauchen.

Ich muss wieder einmal den bekannten Differentialquotienten aus 7.1.3 betrachten. Nach 6.1.11 (ii) gilt für die auftretende Differenz von Sinuswerten:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \cdot (\sin x - \sin x_0) \\ &= \frac{2}{x - x_0} \cdot \left(\sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}\right) \\ &= \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}.\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt dabei sofort aus 6.1.11 (ii), und die dritte Gleichung ist eine simple Anwendung der Bruchrechung. Damit ist nun einiges gewonnen. Der Cosinus-Faktor ist völlig unproblematisch, denn aus dem sechsten Kapitel wissen Sie, dass die Cosinusfunktion stetig ist, also Grenzwerte überträgt. Zur Berechnung der Ableitung soll aber $x \to x_0$ gehen, und deshalb konvergiert

$$\frac{x + x_0}{2} \to \frac{x_0 + x_0}{2} = x_0.$$

Wegen der Stetigkeit des Cosinus folgt daraus

$$\cos \frac{x + x_0}{2} \to \cos x_0 \text{ für } x \to x_0.$$

Der erste Faktor sieht schon verdächtiger aus, aber das scheint nur so. In Lemma 7.2.6 haben wir alle Schwierigkeiten aus dem Weg geräumt, denn das Lemma besagte, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ist. Nun geht hier zwar nicht x gegen 0, aber aus $x \to x_0$ folgt natürlich

$$\frac{x - x_0}{2} \to 0,$$

und deshalb kann man Lemma 7.2.6 anwenden, wenn man x durch $\frac{x-x_0}{2}$ ersetzt. Es folgt also

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = 1,$$

und wir brauchen nur noch die Ergebnisse zusammenzufügen, um als Endresultat die Gleichung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$

zu erhalten.

Folglich ist $(\sin x)' = \cos x$. Auf analoge Weise findet man die Formel $(\cos x)' = -\sin x$ mit Hilfe von 6.1.11 (iv) und der Stetigkeit der Sinusfunktion. △

Ich betone noch einmal, dass diese Herleitung nur möglich war, weil wir in den früheren Kapiteln die nötigen Grundlagen gelegt haben. Ohne die Stetigkeit des Cosinus wäre der Cosinusterm recht problematisch gewesen, und ohne die Additionstheoreme wären wir erst gar nicht so weit gekommen, einen Cosinusterm aufzuschreiben.

Jetzt kann man natürlich weitaus sinnvollere Beispiele für die Produktregel durchrechnen.

7.2.8 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^2 \sin x + 3x \cos x$. Nach der Produktregel ist dann

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x + 3 \cos x + 3x(-\sin x) = -x \sin x + (x^2 + 3) \cos x.$$

(ii) Es sei $g(x) = \sin x \cos x$. Nach der Produktregel ist dann

$$g'(x) = \cos x \cos x + (-\sin x) \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

(iii) Es sei $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Nach der Quotientenregel gilt dann

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Manchmal gibt es doch auch positive Überraschungen. Die Anwendung der Quotientenregel für die Ableitung des Tangens führt im Zähler zu dem Term $\cos^2 x + \sin^2 x$, und in 6.1.6 (x) haben wir gesehen, dass das immer 1 ist. Somit reduziert sich der Bruch zu der einfachen Formel

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(iv) Die Ableitung des Cotangens berechnet man nach dem gleichen Muster. Es sei also $g(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Nach der Quotientenregel gilt dann

$$g'(x) = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Folglich ist

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Damit stehen uns schon ein paar Funktionen mehr zur Verfügung, deren Ableitungen ohne große Probleme berechenbar sind. Wenn ich nun schon die trigonometrischen Funktionen aus Kap. 6 untersuche, dann sollte ich auch die Exponentialfunktion e^x nicht vernachlässigen. Die Zahl e habe ich im Zusammenhang mit der stetigen Verzinsung eingeführt, sie hat also etwas mit Wachstumsvorgängen zu tun. Das Wachstum einer Funktion kann man aber am besten mit der Ableitung beschreiben: je größer die Ableitung, desto steiler ist die Funktionskurve und desto heftiger wächst die Funktion. Es ist deshalb nicht überraschend, dass die Ableitung der „Wachstumsfunktion" e^x wieder eng mit der Funktion selbst zusammenhängt. Dass sie allerdings *so* eng verbunden sind, erwartet man auf Anhieb vielleicht nicht: die Ableitung stimmt nämlich mit der Funktion selbst überein.

7.2.9 Satz Die Funktion $f(x) = e^x$ ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = e^x.$$

Der Beweis dieses Satzes würde einige Zeit in Anspruch nehmen und auch nichts nennenswert Neues bringen, weshalb ich auf ihn verzichte. Statt dessen sehen wir uns einige Beispiele an.

7.2.10 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot e^x$. Dann ist nach der Produktregel

$$f'(x) = (2x + 3) \cdot e^x + e^x \cdot (x^2 + 3x) = (x^2 + 5x + 3) \cdot e^x.$$

(ii) Es sei $g(x) = e^x \cdot \sin x$. Dann kann man wieder die Produktregel anwenden und findet

$$g'(x) = e^x \cdot \sin x + \cos x \cdot e^x = e^x \cdot (\sin x + \cos x).$$

(iii) Es sei $h(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. Mit der Quotientenregel folgt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{0 \cdot e^x - e^x \cdot 1}{(e^x)^2} \\ &= \frac{-e^x}{e^{2x}} \\ &= -\frac{1}{e^x} \\ &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

Aus diesen Beispielen kann man Verschiedenes ablesen. Zunächst einmal ist es offenbar äußerst praktisch, dass die Funktion e^x mit ihrer Ableitung übereinstimmt, denn das führt bei Anwendungen der Produktregel oft dazu, dass man die entstehenden Ableitungen durch Vorklammern von e^x zu einer übersichtlicheren Form zusammenfassen kann.

Wichtiger ist aber das Ergebnis aus Beispiel 7.2.10 (iii). Hätte man nicht erwartet, dass sich auch die Funktion e^{-x} gutwillig verhält und sich selbst als Ableitung hat? Wir haben ausgerechnet, dass das nicht der Fall ist, die Ableitung von e^{-x} ist nun einmal $-e^{-x}$. Es drängt sich also die Frage auf, wie die Ableitungen von zusammengesetzten Funktionen aussehen, denn e^{-x} ist die Hintereinanderausführung von $g(x) = -x$ und der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$. Außerdem gibt es ja noch eine Menge anderer Exponentialfunktionen wie zum Beispiel $f(x) = 17^x$. Stimmen auch sie mit ihren Ableitungen überein oder muss man sich dort ebenfalls auf Überraschungen gefasst machen? Es wird sich herausstellen, dass wir alle Probleme dieser Art lösen können, sobald wir einmal ausgerechnet haben, wie sich die Ableitungen von zusammengesetzten Funktionen verhalten. Da es um Verkettungen von Funktionen geht, nennt man die folgende Regel üblicherweise *Kettenregel*.

7.2.11 Satz Es seien $g : D \to E$ und $f : E \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x_0 \in D$. Ist g in x_0 differenzierbar und f in $g(x_0)$ differenzierbar, so ist auch $h = f \circ g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$h'(x_0) = g'(x_0) \cdot f'(g(x_0)).$$

Diese Regel heißt *Kettenregel*. Den Ausdruck $f'(g(x_0))$ bezeichnet man als äußere Ableitung, während $g'(x_0)$ innere Ableitung heißt.

Beweis Es schadet nichts, sich einen Beweis zu überlegen, er ist nicht lang und einigermaßen übersichtlich. Da wir über die Funktionen f und g nicht gerade viel wissen, bleibt uns nichts anderes übrig als wieder den Differentialquotienten aus 7.1.3 zu bemühen. Wieder einmal schreibe ich erst die nötigen Gleichungen auf und gebe hinterher einige Erläuterungen.

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} \\ &= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} \cdot \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},\end{aligned}$$

wobei ich $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$ gesetzt habe.

Hier ist nun folgendes geschehen. Am Anfang habe ich nur eingesetzt, was man unter der Funktion h zu verstehen hat, denn es ist $h(x) = f(g(x))$. Danach habe ich versucht, irgendwie den Differentialquotienten von g ins Spiel zu bringen, denn die Kettenregel beinhaltet den Term $g'(x_0)$. Zu diesem Zweck musste ich nur den vorhandenen Bruch mit $g(x) - g(x_0)$ erweitern, um zu dem Produkt aus zwei Quotienten zu gelangen, das Sie hier vor sich sehen. Damit habe ich mir aber ein Problem aufgehalst, weil ich jetzt mit dem seltsamen Quotienten $\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}$ etwas Vernünftiges anfangen muss. Zur größeren Übersichtlichkeit habe ich dann $y = g(x)$ und $y_0 = g(x_0)$ gesetzt. Das hilft auch tatsächlich weiter, denn auf einmal haben wir einen passenden Quotienten $\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$ vor uns, der gegen die Ableitung $f'(y_0)$ konvergiert, falls nur $y \to y_0$ geht. Wie es der Zufall will, gilt aber

$$y = g(x) \to g(x_0) = y_0 \text{ für } x \to x_0.$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{y\to y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= f'(y_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0),\end{aligned}$$

was genau der Behauptung der Kettenregel entspricht. △

Beachten Sie, dass der Beweis der Kettenregel einen ganz ähnlichen kleinen Trick enthält wie die Beweise von Produkt- und Quotientenregel. In 7.2.4 musste ich eine Zahl abziehen und dann gleich wieder addieren, also im Endeffekt eine Null aufaddieren. Hier habe ich durch eine Zahl geteilt und gleich darauf mit ihr multipliziert, also letztlich nur mit 1 multipliziert. Solche kleinen Hinterhältigkeiten gibt es in der Mathematik häufiger, wenn man mit einem Term nicht viel anfangen kann und ihn in eine handlichere Form bringen muss, ohne etwas an seiner Substanz zu ändern.

Um mit inneren und äußeren Ableitungen etwas vertrauter zu werden, betrachten wir ein paar Beispiele.

7.2.12 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = \sin(17x)$. Dann ist die innere Funktion $17x$ und die äußere Funktion die Sinusfunktion. Folglich ist

$$f'(x) = 17 \cdot \cos(17x).$$

Sie sollten immer darauf achten, dass die äußere Ableitung auf die innere Funktion angewendet werden muss: es heißt eben nicht $17 \cos x$, sondern $17 \cos(17x)$, weil die innere Funktion in die Ableitung der äußeren mitgenommen wird.

(ii) Es sei $f(x) = e^{(x^2)}$. Die innere Funktion ist x^2 und die äußere ist die Exponentialfunktion. Folglich erhalten wir als innere Ableitung $2x$ und als äußere wieder die

Exponentialfunktion. Die Kettenregel ergibt deshalb

$$f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}.$$

Auch hier müssen Sie wieder darauf achten, dass die Exponentialfunktion auf x^2 angewendet wird und nicht nur auf x.

(iii) Es sei $f(x) = \cos(e^x)$. Die innere Ableitung ist natürlich e^x und die Ableitung des Cosinus ist der negative Sinus. Multiplizieren führt zu dem Ergebnis

$$f'(x) = e^x \cdot (-\sin(e^x)) = -e^x \cdot \sin(e^x).$$

(iv) Es sei $f(x) = e^{-x}$. Dann ist $-x$ die innere Funktion mit der Ableitung -1. Folglich gilt

$$f'(x) = (-1) \cdot e^{-x} = -e^{-x}.$$

Das Ergebnis aus 7.2.10 (iii), das Ihnen dort vielleicht noch ein wenig erstaunlich vorkam, erklärt sich also mit Hilfe der Kettenregel, denn das resultierende Minuszeichnen stellt einfach die innere Ableitung dar.

Wir sind nun auch in der glücklichen Lage, mit Hilfe der Kettenregel die allgemeine Exponentialfunktion ableiten zu können. Dabei zeigt sich, dass sie fast, aber doch nicht ganz so einfach abzuleiten ist wie die Funktion e^x.

7.2.13 Folgerung Es seien $a > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = a^x$. Dann ist f differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x.$$

Beweis Der Beweis muss mit der Kettenregel zusammenhängen, sonst würde ich den Satz nicht gerade hier erwähnen. Erinnern Sie sich daran, wie der Logarithmus definiert ist: der natürliche Logarithmus von a ist die Zahl, mit der ich e potenzieren muss, um a zu erhalten. Folglich ist $a = e^{\ln a}$ und deshalb

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a},$$

nach den Regeln der Potenzrechnung. Damit ist a^x eine zusammengesetzte Funktion; die innere Funktion lautet $x \cdot \ln a$ und die äußere ist die übliche Exponentialfunktion. Die innere Ableitung ist demnach $\ln a$, denn wir müssen nur nach x und nicht etwa nach a ableiten. Da die äußere Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ergibt, folgt dann mit der Kettenregel

$$f'(x) = \ln a \cdot e^{x \cdot \ln a} = \ln a \cdot (e^{\ln a})^x = \ln a \cdot a^x. \qquad \triangle$$

Ich sollte erwähnen, dass im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion oft noch die sogenannten Hyperbelfunktionen auftreten. Ich möchte sie hier nicht genauer besprechen, sondern nur ihre Definition und die zugehörigen Ableitungen angeben.

7.2.14 Definition Die folgenden Funktionen heißen *Hyperbelfunktionen*.

(i) Die Funktion $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ heißt Sinus hyperbolicus.
(ii) Die Funktion $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ heißt Cosinus hyperbolicus.
(iii) Die Funktion $f(x) = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ heißt Tangens hyperbolicus.
(iv) Die Funktion $f(x) = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ heißt Cotangens hyperbolicus.

Solche Funktionen können eine Rolle spielen bei Geschwindigkeitsberechnungen: wenn Sie beispielsweise die Geschwindigkeit beim freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes bestimmen wollen, dann ist die Situation nicht mehr ganz so einfach wie in der Gleichung $s(t) = \frac{g}{2}t^2$, sondern man braucht den Tangens hyperbolicus.

Die Namen dieser Funktionen deuten eine gewisse Verwandtschaft zu den trigonometrischen Funktionen an, die man auf Grund der Definition kaum vermuten würde. Im Augenblick sind wir noch nicht so weit, dass ich Ihnen diese Verwandtschaft erklären kann, ich werde aber im Kapitel über komplexe Zahlen kurz darauf zurückkommen. Jetzt aber zu den Ableitungen.

7.2.15 Folgerung Die hyperbolischen Funktionen haben die folgenden Ableitungen.

(i) $(\sinh x)' = \cosh x$ und $(\cosh x)' = \sinh x$.
(ii) $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ und $(\coth x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}$.

Auch daran können Sie schon ein gewisses Maß an Ähnlichkeit zu den trigonometrischen Funktionen bemerken. Ich werde diese Regeln jetzt nicht beweisen, die Funktionen sind so einfach aufgebaut, dass ich Ihnen die Berechnung der Ableitungen zur Übung empfehlen möchte.

Ein paar Ableitungen fehlen uns noch in der Sammlung, und zwar sind es die Ableitungen der trigonometrischen Umkehrfunktionen und des Logarithmus. Da der Logarithmus ebenfalls als Umkehrfunktion eingeführt wurde, liegt es nahe, erst nach einem allgemeinen Satz über das Differenzieren von Umkehrfunktionen zu suchen und dann diesen Satz auf die speziellen Fälle anzuwenden. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, dass sie uns gleich noch die Ableitungen von Wurzelfunktionen liefert. Leider sind die Ableitungen von Umkehrfunktionen manchen Leuten unheimlich und erscheinen schwer verständlich. Dafür gibt es gar keinen Grund, denn die Formel ist sehr einfach und auch ihre Anwendung ist normalerweise nicht weiter schwer. Wir fangen in jedem Fall mit dem einfachsten Beispiel an: der linearen Funktion, die Sie in Abb. 7.3 sehen.

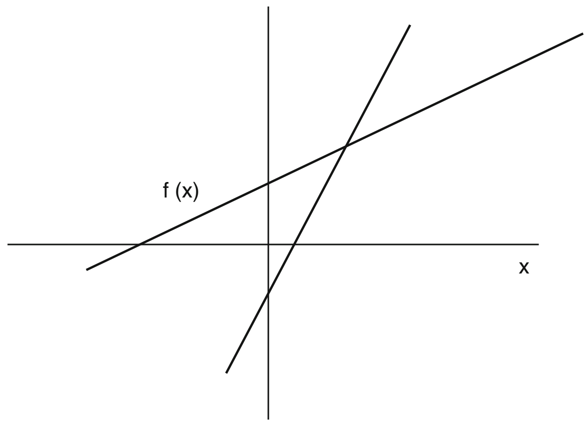


Abb. 7.3 Lineare Funktion und Umkehrfunktion

7.2.16 Beispiel Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $f(x) = ax + b$. Dann ist die Umkehrfunktion beschrieben durch $f^{-1}(y) = \frac{1}{a} \cdot (y - b)$, also

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{a} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Die Spiegelung einer Geraden an der ersten Winkelhalbierenden führt also bei den Steigungen dazu, dass man zum Kehrwert übergeht. Das ist bei anderen Funktionen auch nicht viel anders, wie der folgende Satz zeigt.

7.2.17 Satz Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton, $x_0 \in [a, b]$, $y_0 = f(x_0)$ und f^{-1} die Umkehrfunktion von f. Ist f in x_0 differenzierbar und gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} in y_0 differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis Bevor ich den Satz mit Hilfe des Differentialquotienten beweise, sollte ich versuchen, Ihnen die Aussage anschaulich plausibel zu machen. Sehen Sie sich einmal die Abb. 7.4 an. Sie finden dort ein Schaubild einer Funktion und ihrer Tangente am Punkt x_0 sowie die Umkehrfunktion und die Tangente der Umkehrfunktion am Punkt y_0. Da das Bild der Umkehrfunktion entsteht, indem man die ursprüngliche Funktion an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt, wird auch die Tangente bei x_0 durch eine entsprechende Spiegelung übergehen in die Tangente bei y_0. Das Spiegeln an der ersten Winkelhalbierenden entspricht aber dem Bilden der Umkehrfunktion, so dass die Tangente von f^{-1} bei y_0 genau die Umkehrfunktion der Tangente von f bei x_0 ist. So etwas hatte ich mir schon in 7.2.16 gedacht, und deshalb habe ich dort schon alles ausgerechnet: die Steigung der gespiegelten Tangente ist der reziproke Wert der ursprünglichen Steigung, also $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

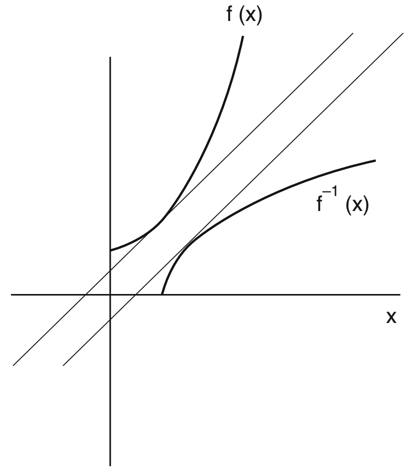


Abb. 7.4 Funktion und Umkehrfunktion

Das ist fast schon ein Beweis, aber für den Fall, dass Sie keine anschaulichen Argumente mögen, sehen wir uns noch einen rein rechnerischen Beweis an. Für $x \in [a, b]$ setze ich $y = f(x)$. Dann ist natürlich $x = f^{-1}(y)$ und ebenso $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Der Differentialquotient ist dann

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Zur Berechnung der Ableitung bei y_0 soll y gegen y_0 konvergieren. Dann ist aber auch

$$x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0, \text{ also } x \to x_0.$$

Es spielt demnach keine Rolle, ob ich $y \to y_0$ oder $x \to x_0$ schreibe; das eine folgt aus dem anderen und umgekehrt. Deshalb ist

$$\begin{aligned}\lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir wieder

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \triangle$$

Wenn Sie die Ableitung der Funktion kennen, dann kennen Sie also im Prinzip auch die Ableitung der Umkehrfunktion, Sie müssen nur f' richtig in die Formel einsetzen. Damit dabei auch nichts schief geht, rechnen wir ein paar Beispiele.

7.2.18 Beispiele

(i) Wir beginnen ganz harmlos mit der Funktion $f(x) = x^2$ und $x_0 = 2$. Dann ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ und $y_0 = 2^2 = 4$. Ich will also mit 7.2.17 die Ableitung der Wurzelfunktion bei $y_0 = 4$ berechnen. Die Formel sagt aus, dass ich die Ableitung der ursprünglichen Funktion beim Ausgangspunkt nehmen muss, und weil $f'(x) = 2x$ ist, haben wir $f'(2) = 4$. Die Ableitung der Umkehrfunktion ist dann der reziproke Wert, und das heißt

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}.$$

Die Wurzelfunktion hat also im Punkt 4 die Ableitung $\frac{1}{4}$.

(ii) Jetzt nehmen wir uns ein beliebiges $x > 0$ und betrachten wieder $f(x) = x^2$ mit seiner Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. In diesem Fall ist $y = x^2$ und $f'(x) = 2x$. Die Formel aus 7.2.17 liefert

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x}.$$

Das ist noch nicht sehr überzeugend, denn f^{-1} ist eine Funktion mit der unabhängigen Variablen y, und man hätte doch auch gern, dass die Ableitung von y und nicht von x abhängt. Aus $y = x^2$ folgt aber sofort $x = \sqrt{y}$ und damit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Daher ist

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

denn es spielt natürlich keine Rolle, ob Sie eine Variable x, y oder Turnschuh nennen.

(iii) Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, also setze ich $f(x) = e^x$. Dann ist $f^{-1}(y) = \ln y$ und wir haben

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$

Folglich ist

$$(\ln y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Ich habe hier nur konsequent in die Formel aus 7.2.17 eingesetzt. Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, also erhält man seine Ableitung durch Umdrehen der Ableitung von e^x. Nun ist aber die Ableitung von e^x wieder e^x, was aber genau dem Wert y entspricht. Deshalb ist

$$(\ln y)' = \frac{1}{y},$$

bzw.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

wenn man für die Variable x größere Sympathien hegt.

Wir haben jetzt nicht nur den Logarithmus in die Reihe der ableitbaren Funktionen aufgenommen, sondern wir verfügen auch über eine Methode, mit der man beliebige Umkehrfunktionen ableiten kann: man berechne $f'(x)$ mitsamt Kehrwert und sehe dann zu, dass man die Variable x durch die Variable y ausdrückt. Sie haben gleich noch Gelegenheit, sich dazu weitere Beispiele anzusehen. Zunächst möchte ich von der erstaunlichen Tatsache Gebrauch machen, dass die Ableitung von $\ln x$ die einfache Funktion $\frac{1}{x}$ ist, und damit die Ableitung beliebiger Potenzen x^a ausrechnen.

7.2.19 Satz Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^a$. Dann ist f differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}.$$

Beweis Man kann die Ableitung ähnlich ausrechnen wie im Fall der Funktion a^x. Es gilt nämlich

$$x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \cdot \ln x}.$$

Die Funktion x^a lässt sich also auffassen als eine zusammengesetzte Funktion. Die innere Funktion ist $a \cdot \ln x$, und deshalb beträgt die innere Ableitung $\frac{a}{x}$, wenn man die in 7.2.18 (iii) neu gewonnene Ableitung des Logarithmus berücksichtigt. Die äußere Funktion ist schlicht die Exponentialfunktion, die mit ihrer Ableitung identisch ist. Insgesamt erhalten wir

$$f'(x) = \frac{a}{x} \cdot e^{a \cdot \ln x} = \frac{a}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}.$$

Dabei habe ich wie schon in der vorherigen Rechnung benutzt, dass $e^{a \cdot \ln x} = x^a$ gilt. △

Wir stehen kurz vor dem Ende des zweiten Abschnittes, und um ihn zu vervollständigen, will ich noch die Ableitungen der inversen trigonometrischen Funktionen berechnen. Da sie die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind und wir deren Ableitungen schon lange kennen, sollte das nicht so schwer sein.

7.2.20 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = \sin x$. Dann ist $f^{-1}(y) = \arcsin y$ und wir haben

$$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

Folglich ist

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x},$$

denn bekanntlich ist der Cosinus die Ableitung des Sinus. Den erhaltenen Ausdruck $\frac{1}{\cos x}$ muss ich jetzt noch in Abhängigkeit von y bringen, da wir $\arcsin y$ ableiten wollen. Es gilt aber $y = \sin x$ und deshalb

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Folglich ist

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Wenn man es lieber mit einem x zu tun hat, heißt das

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(ii) Die Ableitung des Arcuscosinus kann man auf genau die gleiche Weise berechnen, weshalb ich noch einmal wörtlich dieselbe Prozedur durchführe. Es sei also $f(x) = \cos x$. Dann ist $f^{-1}(y) = \arccos y$ und wir haben

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

Folglich ist

$$(\arccos y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{-\sin x},$$

denn bekanntlich ist der negative Sinus die Ableitung des Cosinus. Den erhaltenen Ausdruck $\frac{1}{-\sin x}$ muss ich jetzt noch in Abhängigkeit von y bringen, da wir $\arccos y$ ableiten wollen. Es gilt aber $y = \cos x$ und deshalb

$$-\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - y^2}.$$

Folglich ist

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Wenn man es lieber mit einem x zu tun hat, heißt das

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iii) Beim Arcustangens sieht es nicht viel anders aus, nur der Zusammenhang zwischen x und y ist etwas schwieriger zu sehen. Wir starten wieder wie eben. Es sei diesmal $f(x) = \tan x$. Dann ist $f^{-1}(y) = \arctan y$ und wir haben

$$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y.$$

Folglich ist

$$(\arctan y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x,$$

denn in 7.2.8 haben Sie gesehen, dass $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ gilt. Das Problem ist nun, wie man $\cos^2 x$ mit einem y-Term ausdrücken kann, wenn $y = \tan x$ gilt. Darauf kommt man nicht auf Anhieb. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} y^2 = \tan^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \end{aligned}$$

wobei ich wieder einmal die trigonometrische Version des Pythagoras-Satzes angewendet und anschließend den Bruch aufgeteilt habe. Auflösen nach $\cos^2 x$ ergibt

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

und damit

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}.$$

In der x-bezogenen Fassung heißt das dann:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

(iv) Mit genau den gleichen Methoden zeigt man:

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Mittlerweile haben wir wohl genug Ableitungen ausgerechnet, und so langsam sollte ich Ihnen zeigen, dass man damit auch etwas anfangen kann.

7.3 Extremwerte und Kurvendiskussion

Vermutlich hat Ihnen schon mehr als einmal die Frage auf der Zunge gelegen, wozu das Ganze eigentlich gut sein soll. Die Differentialrechnung hat aber eine Fülle von Anwendungen, und insbesondere kann man sie benutzen, um das Verhalten von Kurven zu analysieren und Optimierungsprobleme zu lösen. Es waren solche Anwendungen, die es in der Frühzeit der Analysis rechtfertigten, mit Ableitungen zu rechnen, obwohl man nicht so ganz genau wusste, wie man die Differentialrechnung begründen sollte. Man hat wohl damit argumentiert, dass eine Theorie, die so erfolgreich ist, auch richtig sein muss – ein sehr schwaches Argument, wenn man ein wenig darüber nachdenkt, aber in der Zwischenzeit wurde die Analysis ja auf den sicheren Boden gestellt, den Sie im Lauf der letzten Kapitel kennengelernt haben, und alle Anwendungen sind schon lange mathematisch sauber begründet.

Um Extremwertprobleme wie zum Beispiel die Bestimmung des maximalen Gewinns vollständig lösen zu können, brauchen wir allerdings noch einen weiteren neuen Begriff: die sogenannte n-te Ableitung. Dahinter steckt kein Geheimnis, es geht nur darum, dass die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion darstellt, die man mit etwas Glück ableiten kann, und wenn das Glück besonders groß ist, kann man dieses Spiel auch ein paar mal wiederholen. So ist zum Beispiel für $f(x) = x^2$ die Ableitung $f'(x) = 2x$ wieder eine differenzierbare Funktion mit der Ableitung $(f')'(x) = 2$. Dass man die Ableitung der Ableitung dann als zweite Ableitung bezeichnet, sollte niemanden überraschen.

7.3.1 Definition Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in D$ ein Punkt im Definitionsbereich D. Die Funktion f heißt *zweimal differenzierbar in* x_0, wenn die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar ist. Man schreibt

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

manchmal auch

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = (f')'(x_0).$$

f'' heißt dann zweite Ableitung von f.

Allgemein heißt f *n-mal differenzierbar*, wenn die $(n-1)$-te Ableitung von f wieder eine differenzierbare Funktion ist. Man schreibt dann

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x),$$

und bezeichnet die n-te Ableitung manchmal auch mit

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

Die Funktion f heißt *n-mal stetig differenzierbar*, wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ eine stetige Funktion ist.

Das war eine reichlich lange Definition, und ich werde sie gleich mit ein paar Beispielen verdeutlichen. Zunächst aber noch ein Wort zur Berechnung der n-ten Ableitung. Wie findet man beispielsweise die vierte Ableitung einer Funktion? Ganz einfach dadurch, dass man die erste Ableitung bestimmt, aus ihr die zweite berechnet, daraus die dritte und mit ihrer Hilfe schließlich die vierte. Sie müssen sich also durch alle $n-1$ vorgelagerten Ableitungen durchhangeln, bevor Sie an die n-te gehen können.

Wir sehen uns diese Vorgehensweise an einigen Beispielen an.

7.3.2 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$, und zur Berechnung der zweiten Ableitung muss ich f' ableiten, das heißt $f''(x) = 6x$. Erneutes Ableiten führt zu $f'''(x) = 6$ und für die vierte Ableitung gilt $f^{(4)}(x) = 0$. Da beim Differenzieren der Nullfunktion nicht viel herauskommen kann, folgt daraus $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 4$.
Beachten Sie dabei die Schreibweise: es ist üblich, wenn auch nicht ganz einheitlich geregelt, die ersten drei Ableitungen durch Angabe der entsprechenden Anzahl von Strichen zu kennzeichnen, während man ab der vierten Ableitung einfach die Zahl selbst aufschreibt.

(ii) Es sei $f(x) = x^n$. Dann ist bekanntlich $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ und deshalb $f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$. Bei jedem weiteren Ableiten wird nun der Exponent um eins vermindert und der alte Exponent zu den Koeffizienten vor dem x hinzugefügt. Wenn Sie das lange genug machen, erhalten Sie

$$f^{(n-1)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x,$$

also

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Folglich ist $f^{(n+1)}(x) = 0$ und alle weiteren Ableitungen sind ebenfalls gleich Null.

Sie können an diesem Beispiel sehen, mit welcher Methode man oft die n-te Ableitung berechnet. Man verschafft sich nämlich die ersten zwei, drei oder auch vier Ableitungen und versucht, eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen. Danach überzeugt man sich davon, dass diese Gesetzmäßigkeit auch erhalten bleibt, wenn man zu höheren Ableitungen übergeht, und rechnet aus, was nach dem gefundenen Gesetz für die n-te Ableitung herauskommen muss. Streng genommen, müsste man danach noch mit vollständiger Induktion zeigen, dass der Gedankengang auch richtig war, aber bei nicht übermäßig komplizierten Funktionen pflegt man darauf zu verzichten.

(iii) Es sei $f(x) = \sin x$. Die ersten vier Ableitungen sind dann leicht ausgerechnet, denn es gilt $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ und $f^{(4)}(x) = \sin x$. Das ist aber seltsam, denn ab der vierten Ableitung fängt offenbar alles wieder von vorn an. Die fünfte Ableitung entspricht der ersten, die sechste der zweiten und so weiter, bis bei der achten Ableitung wieder der Sinus erreicht ist und die neunte Ableitung wieder mit der ersten übereinstimmt. Wie schreibt man nun so etwas auf? Wenn ich die Funktion selbst als nullte Ableitung bezeichne, dann tritt der Sinus auf bei der nullten, vierten, achten, ... Ableitung, also bei all den Ableitungen, deren Nummer durch vier teilbar ist. Für $n = 4m, m \in \mathbb{N}$, ist demnach $f^{(n)}(x) = \sin x$. Entsprechend finden wir den Cosinus bei der fünften, neunten, dreizehnten, ... Ableitung, also bei all den Ableitungen, deren Nummer ein Vielfaches von vier plus eins ist. Für $n = 4m + 1, m \in \mathbb{N}$, ist demnach $f^{(n)}(x) = \cos x$. Wenn Sie nun die beiden restlichen Fälle auf die gleiche Weise untersuchen, dann finden Sie:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{falls } n = 4m,\ m \in \mathbb{N} \\ \cos x, & \text{falls } n = 4m+1,\ m \in \mathbb{N} \\ -\sin x, & \text{falls } n = 4m+2,\ m \in \mathbb{N} \\ -\cos x, & \text{falls } n = 4m+3,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Es kann also durchaus vorkommen, dass die n-te Ableitung nicht in einem einfachen Ausdruck geschrieben werden kann und man auf Fallunterscheidungen zurückgreifen muss.

(iv) Sie sollten wenigstens eine Funktion sehen, die nicht zweimal differenzierbar ist. Das einfachste Beispiel dieser Art dürfte

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{falls } x \leq 0 \\ x^2, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

sein. Mit Hilfe des Differentialquotienten können Sie sich selbst davon überzeugen, dass f überall differenzierbar ist und $f'(x) = 2|x|$ gilt. In 7.1.5 haben Sie aber gesehen, dass die Funktion $|x|$ im Nullpunkt nicht differenzierbar ist, und daran wird der Faktor 2 auch nichts ändern. Man kann $f'(x)$ im Nullpunkt also nicht differenzieren, und deshalb ist f zwar stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar.

Die n-te Ableitung, insbesondere die zweite, werde ich brauchen, um festzustellen, ob eine Extremstelle ein Maximum oder ein Minimum ist. Im Moment sind wir leider immer noch nicht dazu imstande, mit solchen Extremstellen richtig umzugehen; ich brauche noch ein kleines Hilfsmittel, nämlich den *Mittelwertsatz*. Er stellt eine Beziehung her zwischen der Steigung einer beliebigen Sekante und der Ableitung einer Funktion. Später werde ich ihn benötigen, um Aussagen über die Monotonie von Funktionen zu beweisen. Wenn man nun allerdings den Mittelwertsatz selbst genau herleiten will, hat man ein wenig zu tun und gerät in Überlegungen, die zwar nicht sehr schwer, aber doch einigermaßen abstrakt sind. Ich werde mich deshalb darauf beschränken, eine anschauliche Begründung für den Satz zu geben. Nehmen Sie hier also das Wort Beweis nicht allzu wörtlich.

Dabei ist der Satz an sich ziemlich leicht einzusehen. Nehmen Sie einmal an, Sie fahren mit Ihrem Wagen auf der Autobahn. Die erste Stunde haben Sie mit einigem Verkehr zu kämpfen, und deshalb schaffen Sie in dieser Zeit nur 100 Stundenkilometer. Danach lichtet sich das Verkehrschaos, und Sie können die zweite Stunde durchgängig 140 fahren. Offenbar haben Sie damit insgesamt eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 erreicht. Es gibt aber nicht nur die *Durchschnittsgeschwindigkeit*, sondern auch die *Momentangeschwindigkeit*, das heißt die Geschwindigkeit, mit der Sie zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Straßen unsicher machen. Und natürlich müssen Sie wenigstens ein einziges Mal auch mit Ihrer Momentangeschwindigkeit die 120 erreicht haben, denn Sie können kaum von 100 auf 140 beschleunigen, ohne zumindest für einen kurzen Moment 120 gefahren zu sein.

Was bedeutet das jetzt in Formeln? Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 haben Sie die Strecke $s(t_0)$ zurückgelegt. Ein wenig später, zum Zeitpunkt t_1, beträgt Ihre insgesamt zurückgelegte Strecke $s(t_1)$. Innerhalb des Zeitraums $t_1 - t_0$ haben Sie also die Strecke $s(t_1)-s(t_0)$ hinter sich gebracht. Die Durchschnittsgeschwindigkeit bekommt man, indem man die Strecke durch die Zeit teilt, also

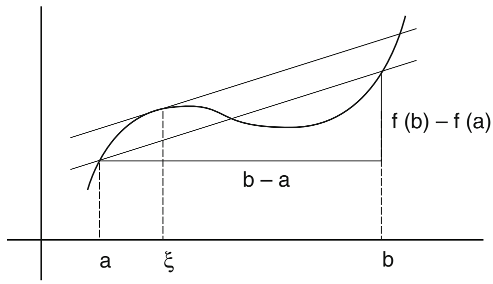
$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Oben haben wir uns überlegt, dass diese durchschnittliche Geschwindigkeit zumindest einen Moment lang der Momentangeschwindigkeit entsprochen haben muss. Wie Sie aber hoffentlich in Ihren Physik-Veranstaltungen gelernt haben, entspricht diese momentane Geschwindigkeit genau der ersten Ableitung der Streckenfunktion $s(t)$. Mit anderen Worten: zu dem Bruch, der die durchschnittliche Geschwindigkeit angibt, muss es einen Zeitpunkt t_α geben, an dem der Bruch genau der Ableitung $s'(t_\alpha)$ entspricht. In Formeln heißt das:

$$\frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = s'(t_\alpha),$$

und das ist auch schon fast der ganze Inhalt des Mittelwertsatzes.

Abb. 7.5 Mittelwertsatz



7.3.3 Satz (Mittelwertsatz) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis Ich habe meine Griechisch-Kenntnisse auch nur aus Mathematik-Büchern, in denen manchmal griechische Buchstaben verwendet werden. Ich verrate Ihnen deshalb, bevor ich mit dem Beweis anfange, dass man ξ einfach wie *xi* ausspricht. Nun werfen Sie einen Blick auf Abb. 7.5. Der Ausdruck $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ beschreibt die Steigung der Geraden durch die Punkte mit den Koordinaten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Wenn Sie diese Gerade nur lange genug parallel nach oben oder nach unten verschieben, dann wird sie zwangsläufig irgendwann in eine Tangente übergehen, und der x-Wert, bei dem sie die Funktionskurve tangiert, wird unser ξ sein. An der Zeichnung können Sie auch sehen, dass dieses ξ alles andere als eindeutig sein muss: in diesem Bild kommen zum Beispiel zwei Werte für ξ in Frage, und wenn die Funktion genügend Schlenker hat, können es auch wesentlich mehr sein. Darüber sagt der Satz aber nichts aus, er sagt nur, dass es ein ξ gibt, und schließt damit die Existenz weiterer Kandidaten nicht aus. △

Vielleicht wundern Sie sich ein wenig über diesen Satz und würden gern die eine oder andere Frage stellen. Zwei davon kann ich gleich beantworten. Erstens liefert uns Satz 7.3.3 die Existenz einer Zahl ξ mit einer bestimmten Eigenschaft, aber wie kann man dieses ξ konkret berechnen? Die Antwort ist ganz einfach: ich habe keine Ahnung. Die Berechnung von ξ hängt im Einzelfall stark von der untersuchten Funktion f ab und wird oft genug überhaupt nicht möglich sein. Das schadet aber gar nichts, denn Satz 7.3.3 ist ein rein theoretisches Hilfsmittel, und ich brauche nur die *Existenz* eines passenden Wertes ξ; wo er nun eigentlich liegt, ist mir dabei völlig egal.

Das bringt mich zur zweiten Frage. Zu was soll so ein seltsamer Satz gut sein? Ich werde ihn später brauchen, um ein einfaches Kriterium für Monotonietests herzuleiten, aber zwei kleine Anwendungen möchte ich Ihnen gleich zeigen. Sie wissen aus dem ersten Abschnitt, dass die konstante Funktion die Ableitung 0 hat. Kann man umgekehrt auch schließen, dass jede Funktion, deren Ableitung durchgängig 0 ist, eine Konstante ist? Der Mittelwertsatz liefert eine Antwort.

7.3.4 Folgerung Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist f konstant.

Beweis Für den Mittelwertsatz ist es natürlich völlig egal, ob ich a und b oder x und y in den Quotienten einsetze: ein ξ gibt es immer. Für beliebige Werte $x, y \in [a, b]$ gibt es also ein ξ zwischen x und y mit der Eigenschaft

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Nun ist aber die erste Ableitung durchgängig Null, und insbesondere ist $f'(\xi) = 0$, also auch

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) = 0.$$

Daraus folgt

$$f(y) - f(x) = 0,$$

also

$$f(x) = f(y).$$

Welche Werte x und y Sie auch in die Funktion f einsetzen mögen: das Ergebnis wird immer dasselbe bleiben. Folglich ist f eine konstante Funktion. △

Sie sollten beachten, dass der konkrete Wert von ξ hier tatsächlich völlig gleichgültig war, denn wenn die Ableitung immer Null ist, dann spielt es keine Rolle, welches ξ ich einsetze. Nur die Existenz von ξ war von Bedeutung, und die garantierte der Mittelwertsatz.

Mit Hilfe von 7.3.4 kann man sich nun Klarheit über eine weitere Frage verschaffen. Sie haben in 7.2.9 gesehen, dass die Ableitung von e^x wieder e^x ist. Damit ist aber noch nicht geklärt, ob es noch andere Funktionen gibt, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen oder ob die Exponentialfunktion die einzige ist. In dieser harten Form lässt sich die Frage leicht beantworten: für eine beliebige Konstante $a \in \mathbb{R}$ gilt mit $f(x) = a \cdot e^x$ natürlich auch $f'(x) = a \cdot e^x = f(x)$. Die nächste Folgerung zeigt, dass wir damit tatsächlich alle Funktionen dieser Art gefunden haben.

7.3.5 Folgerung Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f(x) = a \cdot e^x \text{ wobei } a = f(0) \text{ ist.}$$

Beweis Der Beweis ist nicht schwer zu verstehen, obwohl er einen kleinen Trick verwendet. Wir werden versuchen, die Folgerung 7.3.4 zu benutzen, und brauchen dafür eine Funktion, deren Ableitung verschwindet. Die Funktion f ist dafür nicht zu gebrauchen, denn wir wissen nur, dass ihre Ableitung mit f übereinstimmt. Wenn aber die Vermutung stimmt, dass f im Wesentlichen eine Exponentialfunktion ist, dann wäre

$$F(x) = f(x) \cdot e^{-x}$$

ein guter Kandidat für eine konstante Funktion, denn die Exponentialfunktionen sollten sich gegenseitig kürzen. Mit Hilfe von 7.3.4 kann ich leicht herausfinden, ob F wirklich konstant ist; es genügt, die erste Ableitung auszurechnen. Tatsächlich folgt mit der Produktregel

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) \cdot e^{-x} + (-e^{-x}) \cdot f(x) \\ &= f(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot f(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn die Ableitung von e^{-x} ist $-e^{-x}$ und laut Voraussetzung ist $f'(x) = f(x)$. Folglich ist $F'(x) = 0$, und nach 7.3.4 ist deshalb F eine konstante Funktion. Welches x ich auch in F einsetze, es wird immer das Gleiche herauskommen, also kann ich auch gleich 0 einsetzen und finde:

$$F(x) = F(0) = f(0) \cdot e^0 = f(0) = a.$$

Daraus folgt dann

$$f(x) \cdot e^{-x} = F(x) = a,$$

also

$$f(x) = a \cdot e^x. \qquad \triangle$$

Diese beiden Folgerungen waren vielleicht nicht lebensnotwendig für Ihre weitere Karriere, aber sie gehören zu den gelegentlichen Ausblicken, die ich uns hin und wieder gönnen möchte. Jetzt kehren wir zurück zur Untersuchung des Verhaltens von Funktionskurven. Zunächst gebe ich ein hinreichendes Kriterium für die Monotonie einer Funktion an.

7.3.6 Satz Es seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton steigend.
(ii) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton fallend.
(iii) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton steigend.
(iv) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, so ist f monoton fallend.

Beweis Auf Grund unserer Vorarbeiten ist der Satz sehr schnell zu beweisen. Fangen wir mit Nummer (i) an. Ich muss zeigen, dass aus der Positivität der Ableitung die strenge Monotonie folgt. Dazu sei $x < y$. Um die Monotonie nachzuweisen, muss ich $f(x) < f(y)$ zeigen. Nun gibt es aber nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in I$, für das die Gleichung

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$$

gilt. Wir wissen aber, dass die Ableitung immer positiv ist, und deshalb muss auch

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) > 0$$

gelten. Wegen $x < y$ ist natürlich $x - y < 0$, so dass Sie hier einen positiven Quotienten mit negativem Nenner vor sich haben. Dem Zähler bleibt somit nichts anderes übrig als auch negativ zu sein, also

$$f(x) - f(y) < 0,$$

was sofort zu dem gewünschten Ergebnis

$$f(x) < f(y)$$

führt.

Die restlichen Regeln beweist man ganz genauso. Für Nummer (ii) müssen Sie aus einer negativen Ableitung die Ungleichung $f(x) > f(y)$ für $x < y$ folgern, und Sie brauchen dazu nur die Relationszeichen im Beweis von (i) an den richtigen Stellen zu ändern. Die Aussagen (iii) und (iv) zeigt man analog zu (i) und (ii), indem man jeweils „$<$“ durch „$\leq$“ und „$>$“ durch „$\geq$“ ersetzt. △

Vielleicht sieht es auf den ersten Blick nicht so aus, aber dieser Satz erleichtert das Leben ungemein, wenn es darum geht, das Verhalten einer Kurve zu analysieren. Sie brauchen sich nicht mehr mit zwei verschiedenen unabhängigen Variablen x und y zu plagen und nachzurechnen, ob aus $x < y$ auch wirklich $f(x) < f(y)$ folgt, sondern es genügt, das Vorzeichenverhalten der ersten Ableitung zu untersuchen. Sehen wir uns Beispiele an.

7.3.7 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Dann ist $f'(x) = 3x^2 - 3$, und wir sollten testen, wann $3x^2 - 3$ positiv bzw. negativ ist. Das lässt sich aber leicht feststellen, denn es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 > 1 \\ &\Leftrightarrow |x| > 1 \\ &\Leftrightarrow x > 1 \text{ oder } x < -1. \end{aligned}$$

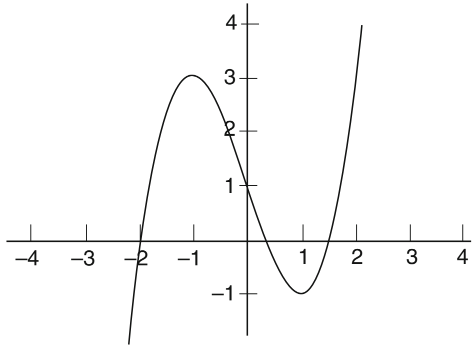


Abb. 7.6 $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Beim Schritt von $x^2 > 1$ nach $|x| > 1$ müssen Sie bedenken, dass es nicht nur positive Zahlen gibt; jede Zahl, die betragsmäßig größer als 1 ist, hat auch ein entsprechend großes Quadrat. Deshalb gibt es sowohl positive als auch negative Lösungen. Auf die gleiche Weise erhält man

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Das Monotonieverhalten der Funktion ist damit schon geklärt. f ist auf dem Intervall $(-\infty, -1)$ streng monoton steigend, zwischen -1 und 1 streng monoton fallend, und auf dem Intervall $(1, \infty)$ wieder streng monoton steigend. Demnach hat das Schaubild von f die Gestalt aus Abb. 7.6. Noch zwei Bemerkungen dazu. Wenn Sie wie hier herausfinden, dass die erste Ableitung in zwei verschiedenen Bereichen positiv wird, dann sollten Sie keine Formulierungen der Art „f wächst streng monoton auf $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$" verwenden. Der Satz 7.3.6 gilt für zusammenhängende Intervalle und nicht für zerstückelte, so dass man auch jeden einzelnen zusammenhängenden Teil separat aufführt. Außerdem können Sie schon an diesem Beispiel sehen, wie sinnvoll der Einsatz der Differentialrechnung sein kann. Sie brauchen sich nur vorzustellen, dass Sie die Definition der strengen Monotonie anwenden müssten: für $x < y$ müssten Sie dann nachrechnen, wann $x^3 - 3x + 1 < y^3 - 3y + 1$ ist und umgekehrt. Das wäre kein reines Vergnügen geworden.

(ii) Es sei $f(x) = \sin x$. Dann ist $f'(x) = \cos x$ und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \cos x > 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Wann der Cosinus positiv ist, kann man nämlich am einfachsten sehen, wenn man die Definition am Einheitskreis benutzt: solange Sie sich mit Ihrem Winkel rechts von der y-Achse befinden, bleibt die waagrechte Koordinate positiv, und links von der y-Achse wird sie negativ. Die waagrechte Koordinate ist aber der Cosinus, und man ist genau dann rechts von der y-Achse, wenn man sich zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ aufhält. Der Summand $2k\pi$ kommt nur daher, dass sich das Verhalten der trigonometrischen Funktionen nach einer vollen Kreisumdrehung wiederholt. Folglich ist die Sinusfunktion zum Beispiel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ streng monoton wachsend, aber zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ streng monoton fallend.

(iii) Es sei $f(x) = x^3$. Offenbar ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton, aber für die erste Ableitung gilt $f'(x) = 3x^2$, also insbesondere $f'(0) = 0$. Man kann demnach aus der strengen Monotonie einer Funktion *nicht* folgern, dass ihre Ableitung durchgängig positiv ist.

Das Beispiel 7.3.7 (iii) zeigt, dass man den schönen Satz 7.3.6 nicht einfach umkehren darf: zwar folgt aus der Positivität der Ableitung immer die strenge Monotonie, aber umgekehrt folgt aus der strengen Monotonie einer Funktion keineswegs die Positivität der Ableitung. Wenn man hingegen auf die Strenge in der Monotonie verzichtet, findet man auch eine Umkehrung von 7.3.6.

7.3.8 Satz Es seien I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(i) Ist f monoton steigend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
(ii) Ist f monoton fallend, so gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

Beweis Der Beweis ist nicht schwer, und ich werde wieder einmal nur den ersten Teil vorführen, weil der zweite auch nicht anders geht. Es sei also $x_0 \in I$. Ich habe zu zeigen, dass $f'(x_0) \geq 0$ gilt. Wie üblich, wenn ich keine nennenswerten Informationen über den Aufbau der Funktion habe, greife ich auf den Differentialquotienten zurück und schreibe

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Für x gibt es nur zwei Möglichkeiten: es kann vor oder hinter x_0 liegen. Falls $x < x_0$ ist, folgt aus der Monotonie von f, dass $f(x) \leq f(x_0)$ gilt. Somit ist $x - x_0 < 0$ und $f(x) - f(x_0) \leq 0$, also

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Falls $x > x_0$ ist, folgt aus der Monotonie von f, dass $f(x) \geq f(x_0)$ gilt. Somit ist $x - x_0 > 0$ und $f(x) - f(x_0) \geq 0$, also wieder

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

In jedem Fall ist daher der Differentialquotient größer oder gleich 0, und für die Ableitung folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \qquad \triangle$$

Wie Sie in 7.3.7 (iii) gesehen haben, wird dieser Satz nicht stärker, wenn man streng monotone Funktionen betrachtet; auch bei einer streng monoton steigenden Funktion kann man zunächst einmal nicht mehr erwarten, als dass $f'(x) \geq 0$ gilt. Wenn man Genaueres wissen will, muss man die Funktion selbst im Detail untersuchen.

Sie konnten schon an Beispiel 7.3.7 (i) und der Abb. 7.6 bemerken, dass die Differentialrechnung auch die Berechnung von Extremstellen, also von Maxima und Minima erlaubt. Wenn eine Funktion sich nämlich dafür entscheidet, nicht mehr monoton wachsend, sondern monoton fallend zu sein, dann hat sie zumindest für eine Weile ihren höchsten Punkt erreicht, und es liegt ein sogenanntes Maximum vor. Da die Ableitung links von diesem Punkt positiv und rechts von ihm negativ ist, wird ihr wohl in dem Punkt nichts anderes übrig bleiben als zu Null zu werden.

Ich werde jetzt definieren, was man unter einem lokalen Extremwert versteht und anschließend genauer aufschreiben, wie Extremwerte mit der ersten Ableitung zusammenhängen.

7.3.9 Definition Es seien I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

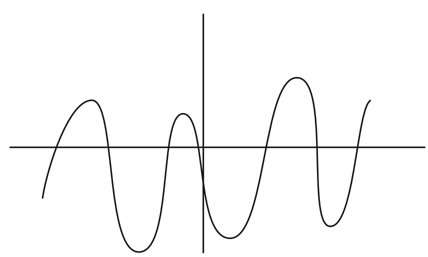
(i) f hat in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn f „in der Nähe von x_0“ nicht größer wird als bei x_0, das heißt: es gibt ein $a > 0$, so dass für alle $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ die Ungleichung $f(x) \leq f(x_0)$ gilt.
(ii) f hat in x_0 ein *lokales Minimum*, wenn f „in der Nähe von x_0“ nicht kleiner wird als bei x_0, das heißt: es gibt ein $a > 0$, so dass für alle $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ die Ungleichung $f(x) \geq f(x_0)$ gilt.

Gilt die Ungleichung sogar für alle $x \in I$, so spricht man von einem *globalen* Maximum bzw. Minimum.

Ein *Extremum* ist ein Minimum oder ein Maximum.

Wir unterscheiden also zwischen lokalen und globalen Extrema. Eine Funktion kann unter Umständen eine ganze Menge von lokalen Extremstellen haben, wie Sie an der Abb. 7.7 sehen können. Die Differentialrechnung liefert uns nun eine Methode zur Bestimmung lokaler Extrema: bei allen bisher betrachteten Funktionen war an den Extremstellen die erste Ableitung gleich Null, und das ist kein Zufall.

Abb. 7.7 Funktion mit lokalen Extrema



7.3.10 Satz Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$ mit einem lokalen Extremum in x_0. Dann ist

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis Der Beweis formalisiert nur das, was ich Ihnen schon zwischen 7.3.8 und 7.3.9 gesagt habe. Wenn wir uns mit x von links dem Punkt x_0 nähern, dann muss bei einem Maximum der Differentialquotient größer oder gleich Null sein, und von rechts ist es umgekehrt. Wir nehmen also an, bei x_0 liegt ein Maximum vor. Für $x < x_0$ ist $x - x_0 < 0$ und natürlich ist in der Nähe von x_0 auch $f(x) \leq f(x_0)$, denn schließlich haben wir bei x_0 ein Maximum. Daraus folgt aber $f(x) - f(x_0) \leq 0$ und somit

$$\lim_{x \to x_0, x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

denn der Quotient aus zwei negativen Zahlen wird positiv sein, und daran kann auch der Grenzübergang $x \to x_0$ nichts ändern.

Es sieht anders aus für $x > x_0$. Hier ist zwar ebenfalls $f(x) - f(x_0) \leq 0$, denn ein Maximum bleibt nun einmal ein Maximum, aber wir haben $x - x_0 > 0$. Der Differentialquotient wird deshalb negativ sein, und wir erhalten

$$\lim_{x \to x_0, x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Das ist praktisch, denn wir berechnen mit Sicherheit in beiden Fällen die Ableitung $f'(x_0)$, ganz gleich, ob der Wert x sich nun von links oder von rechts an x_0 heranschleicht. Für die Ableitung

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

gilt also gleichzeitig

$$f'(x_0) \geq 0 \text{ und } f'(x_0) \leq 0$$

und damit

$$f'(x_0) = 0. \qquad \triangle$$

Das ist schon ein guter Anfang, jetzt haben wir die Möglichkeit, die x-Werte herauszufiltern, die als Extremstellen in Frage kommen. Wir werfen wieder einen Blick auf Beispiele.

7.3.11 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$, und die einzige Nullstelle der Ableitung findet man bei $x_0 = 0$. Tatsächlich hat die Normalparabel im Nullpunkt ein globales Minimum.

(ii) Es sei wieder $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Dann ist $f'(x) = 3x^2 - 3$, und für die Nullstellen der Ableitung gilt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Es scheint also, dass für die Punkte -1 und 1 Extremstellen vorliegen, aber sind es nun Minima oder Maxima? Sie bemerken, dass der Satz 7.3.10 noch nicht ausreicht, um genauer zu bestimmen, mit was man es eigentlich zu tun hat. Im nächsten Satz 7.3.12 werde ich diese Lücke aber schließen.

(iii) Es sei $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$ und deshalb $f'(0) = 0$. Das ist aber seltsam, denn bei $x_0 = 0$ kann man beim besten Willen kein Extremum der Funktion erkennen. Wenn Sie genauer auf den Satz 7.3.10 schauen, werden Sie aber merken, dass hier gar kein Widerspruch vorliegt: der Satz sagt nur aus, dass bei jeder Extremstelle die Ableitung zu Null werden muss; er sagt *nicht*, dass auch umgekehrt bei jeder Nullstelle der Ableitung ein Extremwert liegen muss. Wie man am Beispiel der Funktion $f(x) = x^3$ sehen kann, ist das manchmal tatsächlich nicht der Fall, eine Nullstelle der Ableitung kann auch alles andere als ein Extremwert sein.

(iv) Man definiere $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x$. Das ist keine sehr aufregende Funktion, aber sie ist trotzdem für eine kleine Überraschung gut. Offenbar nimmt sie ihren minimalen Wert bei $x = 0$ und ihren maximalen Wert bei $x = 1$ an. Nun rechnen Sie einmal die Ableitung an diesen Stellen aus. Da die Ableitung überall gleich ist, nämlich $f'(x) = 1$, haben wir auch $f'(0) = f'(1) = 1$. Somit gibt es zwei Extremstellen 0 und 1, bei denen die Ableitung der Funktion durchaus nicht zu Null wird. Auch darin steckt aber kein Widerspruch, denn der Satz 7.3.10 verlangt ausdrücklich ein *offenes* Intervall (a, b) als Definitionsbereich, und in diesem Beispiel ist der Definitionsbereich $[0, 1]$. Sobald die Randpunkte mit ins Spiel kommen, wird die Sache kritisch, denn ein Randpunkt kann ein Extrempunkt sein, ohne dabei die Ableitung verschwinden zu lassen. Sie sollten also bei den Anwendungen von Satz 7.3.10 immer darauf achten, dass der Definitionsbereich der betrachteten Funktion ein offenes Intervall ist.

Aus diesen Beispielen können Sie nun einige Hinweise entnehmen. In Nummer (ii) haben Sie gesehen, dass wir mit unseren bisherigen Hilfsmitteln zwar die potentiellen Maxima und Minima identifizieren können, aber noch nicht so recht wissen, um welche Art von Extremum es sich im Einzelnen handelt. Nummer (iii) dagegen verdeutlicht etwas noch Schlimmeres. Die Nullstellen der Ableitung sind zwar die einzigen Kandidaten für Extremstellen, aber es muss keineswegs jede Nullstelle der Ableitung ein Extremwert sein. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist also nur eine *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines Extremwertes und keine hinreichende. Das heißt, wenn wir in x_0 einen Extremwert haben, dann muss seine Ableitung auch Null sein, aber umgekehrt können wir im Moment noch gar nichts schließen.

Diesem Mangel möchte ich jetzt abhelfen. Wir brauchen offenbar über das Verschwinden der Ableitung hinaus noch ein Kriterium, das uns verrät, ob eine Nullstelle der Ableitung nicht nur ein Extremwertkandidat, sondern auch wirklich ein Extremwert ist, und uns womöglich auch noch sagt, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt. Dabei kommt jetzt die zweite Ableitung zum Tragen.

7.3.12 Satz Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$.

(i) Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.
(ii) Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Beweis Sie haben sich inzwischen wohl daran gewöhnt, dass ich nur einen Teil nachweise und den Rest, der sich nicht nennenswert unterscheidet, zur Übung Ihnen überlasse. Ich beschränke mich also hier auf den Beweis von Nummer (i).

Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung, und deshalb ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) > 0.$$

Wenn x nahe genug bei x_0 ist, muss also der Quotient

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

ebenfalls positiv sein, denn er darf sich ab einer gewissen Nähe nicht mehr sehr von seinem positiven Grenzwert $f''(x_0)$ unterscheiden. Vergessen Sie dabei nicht, dass $f'(x_0) = 0$ ist, was zu der Aussage führt

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

für alle x, die hinreichend nahe bei x_0 liegen.

Nun können wir wieder zwei Fälle unterscheiden, je nachdem, ob x rechts oder links von x_0 liegt. Für $x < x_0$ ist $x - x_0 < 0$, und da der Quotient $\frac{f'(x)}{x-x_0}$ positiv ist, muss der Zähler negativ sein. Folglich ist $f'(x) < 0$ für alle $x < x_0$, die von x_0 nicht zu weit entfernt sind. Auf die gleiche Weise sieht man, dass $f'(x) > 0$ für solche x-Werte gilt, die in der Nähe von x_0 liegen und größer als x_0 sind. Wir haben also

$$f'(x) < 0 \text{ für } x < x_0 \text{ und } f'(x) > 0 \text{ für } x > x_0.$$

Im Satz 7.3.6 haben Sie aber gelernt, was eine positive bzw. negative erste Ableitung bedeutet: links von x_0 ist dann nämlich die Funktion f monoton fallend und rechts von

x_0 steigt sie monoton. Deshalb sind alle Funktionswerte in der Nähe von x_0 mindestens so groß wie $f(x_0)$ selbst, und das heißt, dass bei x_0 ein lokales Minimum vorliegt. △

Mit dem neuen Satz 7.3.12 lassen sich jetzt all die bisher besprochenen Mängel beheben, denn wir haben ein Kriterium zur Verfügung, das erstens angibt, ob überhaupt ein Extremwert vorhanden ist, und zweitens noch darüber informiert, um welche Art von Extremwert es sich handelt. Einige Beispiele werden die Situation verdeutlichen.

7.3.13 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^2$. Dann ist $f'(x) = 2x$, und die einzige Nullstelle von $f'(x)$ liegt bei $x_0 = 0$. Weiterhin ist $f''(x) = 2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die zweite Ableitung bei x_0 ist also positiv, und es liegt ein lokales Minimum vor.

(ii) Zum wiederholten Mal sei $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Aus 7.3.11 (ii) wissen wir schon, dass $f'(x) = 3x^2 - 3$ gilt und folglich die Nullstellen der Ableitung bei -1 und 1 liegen. Jetzt kann ich das Beispiel zu Ende rechnen, denn es gilt $f''(x) = 6x$ und deshalb

$$f''(-1) = -6 < 0 \text{ und } f''(1) = 6 > 0.$$

Nach 7.3.12 liegt also bei -1 ein lokales Maximum und bei 1 ein lokales Minimum vor.

(iii) Ich fürchte, ich habe das Problem der Gewinnmaximierung ein wenig vernachlässigt und sollte es schnellstens lösen. Wir hatten die Gewinnfunktion

$$G(x) = -a_1x^2 + (a_0 - k_v)x - K_f$$

ermittelt und auch bereits ihre Ableitung

$$G'(x) = -2a_1x + a_0 - k_v$$

berechnet. Die Extremstelle erhält man durch Nullsetzen der Ableitung, also:

$$-2a_1x + a_0 - k_v = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2a_1}(a_0 - k_v).$$

Für die zweite Ableitung gilt

$$G''(x) = -2a_1,$$

und da $a_1 > 0$ vorausgesetzt war, ist die zweite Ableitung immer negativ, ganz gleich, welche x-Werte Sie einsetzen wollen. Deshalb liegt bei

$$x_0 = \frac{1}{2a_1}(a_0 - k_v)$$

die optimale Absatzmenge vor, für die der Gesamtgewinn maximal wird.

(iv) Es gibt nicht nur Polynome im Leben; wir sollten wenigstens eine rationale Funktion behandeln. Es sei zum Beispiel

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Dann ist nach der Quotientenregel

$$g'(x) = \frac{2x \cdot (1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Das ist angenehm, denn ein Bruch ist dann Null, wenn sein Zähler Null ist und der Nenner keinen Ärger macht, und offenbar ist das genau für $x = 0$ der Fall. Zum Test auf Maximum oder Minimum bleibt uns allerdings die zweite Ableitung nicht erspart. Es gilt:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{2 \cdot (1+x^2)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{(1+x^2) \cdot (2 \cdot (1+x^2) - 8x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Dabei musste ich in der ersten Zeile neben der Quotientenregel auch die Kettenregel verwenden und in den nachfolgenden Zeilen einfach nur die üblichen Gesetze der Potenzrechnung benutzen.
Erinnern Sie sich daran, dass der interessante Wert bei $x = 0$ lag. Für $x = 0$ gilt dann

$$g''(0) = 2 > 0,$$

und somit haben wir ein lokales Minimum bei $x = 0$.

(v) Es sei $f(x) = x^4$. Dann hat f offenbar ein Minimum bei $x = 0$, aber es gilt $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$, und das heißt:

$$f'(0) = f''(0) = 0.$$

Obwohl ein Minimum vorliegt, ist hier die zweite Ableitung gleich Null. Darin liegt aber kein Widerspruch zu Satz 7.3.12, denn dieser Satz sagt nur: *wenn* bei einer Nullstelle der ersten Ableitung die zweite Ableitung von Null verschieden ist, dann haben wir auch eine Extremstelle. Er sagt *nicht*, dass umgekehrt auch bei jeder Extremstelle die zweite Ableitung größer oder kleiner als Null sein muss. Wie Sie sehen, kann sie durchaus auch zu Null werden.

Inzwischen haben wir zwar gewaltige Fortschritte gemacht, aber so recht zufriedenstellend ist die Lage immer noch nicht. Aus Beispiel 7.3.13 (v) können Sie entnehmen, dass die Bedingung $f''(x_0) > 0$ bzw. $f''(x_0) < 0$ eben nur hinreichend und keineswegs notwendig ist für die Existenz einer Extremstelle, gelegentlich kann auch bei Extremstellen $f''(x_0) = 0$ gelten. Der folgende Satz erlaubt es, mit den meisten Funktionen und ihren Extremwerten fertig zu werden.

7.3.14 Satz Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar.

(i) Es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

aber

$$f^{(n)}(x_0) > 0.$$

Ist n eine gerade Zahl, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.

(ii) Es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

aber

$$f^{(n)}(x_0) < 0.$$

Ist n eine gerade Zahl, so besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.

In beiden Fällen gilt: falls n ungerade ist, besitzt f *kein* lokales Extremum bei x_0.

Es wäre mit unserem Kenntnisstand durchaus möglich, diesen Satz zu beweisen, aber das würde nur aufhalten. Reden wir lieber kurz darüber, was er eigentlich aussagt.

Das Mindeste, was wir von einem Extremwert x_0 verlangen, ist natürlich $f'(x_0) = 0$. Nun kann die zweite Ableitung von Null verschieden sein, und in diesem Fall greift der Satz 7.3.12. Sie kann aber auch, wie Sie gesehen haben, zu Null werden. Dann müssen Sie so lange ableiten, bis irgendwann einmal eine Ableitung im Punkt x_0 nicht Null ist, und die Nummer dieser Ableitung überprüfen. Ist zum Beispiel $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, aber $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f kein Extremum bei x_0, denn die relevante Ableitungsnummer ist $n = 3$ – eine ungerade Zahl. Falls dagegen ein von Null verschiedener Wert zum ersten Mal bei der vierten Ableitung auftaucht, haben Sie gewonnen: $n = 4$ ist gerade, und nach 7.3.14 liegt bei x_0 ein Extremwert vor.

7.3.15 Beispiele

(i) Es sei $f(x) = x^3$. Dann ist

$$f'(0) = f''(0) = 0,$$

aber

$$f'''(0) = 6 \neq 0.$$

Die Ableitung wird also zum ersten Mal bei der Nummer $n = 3$ nicht Null sein. Da die Drei leider eine ungerade Zahl ist, hat $f(x) = x^3$ bei $x_0 = 0$ keinen Extremwert.

(ii) Es sei $f(x) = x^4$. Dann ist

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0,$$

und

$$f^{(4)}(0) = 24 > 0.$$

Hier ist $n = 4$, und weil die Vier eine gerade Zahl ist und außerdem $24 > 0$ gilt, hat die Funktion $f(x) = x^4$ ein Minimum bei $x_0 = 0$.

Mit 7.3.14 kann man nahezu alle Fälle behandeln, die in der Praxis auftreten. Die theoretisch denkbare Möglichkeit, dass für alle Ableitungen $f^{(n)}(x_0) = 0$ gilt, so dass wir gar keine Chance haben, irgendetwas auf gerade oder ungerade zu überprüfen, kommt zwar vor, ist aber so extrem selten, dass wir uns darüber keine weiteren Sorgen machen müssen.

Eine wichtige Anwendung der Sätze über Extremwerte ist die Behandlung sogenannter Extremwertaufgaben. Man spricht auch oft vom *Optimieren unter Nebenbedingungen*. Am besten ist es wohl an dem einen oder anderen Beispiel zu erklären.

7.3.16 Beispiele

(i) Ein Zylinder soll ein bestimmtes Volumen V bei minimalem Materialverbrauch erreichen. Das Volumen V ist also eine vorgegebene Zahl, und die Oberfläche des Zylinders soll minimiert werden. Das Volumen des Zylinders ist bekanntlich das Produkt aus Grundfläche und Höhe, also

$$V = \pi r^2 h.$$

Die Oberfläche F setzt sich zusammen aus Boden und Deckel mit den Flächen πr^2 sowie der Mantelfläche. Wenn Sie sich einmal vorstellen, dass Sie den Mantel aufrollen, dann entsteht ein Rechteck, dessen Grundseite dem Kreisumfang $2\pi r$ entspricht, und dessen Höhe gerade die Höhe h des Zylinders ist. Insgesamt erhalten wir eine Fläche von

$$F = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

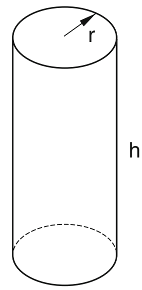


Abb. 7.8 Zylinder

Nun ist das leider eine Funktion mit zwei Variablen r und h, und noch können wir keine Funktionen mit zwei Variablen optimieren. Das macht aber gar nichts, denn wir kennen eine Beziehung zwischen r und h, die es uns erlaubt, eine Variable aus dem Spiel zu entfernen. Aus der *Nebenbedingung*

$$V = \pi r^2 h$$

folgt nämlich

$$h = \frac{V}{\pi r^2},$$

und diese Gleichung können wir in die *Zielfunktion* F einsetzen. Dann ist

$$F(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Ab jetzt ist alles Routine. Sie haben eine Funktion mit einer Variablen r und sollen einen Extremwert ausrechnen. Es gilt

$$F'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 2\pi r^3 = V \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Der Kandidat für den optimalen Radius steht damit fest. Wir sind aber noch nicht fertig, denn wir müssen noch den Test auf Maximum oder Minimum durchführen. Dafür berechne ich

$$F''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

Da r positiv ist und 4π schon immer größer als Null war, ist die zweite Ableitung in jedem Fall positiv, und bei $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ liegt ein Minimum vor. Im Hinblick auf den Materialverbrauch ist bei gegebenem Volumen also der Radius $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ optimal.

Die zugehörige Höhe h berechnet sich aus

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{V}{\pi} \cdot \left(\frac{2\pi}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{V}{\pi} \cdot \frac{2^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{2}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi} \cdot 4}$$
$$= 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

Die optimale Höhe entspricht also genau dem optimalen Durchmesser.

(ii) Zur Abwechslung ein Beispiel aus der Welt der Fernsehserien. Der Warp-Antrieb auf dem Föderationsraumschiff Enterprise beruht auf einer kontrollierten Reaktion von Materie und Antimaterie. Damit diese etwas prekäre Mischung nicht explodiert, muss eine bestimmte Treibstoffgleichung erfüllt sein: ist x die verwendete Masse der Materie und y die verwendete Masse der Antimaterie, so soll gelten: $x^2 y = 4$. Da auch die Sternenflotte Kosten sparen muss, hat man Untersuchungen angestellt und herausbekommen, dass der Antrieb in Abhängigkeit von Materie- und Antimateriemenge Kosten in Höhe von $K = x^2 + 4xy$ verursacht. Wie müssen die Massen von Materie und Antimaterie gewählt werden, damit die Kosten minimal sind?
Die Nebenbedingung lautet hier

$$x^2 y = 4$$

und die Zielfunktion ist

$$K = x^2 + 4xy.$$

Wir lösen die Nebenbedingung nach y auf und finden

$$y = \frac{4}{x^2}.$$

Setzt man dieses y in die Zielfunktion ein, so ergibt sich

$$K(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}.$$

Nun geht alles wie immer. Es gilt

$$K'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Der Kandidat für einen optimalen Punkt ist also $x = 2$, und wir müssen noch den Test mit der zweiten Ableitung durchführen. Hier ist

$$K''(x) = 2 + \frac{32}{x^3},$$

also ist $K''(2) = 2 + 4 = 6 > 0$. Damit liegt bei $x = 2$ ein Minimum vor, und die optimale Kombination findet man bei $x = 2$ und $y = \frac{4}{2^2} = 1$.

Ich hoffe, an den Beispielen ist deutlich geworden, wie man bei Extremwertaufgaben vorgeht. Zur Sicherheit schreibe ich noch das Schema zur Behandlung von Optimierungsproblemen in einer Bemerkung auf.

7.3.17 Bemerkung Gegeben sei ein Optimierungsproblem in zwei Variablen mit einer Nebenbedingung. Dann kann man das Problem auf die folgende Weise lösen.

(i) Man löse die Gleichung der *Nebenbedingung* nach der Variablen auf, bei der das Auflösen am einfachsten geht.
(ii) Man setze das Ergebnis in die zu optimierende *Zielfunktion* ein, so dass diese Funktion nur noch von einer Variablen abhängt.
(iii) Man berechne die erste und zweite Ableitung der neuen Zielfunktion.
(iv) Man bestimme die Nullstellen der ersten Ableitung.
(v) Man setze die ermittelten Nullstellen der ersten Ableitung in die zweite Ableitung ein und überprüfe das Vorzeichen. Falls der Wert positiv ist, liegt ein Minimum vor, falls er negativ ist, ein Maximum.

In aller Regel lassen sich Extremwertaufgaben auf diese Weise gutwillig einer Lösung zuführen. Etwas schwieriger wird es, wenn man mehr als zwei Variablen in der Zielfunktion hat, aber dieses Thema behandeln wir erst in dem Kapitel über mehrdimensionale Differentialrechnung.

Eine weitere wesentliche Anwendung der Differentialrechnung ist die Durchführung von *Kurvendiskussionen*. Manchmal ist von einer einigermaßen komplizierten Funktion zwar der Funktionsterm bekannt, aber man hat keine rechte Vorstellung davon, wie die Funktion wohl aussehen mag. Den besten Überblick über das Verhalten einer Funktion liefert natürlich ein Schaubild, und wir werden uns im folgenden überlegen, wie man sich die wesentlichen Informationen zur Erstellung eines Schaubildes verschafft. Die gängige Meinung, man könne doch eine Wertetabelle erstellen und anhand dieser Tabelle ein Schaubild malen, ist nicht wirklich überzeugend, denn in einer Wertetabelle können Sie immer nur endlich viele Werte berechnen, und es kann Ihnen leicht passieren, dass Sie zwischen dem siebzehnten und achtzehnten Wert einen Schlenker der Funktion übersprungen haben und sie deshalb für einfacher halten als sie ist.

Um Kurvendiskussionen durchführen zu können, brauche ich noch den Begriff des Wendepunktes.

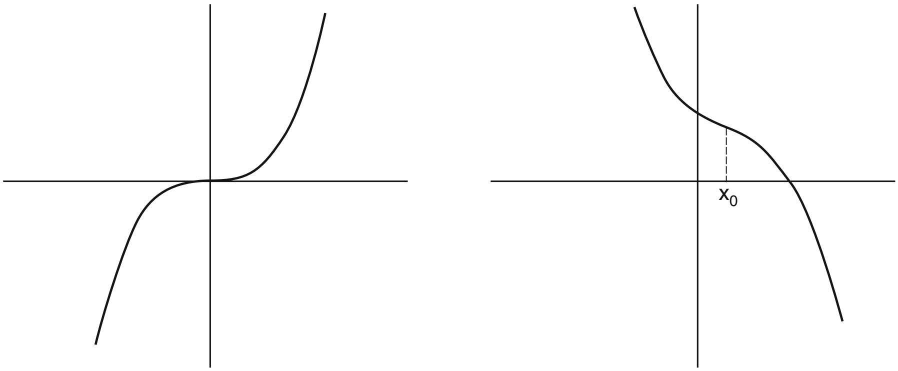


Abb. 7.9 Wendepunkte

7.3.18 Beispiel Es sei $f(x) = x^3$. Die Funktion ist zwar überall streng monoton wachsend, aber dennoch ändert sie unterwegs ihr Verhalten. Während links vom Nullpunkt die Steigung fallende Tendenz hat und die Kurve immer flacher wird, dreht sich diese Tendenz rechts vom Nullpunkt gerade um, und die Kurve wird wieder steiler. Man nennt deshalb den Nullpunkt einen *Wendepunkt*.

7.3.19 Definition Es seien I ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$. Der Punkt x_0 heißt Wendepunkt von f, wenn sich bei x_0 der Drehsinn der Kurventangente ändert, das heißt, wenn links von x_0 die Ableitung monoton fällt und rechts von x_0 die Ableitung monoton steigt oder umgekehrt.

Ein Wendepunkt x_0, bei dem auch noch $f'(x_0) = 0$ gilt, heißt Sattelpunkt.

Ein Beispiel haben Sie schon gesehen: 0 ist ein Wendepunkt der Funktion $f(x) = x^3$, und ein weiteres Beispiel finden Sie in Abb. 7.9. Im zweiten Funktionsgraphen hat die Ableitung links von x_0 steigende Tendenz, um dann rechts von x_0 wieder abzufallen.

Wenn man aber mit Hilfe der Definition 7.3.19 konkrete Funktionen nach Wendepunkten absuchen möchte, stößt man sehr schnell auf das Problem, dass diese Definition vielleicht angenehm anschaulich, aber rechnerisch sehr unzugänglich ist. Deshalb gebe ich jetzt ein Kriterium für Wendepunkte an, das man nachrechnen kann.

7.3.20 Bemerkung Wenn x_0 ein Wendepunkt von f ist, dann wird zum Beispiel $f'(x)$ links von x_0 monoton fallen und rechts von x_0 monoton steigen. Folglich hat f' in x_0 ein lokales Minimum, und im gegenteiligen Fall hat f' in x_0 ein lokales Maximum. In jedem Fall ist also ein Wendepunkt eine Extremstelle der ersten Ableitung f'. Sie haben aber gelernt, wie man Extremstellen berechnet: die erste Ableitung muss Null sein und die zweite Ableitung soll einen positiven oder negativen Wert haben. Der Unterschied zu den vorherigen Untersuchungen ist hier nur, dass wir die erste Ableitung der ersten Ableitung auf Null setzen müssen, denn es geht ja um eine Extremstelle von f'.

Es liegt also zum Beispiel dann ein Wendepunkt vor, wenn

$$(f')'(x_0) = f''(x_0) = 0$$

ist und zusätzlich

$$(f')''(x_0) = f'''(x_0) \neq 0$$

gilt. Allgemein folgt aus 7.3.14:

Ist

$$f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ und } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

so ist x_0 ein Wendepunkt, falls $n-1$ gerade ist, also falls n ungerade ist. Für $f(x) = x^5$ ist zum Beispiel $x_0 = 0$ ein Wende- und Sattelpunkt, denn es gilt

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0) = 0, \text{ aber } f^{(5)}(0) \neq 0.$$

Deshalb ist 0 *kein* Extremwert, denn 5 ist ungerade, aber es ist ein Sattelpunkt, denn 5 ist, wie schon erwähnt, ungerade.

Grob gesprochen, wird also eine Nullstelle der Ableitung immer entweder eine Extremstelle oder ein Sattelpunkt sein.

7.3.21 Beispiel Es sei $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Dann ist $f'(x) = 3x^2 - 3$ und $f''(x) = 6x$. Kandidaten für Wendepunkte sind immer die Nullstellen der zweiten Ableitung, und hier gilt:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Es kommt also nur $x_0 = 0$ in Frage. Um zu testen, ob bei 0 auch wirklich ein Wendepunkt vorliegt, müssen wir die dritte Ableitung bestimmen. Es ist aber $f'''(x) = 6 \neq 0$, und da 3 eine ungerade Zahl ist, haben wir mit $x_0 = 0$ tatsächlich einen Wendepunkt gefunden.

Das Ziel der Kurvendiskussion ist es nun, mit Hilfe einiger Berechnungen den Verlauf einer Funktionskurve zu bestimmen. Dabei wird der Begriff des *Pols* einer Funktion auftauchen, und deshalb sollte ich kurz erklären, was das ist.

7.3.22 Definition Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \notin D$. Der Punkt x_0 heißt Pol von f, wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

gilt, das heißt, die Funktion f wächst bei Annäherung an x_0 entweder in die positive oder in die negative Richtung ins Unendliche.

7.3.23 Beispiele

(i) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ hat bei $x_0 = 0$ einen Pol.
(ii) Die Funktion $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ hat bei $x_0 = 2$ einen Pol, denn dort wird der Nenner 0, während der Zähler von 0 verschieden ist. Die Funktion muss also bei Annäherung an 2 gegen Unendlich tendieren.

Sie sehen, dass bei rationalen Funktionen die wesentlichen Kandidaten für einen Pol die Nullstellen des Nenners sind, falls man sie nicht wie bei $1 = \frac{x}{x}$ einfach herauskürzen kann.

Jetzt haben wir endlich genug Material, um mit der Kurvendiskussion zu beginnen. Damit wir auch keine wichtigen Punkte vergessen, werde ich erst einmal notieren, welche Berechnungen üblicherweise für eine Kurvendiskussion durchgeführt werden sollten.

7.3.24 Bemerkung Eine Kurvendiskussion kann man in etwa nach dem folgenden Schema durchführen. Gegeben sei eine Funktion f.

(i) Man bestimme den Definitionsbereich von f und damit auch die Definitionslücken.
(ii) Man berechne die Nullstellen von f, das heißt, man löse die Gleichung $f(x) = 0$.
(iii) Man stelle fest, welche Definitionslücken von f Pole sind.
(iv) Man berechne (mindestens) die ersten drei Ableitungen von f.
(v) Man bestimme die lokalen Maxima und Minima von f. Falls dabei höhere Ableitungen als f''' gebraucht werden, leite man so lange ab wie nötig.
(vi) Man bestimme die Wendepunkte von f.
(vii) Man untersuche das *asymptotische Verhalten* von f für $x \to \pm\infty$, das heißt: durch welche einfacheren Funktionen kann man f für sehr große x-Werte annähern?
(viii) Man bestimme den Wertebereich von f.
(ix) Man stelle fest, ob Symmetrien vorhanden sind. Ist zum Beispiel die Funktion symmetrisch zur y-Achse oder zum Nullpunkt?
(x) Man zeichne ein Schaubild der Funktionskurve.

Bei einer Kurvendiskussion fällt also ein ziemlich großer Haufen Arbeit an, der allerdings weitgehend aus Routinerechnungen besteht. An einem Beispiel zeige ich Ihnen, wie so etwas konkret aussieht.

7.3.25 Beispiel Es sei

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}.$$

Für die Funktion f werde ich die in 7.3.24 aufgeführten zehn Punkte durchgehen.

(i) Den Definitionsbereich einer rationalen Funktion findet man, indem man die Nullstellen des Nenners ausschließt. Da offenbar genau dann $x-1 = 0$ gilt, wenn $x = 1$ ist, erhalten wir den maximalen Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

(ii) Anschließend suchen wir die Nullstellen von f. Das ist aber leicht, denn ein Bruch ist genau dann gleich Null, wenn sein Zähler gleich Null ist und der Nenner keinen Ärger macht. Es gilt aber

$$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Da der Nennerwert für $x = -1$ von Null verschieden ist, haben wir mit -1 die einzige Nullstelle von f gefunden.

(iii) Zum Feststellen der Pole müssen wir alle Definitionslücken untersuchen. Glücklicherweise gibt es hier nur eine Lücke, nämlich $x_0 = 1$. Die Frage ist nun, ob die Funktion f bei Annäherung an $x_0 = 1$ gegen Unendlich geht. Das Verhalten von f hängt stark davon ab, ob man sich der 1 von links oder von rechts nähert. In beiden Fällen wird der Zählerwert 4 und der Nennerwert 0 sein, so dass mit Sicherheit die Tendenz gegen Unendlich gegeben ist, aber wie findet man das richtige Vorzeichen? Man muss nur genau hinsehen, wie sich Zähler und Nenner verhalten, wenn man von links oder von rechts kommt.
Für $x < 1$ ist $(x+1)^2 > 0$, denn Quadrate sind immer positiv, aber $x - 1 < 0$. Deshalb ist $f(x) < 0$ für $x < 1$, und daraus folgt

$$\lim_{x\to 1, x<1} \frac{(x+1)^2}{x-1} = -\infty.$$

Für $x > 1$ ist immer noch $(x+1)^2 > 0$, aber $x - 1 > 0$. Deshalb ist $f(x) > 0$ für $x > 1$, und daraus folgt

$$\lim_{x\to 1, x>1} \frac{(x+1)^2}{x-1} = \infty.$$

Der Wert $x_0 = 1$ ist demnach ein Pol von f, bei dem im Grenzübergang sowohl $-\infty$ als auch $+\infty$ erreicht werden.

(iv) Das Berechnen der Ableitungen ist oft das Lästigste an der ganzen Kurvendiskussion. Ich rechne im folgenden die ersten drei Ableitungen von f ohne jeden weiteren Kommentar aus. Später zeige ich Ihnen dann, wie man sich das mühselige Ableiten in manchen Fällen etwas erleichtern kann.

Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung berechnet sich dann durch:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - 2 \cdot (x-1) \cdot (x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - 2 \cdot (x^2 - 2x - 3)}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 + 4x + 6}{(x-1)^3} \\ &= \frac{8}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Das sieht man gern, denn man kann die zweite Ableitung auch als

$$f''(x) = 8 \cdot (x-1)^{-3}$$

schreiben, und das vereinfacht die Berechnung der dritten Ableitung erheblich. Es gilt nämlich:

$$f'''(x) = 8 \cdot (-3) \cdot (x-1)^{-4} = \frac{-24}{(x-1)^4}.$$

Damit sind die Vorarbeiten zur Bestimmung der Extremwerte erledigt.

(v) Zur Berechnung der Extremstellen suchen wir nach den Nullstellen von f'. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+3} \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 3. \end{aligned}$$

Kandidaten für Extremwerte sind also $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Um herauszufinden, ob sie auch wirklich als Extremwerte bezeichnet werden dürfen oder nur so tun, als wären sie extrem, müssen wir beide Werte in die zweite Ableitung einsetzen. Es folgt dann

$$f''(-1) = \frac{8}{(-1-1)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0$$

und

$$f''(3) = \frac{8}{(3-1)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0.$$

Folglich liegt bei $x_1 = -1$ ein lokales Maximum und bei $x_2 = 3$ ein lokales Minimum vor. Die entsprechenden Funktionswerte lauten

$$f(-1) = 0 \text{ und } f(3) = \frac{4^2}{3-1} = \frac{16}{2} = 8.$$

(vi) Die Berechnung der Wendepunkte ist in diesem Fall besonders einfach, es gibt nämlich keine. Bedingung für einen Wendepunkt ist das Verschwinden der zweiten Ableitung, und es gilt

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow 8 = 0,$$

was doch vergleichsweise selten vorkommt. Da natürlich 8 von 0 verschieden ist, hat die zweite Ableitung keine Nullstellen und deshalb die Funktion auch keine Wendepunkte. Das zeigt übrigens, dass wir uns in Nummer (iv) zu viel Mühe gemacht haben: ich habe nämlich in vorauseilendem Gehorsam bereits die dritte Ableitung ausgerechnet, und nun stellt sich heraus, dass ich sie gar nicht brauchen kann. So etwas kommt vor, und ein bisschen Übung im Ableiten schadet auch nichts.

(vii) Über so etwas wie asymptotisches Verhalten haben wir noch nie gesprochen. Bei der Zeichnung des Schaubildes ist es eine unverzichtbare Informationsquelle, zu wissen, ob sich die Funktion f für große x-Werte tendenziell einer einfacheren Funktion angleichen wird. Das übliche Hilfsmittel zum Herausfinden dieser Funktion ist die *Polynomdivision*, vor der ich mich bisher erfolgreich drücken konnte. Ich werde sie einmal für unsere Funktion f vorführen und danach noch ein paar Worte dazu sagen. Ein Bruch ist ja nichts weiter als ein Quotient, und deshalb können wir die Funktion

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$$

auch darstellen, indem wir den Zähler wie bei Zahlen auch durch den Nenner dividieren. Die Prozedur ist dabei die gleiche wie beim Teilen von Zahlen.

$$\begin{array}{l}
(x^2 + 2x + 1) : (x-1) = x + 3 + \dfrac{4}{x-1} \\
\underline{x^2 - x} \\
\phantom{x^2 - {}} 3x + 1 \\
\phantom{x^2 - {}} \underline{3x - 3} \\
\phantom{x^2 - 3x - {}} 4
\end{array}$$

Hier ist nichts Geheimnisvolles passiert. Ich habe zuerst die höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners geteilt, das ergab $\frac{x^2}{x} = x$. Anschließend musste ich wie beim gewöhnlichen Dividieren den gesamten Nenner mit dem Ergebnis x multiplizieren und bekam $x^2 - x$ heraus. Wie üblich schreibe ich diesen Term unter den Zähler und ziehe ihn vom entsprechenden Zählerterm $x^2 + 2x$ ab. Damit bekomme ich $3x$, und wieder mache ich dasselbe wie beim Dividieren von Zahlen: ich hole die nächste Stelle herunter und schreibe sie einfach dazu. Damit

erhalte ich den Term $3x + 1$, mit dem ich genauso verfahre wie vorher mit dem ursprünglichen Zähler. Ich muss also $3x$ durch x teilen, wobei ich das Ergebnis 3 erhalte. Anschließend wird wieder der Nenner mit diesem Ergebnis multipliziert, was zu $3x - 3$ führt. Sie sehen, wo $3x - 3$ steht, nämlich genau unter $3x + 1$, und die Subtraktion beider Terme ergibt 4.
Wir gehen also genauso vor wie beim Dividieren natürlicher Zahlen, nur dass hier nicht ausschließlich Zahlen, sondern eben Polynome auftauchen. Das Ergebnis der Division ist

$$(x^2 + 2x + 1) : (x - 1) = x + 3 \text{ Rest } 4.$$

Der Rest 4 bedeutet aber nur, dass beim Dividieren von 4 durch den Nenner $x - 1$ nichts Besseres herauskommt als ein schlichtes $\frac{4}{x-1}$, und genau das habe ich oben aufgeschrieben. Im Endergebnis finden wir also

$$(x^2 + 2x + 1) : (x - 1) = x + 3 + \frac{4}{x - 1}.$$

Das war nun ein etwas länglicher Exkurs zur Polynomdivision, ohne die man bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens nicht auskommt. Was haben wir durch die ganze Rechnung eigentlich gewonnen? Wir wissen, dass

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} = x + 3 + \frac{4}{x - 1}$$

gilt. Für betragsmäßig sehr große x-Werte, das heißt für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$, wird aber der Ausdruck $\frac{4}{x-1}$ beliebig klein. Etwas mathematischer ausgedrückt bedeutet das:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x - 1} = 0.$$

Mit anderen Worten: für sehr großes x kann man den Term $\frac{4}{x-1}$ vernachlässigen, da er ohnehin annähernd Null ist. Das asymptotische Verhalten von f lässt sich also beschreiben durch

$$f(x) \approx x + 3 \text{ für } x \to \pm\infty.$$

Sie werden gleich beim Zeichnen sehen, dass man mit diesem Ergebnis etwas anfangen kann.

(viii) Normalerweise empfehle ich, die Bestimmung des Wertebereichs auf später zu verschieben, wenn die Zeichnung des Funktionsgraphen vorliegt. Sicher ist es mathematisch sauberer, den Wertebereich schon an dieser Stelle rechnerisch zu bestimmen, aber es ist doch oft recht aufwendig, und deswegen sollten Sie noch ein wenig Geduld bewahren.

(ix) Für die Bestimmung von Symmetrien gilt dasselbe wie für den Wertebereich: zeichnen Sie erst die Funktion und lesen Sie dann eventuell vorhandene Symmetrien an der Zeichnung ab.

(x) Zum Aufmalen des Funktionsgraphen brauchen wir nur die Informationen zusammenzutragen. Man zeichnet am besten zuerst die Asymptoten ein. Für $x \to \pm\infty$

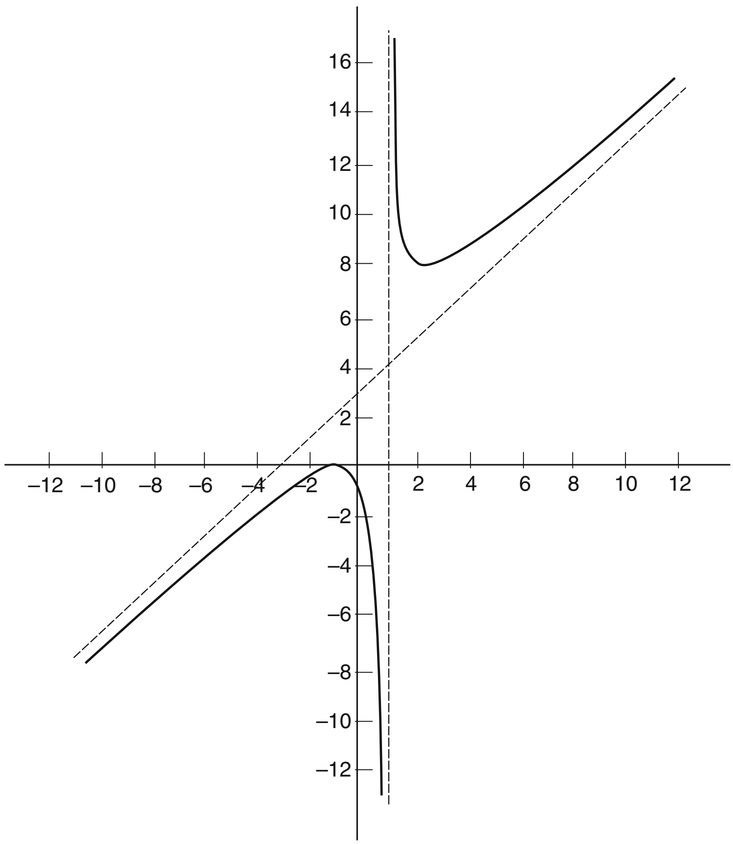


Abb. 7.10 Schaubild von $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$

ist das die Gerade $y = x + 3$, und für $x \to 1$ nähert sich die Funktion von rechts $+\infty$ und von links $-\infty$, wird sich also von verschiedenen Seiten der senkrechten Geraden $x = 1$ anschmiegen. Ihre Nullstelle liegt bei $x = -1$, im Punkt $(-1, 0)$ hat sie ein relatives Maximum, im Punkt $(3, 8)$ ein relatives Minimum. Sie muss also zwei Zweige haben. Der erste Zweig kommt von links aus der Tiefe von $-\infty$ und wird dabei begleitet von der Geraden $y = x + 3$. Bei $x = -1$ dreht er sich wieder nach unten, um für $x \to 1$ in die negative Unendlichkeit zu verschwinden. Das Verhalten des zweiten Zweiges sollten Sie sich selbst überlegen.

In jedem Fall hat die Funktion die Gestalt aus Abb. 7.10. Daran können Sie auch sofort den Wertebereich ablesen. Die Funktion erwischt alle reellen Zahlen bis auf die Zahlen zwischen 0 und 8. Folglich ist

$$f(D) = \mathbb{R}\backslash(0, 8).$$

Auch eine Symmetrie ist erkennbar, denn offenbar ist der Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Punkt $(1, 4)$.

Sie sehen, dass so eine Kurvendiskussion eine recht langwierige und fehleranfällige Prozedur ist. Keine der anfallenden Arbeiten ist wirklich schwierig, aber sie häufen sich doch sehr, und man neigt mit der Zeit zu Nachlässigkeiten. Immerhin kann man sich gelegentlich das Ableiten etwas erleichtern, wie das folgende Beispiel zeigt.

7.3.26 Beispiel In 7.3.25 habe ich die Funktion einfach so abgeleitet wie sie auf dem Papier stand. Manchmal ist es aber sinnvoll, vorher das asymptotische Verhalten der Funktion auszurechnen und mit der neu gewonnenen Darstellung weiter zu arbeiten. In unserem Beispiel war

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1} = x + 3 + \frac{4}{x-1} = x + 3 + 4 \cdot (x-1)^{-1}.$$

Das erleichtert das Differenzieren ungemein, denn es gilt:

$$f'(x) = 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (x-1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = 1 - 4 \cdot (x-1)^{-2},$$

und davon ausgehend können Sie leicht alle nachfolgenden Ableitungen berechnen, ohne sich mit der Quotientenregel plagen zu müssen.

Sie sollten sich also nicht unbedingt an die Reihenfolge des Schemas aus 7.3.24 halten, etwas Flexibilität erleichtert manchmal das Leben.

7.4 Newton-Verfahren und Regel von l'Hospital

Ich habe Ihnen im dritten Kapitel von den Schwierigkeiten berichtet, die beim Lösen algebraischer Gleichungen auftreten: sobald der Grad die 4 überschreitet, gibt es keine Lösungsformel mehr, und man muss sich irgendwie anders behelfen. Die wesentliche Methode besteht darin, möglichst gute Näherungslösungen zu finden, die man kaum noch von der eigentlichen Lösung unterscheiden kann.

Es ist nicht weiter überraschend, dass einer der Erfinder der Differentialrechnung auch schon über dieses Problem nachgedacht hat, obwohl weder Newton noch Leibniz darüber Bescheid wussten, dass es bestimmte Lösungsformeln einfach nicht geben kann. Das Näherungsverfahren, von dem ich Ihnen jetzt berichten will, geht auf Isaac Newton zurück und heißt deswegen schlicht *Newton-Verfahren*. Sobald das erledigt ist, werde ich noch kurz auf die Regel von l'Hospital zu sprechen kommen, mit der man bestimmte Grenzwerte in Windeseile berechnen kann, aber zunächst zu den Gleichungen.

7.4.1 Bemerkung Es sei f eine differenzierbare Funktion mit einer Nullstelle im Punkt $\bar{x}$. Unsere Aufgabe ist es, diese Nullstelle zu ermitteln. Da wir recht wenig über die Funktion wissen, beginnen wir einfach mit irgendeinem Punkt x_0, den ich *Startwert* nenne. Falls man nicht gerade vom Glück verfolgt wird, ist x_0 selbst keine Nullstelle der Funktion f, und wir müssen weitersuchen.

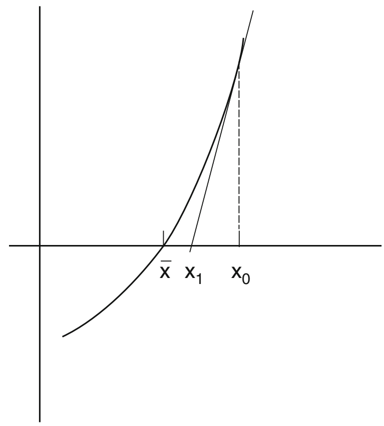


Abb. 7.11 Nullstelle und Näherungswerte

Aber wo? Die Abb. 7.11 legt eine Vermutung nahe. Wenn Sie die Tangente für den Punkt x_0 mit der x-Achse schneiden, können Sie immerhin hoffen, dass der neue Wert x_1 etwas näher an der Nullstelle $\bar{x}$ liegt als der Startwert x_0. Ich muss also die Gleichung der Tangente bestimmen und anschließend diese Tangente gleich Null setzen, damit ich ihren Schnittpunkt x_1 mit der x-Achse finde.

Nun hat aber die Tangente die Steigung $f'(x_0)$, denn die Ableitung ist gerade als Steigung der Tangente definiert worden. Außerdem hat sie bei x_0 den Funktionswert $f(x_0)$, da jede Tangente an dem ihr zukommenden Punkt die Kurve der Funktion berühren muss. Weiterhin ist die Tangente eine Gerade und hat deshalb die Gleichung

$$y = ax + b,$$

wobei wir $a = f'(x_0)$ bereits kennen. Für $x = x_0$ ist aber $y = f(x_0)$ und somit

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b,$$

also

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Die Gleichung der Tangente lautet daher

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Sie sollten das Ziel nicht aus den Augen verlieren. Wir hatten die Hoffnung, dass der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse eine bessere Näherung an $\bar{x}$ ist als der Startwert x_0. Ich berechne also die Nullstelle x_1 der Tangente durch

$$f'(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

wie Sie unschwer feststellen können, indem Sie die erste Gleichung nach x_1 auflösen.

Wir sind also von einem Startwert x_0 ausgegangen und haben einen neuen Wert

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

erhalten. Vermutlich wird auch x_1 noch nicht die Nullstelle $\bar{x}$ sein, aber wir können ja die Näherung noch ein bisschen verbessern, indem wir das gleiche Spiel noch einmal mit x_1 treiben. Damit erhalten wir einen neuen Wert

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

der mit etwas Glück näher an der Nullstelle $\bar{x}$ liegt als x_1.

Sie sehen schon, worauf das hinausläuft. In aller Regel wird man die Nullstelle niemals ganz erreichen, aber sich ihr Schritt für Schritt immer besser annähern, indem man jeden neu gewonnenen Näherungswert wieder der gleichen Prozedur unterwirft. Man konstruiert damit eine Folge (x_n), die oft, wenn auch nicht immer, gegen eine Nullstelle von f konvergiert.

7.4.2 Definition Es sei f eine differenzierbare Funktion und x_0 ein beliebiger Startwert. Man definiere eine Folge von Näherungen (x_n) durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ falls } f'(x_n) \neq 0.$$

Diese Formel wird als Newtonsches Iterationsverfahren oder auch als Newton-Verfahren bezeichnet.

Das Newton-Verfahren besteht also nur darin, sich irgendeinen Startwert zu wählen und dann andauernd das gleiche zu tun: man schnappe sich den neu errechneten Wert x_n und stecke ihn wieder als Input in die Formel aus 7.4.2. Das Ergebnis heißt dann x_{n+1} und erleidet natürlich das gleiche Schicksal wie vorher x_n, es wird von der Newton-Formel zu einem neuen Wert x_{n+2} verarbeitet und so weiter und so weiter. Man erhält auf diese Weise eine Folge von Näherungen und gibt sich der Hoffnung hin, dass diese Folge gegen eine Nullstelle von f konvergiert. Das passiert auch sehr häufig, und einen dieser gutartigen Fälle sehen wir uns jetzt genauer an.

7.4.3 Beispiel Haben Sie sich schon einmal gefragt, wie Ihr Taschenrechner Quadratwurzeln ausrechnet? Es ist kaum zu erwarten, dass in der Maschine alle möglichen Wurzeln gespeichert sind, die Wurzel muss auf irgendeine Weise berechnet werden. Da wir nun das Newton-Verfahren zur Verfügung haben, ermitteln wir $\sqrt{a}$ einfach, indem wir die

Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - a$ bestimmen. Wegen $f'(x) = 2x$ heißt die Newton-Formel in diesem Fall

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

Man kann das durch Umformen noch ein wenig übersichtlicher schreiben:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Um konkreter zu werden, berechne ich einige Näherungen für $\sqrt{2}$. Die Iterationsformel lautet dann

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Als Startwert wähle ich $x_0 = 2$. Dann ist

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 1{,}5.$$

Mit dem Wert $x_1 = 1{,}5$ gehe ich wieder in die Formel, um eine bessere Näherung x_2 auszurechnen, und finde

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) = 1{,}4166...$$

Auf die gleiche Weise erhält man

$$x_3 = 1{,}4142156$$

und

$$x_4 = 1{,}4142135.$$

Wenn Sie Ihren Taschenrechner bemühen, dann werden Sie feststellen, dass wir schon nach vier Schritten mit x_4 einen Näherungswert erreicht haben, der auf sieben Stellen nach dem Komma genau ist.

Sie sollten einmal das Newton-Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{2}$ selbst durchführen, indem Sie irgendeinen beliebigen Startwert x_0 wählen; die Wahl von $x_0 = 2$ war völlig willkürlich und hat allenfalls Einfluss auf die Zahl der durchzuführenden Schritte, nicht aber auf das Ergebnis. Falls Sie allerdings mit einem negativen Startwert anfangen, ist zu erwarten, dass Sie zum Schluss bei $-\sqrt{2}$ landen.

Bei *einem* Durchlauf des Newton-Verfahrens wird man natürlich auch nur *eine* Nullstelle finden. Wie sieht es nun bei Funktionen aus, die mehr als eine Nullstelle haben? Am Verfahren kann ich sicher nichts ändern, die Formel steht unverrückbar fest. Was ich aber beliebig verändern kann, ist der Startwert x_0, und tatsächlich kann man mit etwas Glück die Startwerte so geschickt wählen, dass man der Reihe nach alle Nullstellen erwischt – vorausgesetzt man ist bereit, ein wenig Kurvendiskussion zu betreiben. Im folgenden Beispiel werden Sie sehen, wie Sie mit Hilfe der Kurvendiskussion die richtigen Startwerte herausfinden können.

7.4.4 Beispiel Es sei $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$. Gesucht sind alle Nullstellen von f. Am Anfang sollte man immer das Einfachste versuchen und testen, ob f ganzzahlige Nullstellen besitzt. Vor langer Zeit habe ich Ihnen in 5.2.7 erzählt, wie man das macht: eine ganzzahlige Nullstelle von f muss Teiler des absoluten Gliedes 1 sein, und somit kommen nur 1 und -1 in Frage. Leider ist aber $f(1) = -1$ und $f(-1) = -9$, also sind unsere ganzzahligen Kandidaten ausgeschieden.

Bei der Auswahl passender Startwerte ist es hilfreich, über den Kurvenverlauf Bescheid zu wissen. Ich berechne deshalb die Extremwerte von f und muss dafür erst einmal die Ableitungen bereitstellen. Es gilt

$$f'(x) = 12x^2 - 12x \text{ und } f''(x) = 24x - 12.$$

Folglich ist

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Die erste Ableitung hat somit die beiden Nullstellen 0 und 1. Noch wissen wir nicht, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, und deswegen setze ich beide Werte in die zweite Ableitung ein:

$$f''(0) = -12 < 0 \text{ und } f''(1) = 12 > 0.$$

Das klärt die Lage. In 0 hat die Funktion f ein lokales Maximum und in 1 ein lokales Minimum. Die entsprechenden Funktionswerte lauten

$$f(0) = 1 \text{ und } f(1) = -1.$$

Mit diesen Informationen ist es schon möglich, den ungefähren Verlauf der Kurve zu skizzieren. Da die Funktion ein Maximum bei 0 mit dem positiven Funktionswert 1 hat, wird sie links von 0 ansteigen, und es bleibt ihr kaum etwas anderes übrig, als auf dem Weg zu 0 einmal die x-Achse zu durchstoßen. Somit gibt es eine Nullstelle $\bar{x}_1 < 0$. Das ist noch lange nicht alles, denn der Funktionswert bei 1 ist negativ, während er bei 0 positiv

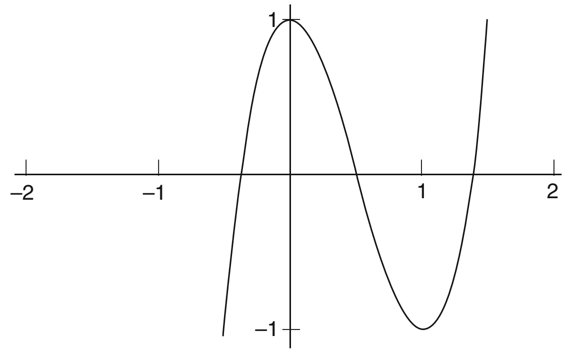


Abb. 7.12 Schaubild von $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$

ist, so dass die Kurve auch zwischen 0 und 1 einmal auf die x-Achse treffen muss. Daher existiert eine weitere Nullstelle $\bar{x}_2$ zwischen 0 und 1. Um die Sache auf die Spitze zu treiben, erinnern wir uns an den Umstand, dass in 1 ein lokales Minimum vorliegt, die Funktion also rechts von 1 steigen wird. Es ist also zu erwarten, dass die Kurve rechts von 1 noch einmal mit der x-Achse kollidiert, zumal $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ gilt. Folglich hat f noch eine dritte Nullstelle $\bar{x}_3 > 1$. Nun ist aber f ein Polynom dritten Grades und kann gar nicht mehr als drei Nullstellen haben, weshalb wir bereits die Lage sämtlicher Nullstellen festgestellt haben.

Mehr kann die Kurvendiskussion nicht liefern; für die genauen Werte der Nullstellen muss das Newton-Verfahren herhalten. Da wir nun aber die Lage der Nullstellen kennen, können wir an der Funktionskurve ablesen, welche Startwerte für die einzelnen Nullstellen günstig sein dürften: für $\bar{x}_1$ sollte man irgendeinen negativen Startwert wählen, für $\bar{x}_2$ einen Startwert zwischen 0 und 1, und für $\bar{x}_3$ schließlich einen Startwert, der größer als 1 ist.

In jedem Fall lautet die Formel für das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{4x_n^3 - 6x_n^2 + 1}{12x_n^2 - 12x_n}.$$

Ich starte das Verfahren zunächst einmal mit $x_0 = -1$. Die folgende Tabelle zeigt Ihnen, welche Näherungswerte erreicht werden.

n	x_n
0	−1
1	−0,625
2	−0,43462
3	−0,37290
4	−0,36611
5	−0,366025
6	−0,366025

Ab $n = 5$ ändert sich offenbar nichts Nennenswertes mehr an den Näherungswerten, und wir haben die erste Nullstelle $\bar{x}_1 \approx -0{,}366025$ erreicht. Ganz ähnlich sieht es mit der letzten Nullstelle aus. Hier wähle ich den Startwert $x_0 = 2$. Die nächste Tabelle zeigt dann den Ablauf des Newton-Verfahrens.

n	x_n
0	2
1	1,625
2	1,43462
3	1,37290
4	1,36611
5	1,366025
6	1,366025

Auch hier ist die fünfte Näherung bereits genau genug, und wir erhalten $\bar{x}_3 \approx 1{,}366025$. Zu berechnen bleibt die zweite Nullstelle. Dazu nehme ich mir den Startwert $x_0 = 0{,}3$, und das Newton-Verfahren liefert die folgende Tabelle

n	x_n
0	0,3
1	0,52397
2	0,49956
3	0,5
4	0,5

Hier ist schon die dritte Näherung genau genug und liefert einen Wert von 0,5 für $\bar{x}_2$. Das sieht etwas verdächtig aus, denn der Näherungswert ist ungewöhnlich glatt, und wenn Sie einmal 0,5 in die Funktion einsetzen, werden Sie merken, dass wir hier nicht nur einen Näherungswert, sondern eine exakte Nullstelle gefunden haben. Sie können ja zur Übung einmal den Linearfaktor $x - 0{,}5$ mit dem Horner-Schema abdividieren und dann die Nullstellen des resultierenden quadratischen Polynoms mit der üblichen Formel berechnen. Auch daran werden Sie sehen, wie genau das Newton-Verfahren arbeitet.

Sie sollten jetzt nicht dem bedingungslosen Optimismus verfallen. Nicht immer funktioniert die Nullstellensuche mit dem Newton-Verfahren so reibungslos wie im Beispiel 7.4.4. Was machen Sie zum Beispiel mit einem kubischen Polynom, das nur eine reelle und dazu zwei komplexe Nullstellen hat? Sicher wird Ihnen das Newton-Verfahren irgendwann die reelle Nullstelle liefern, aber keine Kurvendiskussion der Welt verschafft Ihnen einen günstigen reellen Startwert zur Bestimmung der komplexen Nullstellen. Allerdings können Sie es mit einem komplexen Startwert versuchen, wobei ziemlich unklar ist, welchen man nehmen soll.

Es kommt sogar noch schlimmer. Sie können nicht einmal bei jedem Startwert garantieren, dass das Newton-Verfahren gegen eine Nullstelle konvergiert. Im nächsten Beispiel zeige ich Ihnen eine Funktion, bei der das Verfahren mit etwas Pech meilenweit von allen Nullstellen entfernt bleibt.

7.4.5 Beispiel Es sei $f(x) = \frac{x^3}{5} - x$. Dann hat f die Nullstellen 0, $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$. Zur Anwendung des Newton-Verfahrens muss ich die erste Ableitung von f kennen, und sie lautet $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - 1$. Die Formel für das Verfahren lautet also

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{x_n^3}{5} - x_n}{\frac{3}{5}x_n^2 - 1} = x_n - \frac{x_n^3 - 5x_n}{3x_n^2 - 5},$$

wobei man die letzte Gleichung durch Erweitern des Bruches mit 5 erhält. Ob das Newton-Verfahren nun konvergiert oder nicht, hängt stark davon ab, welchen Startwert Sie wählen. Sicher ist der Startwert $x_0 = 1$ keine exotische Wahl, und wir rechnen einmal aus, was mit ihm passiert. Es gilt

$$x_1 = 1 - \frac{1-5}{3-5} = 1 - \frac{-4}{-2} = -1$$

und

$$x_2 = -1 - \frac{-1+5}{3-5} = -1 - \frac{4}{-2} = 1.$$

Wir haben leider keine großen Fortschritte gemacht. Aus $x_0 = 1$ folgt $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$. Da das Newton-Verfahren alle Näherungswerte der gleichen Formel unterwirft, wird demnach

$$x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = -1, \ldots$$

herauskommen, die Folge (x_n) des Newton-Verfahrens springt also ständig zwischen 1 und -1 hin und her und kümmert sich nicht im Mindesten um die Nullstellen 0, $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$.

Mit anderen Worten: es ist alles andere als klar, dass das Newton-Verfahren tatsächlich eine Nullstelle der untersuchten Funktion liefert. Sie können sich aber mit zwei Punkten trösten. Erstens sind die meisten Startwerte gutwillig und liefern eine Folge (x_n), die gegen eine Nullstelle konvergiert und auch recht schnell brauchbare Näherungen hervorbringt. Zweitens kann man sich die Faustregel merken: wenn die Folge der Näherungen überhaupt konvergiert, dann auch gegen eine Nullstelle. Man sollte nur nicht vergessen, dass sie manchmal einfach gar nicht konvergiert.

Da es meistens gut geht, pflegt man sich im praktischen Leben nicht so sehr um die Frage zu kümmern, ob ein Startwert sinnvoll ist oder nicht: man setzt in die Formel aus 7.4.2

ein und rechnet auf gut Glück. Üblicherweise rechtfertigen die Ergebnisse diese etwas burschikose Vorgehensweise. Wenn man genau sein will, kann man auch bestimmte hinreichende Bedingungen heranziehen, die das gewünschte Verhalten des Newton-Verfahrens garantieren, aber sie sind ein wenig unangenehm und unhandlich, und deswegen verzichte ich darauf, sie hier zu besprechen.

Wenden wir uns lieber der berühmten Regel von l'Hospital zu. Bei Guillaume de l'Hospital handelt es sich um einen französischen Marquis des späten siebzehnten Jahrhunderts, der zwar seine Verdienste hat, aber sicher nicht die nach ihm benannte Regel entwickelte. Er war an Mathematik stark interessiert und engagierte den glänzenden Schweizer Mathematiker Johann Bernoulli, um sich über die neuesten Entwicklungen der Mathematik unterrichten zu lassen. Das traf sich gut, denn Johann Bernoulli war der jüngere Bruder von Jakob Bernoulli, und es geht das Gerücht, jener Jakob Bernoulli sei zunächst der einzige gewesen, der die schwer verständlichen Arbeiten von Leibniz zur Differentialrechnung begreifen konnte. Deshalb war Johann gut informiert über den neuesten Stand der Dinge und konnte eine Menge an l'Hospital weitergeben. Die berühmte Regel dürfte in der einen oder anderen Form wohl auch eher von Bernoulli als von l'Hospital stammen, aber der Marquis veröffentlichte als erster ein verständliches Buch über Differentialrechnung, das auch ein einigermaßen normaler Mensch verstehen konnte, und so wurden ihm Ergebnisse zugeschrieben, die von Bernoulli oder von Leibniz stammten. Man muss allerdings dazu sagen, dass er im Vorwort seines Buches klar und deutlich machte, wem er seine Erkenntnisse zu verdanken hatte, nämlich der Familie Bernoulli und Leibniz, aber wer liest schon Vorworte. Vielleicht war deshalb Bernoulli etwas ungehalten über den Erfolg des Buches von l'Hospital und beklagte sich darüber, dass er es ihm mehr oder weniger direkt in die Feder diktiert hätte.

Wie dem auch sei, die Regel von l'Hospital befasst sich mit der Berechnung bestimmter Grenzwerte, und ich werde sie Ihnen jetzt einfach einmal vorstellen.

7.4.6 Satz Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Weiterhin gelte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ und } \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Falls dann der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ich gebe zu, auf den ersten Blick sieht das nicht sehr beeindruckend aus. Was sollte man davon haben, einen seltsamen Grenzwert durch einen anderen zu ersetzen? Tatsächlich liegt der Nutzen des Satzes darin, dass der zweite Grenzwert unter Umständen etwas weniger seltsam ist als der erste und deshalb leichter berechnet werden kann. Ich möchte mich hier nicht mit einem Beweis aufhalten, sondern einige Beispiele rechnen, die den Sinn der Regel verdeutlichen.

7.4.7 Beispiele

(i) Gesucht ist

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Sowohl Zähler als auch Nenner werden zu Null, wenn man $x = 1$ einsetzt. Deshalb ist die Voraussetzung zur Anwendung der l'Hospitalschen Regel erfüllt, und es gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 2}{2x - 3} = \frac{0}{-1} = 0.$$

So einfach geht das mit ein wenig Differentialrechnung. Sie brauchen nur separat Zähler und Nenner abzuleiten und zu testen, was mit dem neuen Bruch passiert, wenn $x \to 1$ geht. In diesem Fall wird der Zähler zu 0 und der Nenner zu -1, also der Bruch insgesamt zu 0. Sicher hätte man diesen Grenzwert mit den Methoden aus dem vierten Kapitel auch zu Fuß ausrechnen können, indem man den gemeinsamen Linearfaktor $x - 1$ herauskürzt, aber nicht immer sind die auftretenden Funktionen Polynome, bei denen man so einfach Linearfaktoren kürzen kann.

(ii) Gesucht ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 2x}.$$

Wegen $\tan 0 = 0$ ist auch hier die Voraussetzung zur Anwendung der Regel erfüllt, und wir können zu den Ableitungen von Zähler und Nenner übergehen. Es folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\tan 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2},$$

denn $\cos 0 = 1$. Hier habe ich nur benutzt, dass $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ gilt und zusätzlich die Kettenregel auf die Ableitung von $\tan 2x$ angewendet. Versuchen Sie sich einmal daran, diesen Grenzwert elementar, ohne die Regel von l'Hospital auszurechnen. Unter uns gesagt: auf Anhieb wüsste ich nicht, wie ich es anfangen soll.

(iii) Gesucht ist

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x.$$

Die Regel von l'Hospital bezieht sich auf Quotienten, und hier liegt offenbar kein Quotient vor. Man kann aber jedes Produkt in einen Quotienten verwandeln, indem man durch den Kehrwert eines der beiden Faktoren teilt. In diesem Fall ist

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Das sieht schon besser aus, denn für $x \to 0$ tendiert $\ln x$ gegen $-\infty$ und $\frac{1}{x}$ gegen ∞. Folglich ist die zweite Voraussetzung der l'Hospitalschen Regel erfüllt, und wieder gehe ich zu den Ableitungen über. Es folgt dann

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} -x = 0.$$

Folglich ist

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = 0.$$

(iv) Gesucht ist

$$\lim_{x \to 0} x^x.$$

Auf den ersten Blick hat das nun gar nichts mit der Regel von l'Hospital zu tun, denn es ist weit und breit kein Quotient zu sehen. Es gilt aber

$$\ln x^x = x \cdot \ln x,$$

und in Nummer (iii) haben wir gerade ausgerechnet, dass

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = 0$$

gilt. Deshalb ist

$$\lim_{x \to 0} x^x = e^{\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x} = e^0 = 1.$$

Damit beende ich das Kapitel über Differentialrechnung. Im nächsten Kapitel werden Sie sehen, wie sehr die *Integralrechnung* mit dem verzahnt ist, was Sie bisher über das Differenzieren gelernt haben.

http://www.springer.com/978-3-662-54806-6

Mathematik für Ingenieure
Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium
Rießinger, Th.
2017, XIX, 743 S. 161 Abb. Mit Online-Extras., Softcover
ISBN: 978-3-662-54806-6