Hüllen und Kombinationen

2

Die zulässigen Bereiche in der Linearen Optimierung sind Lösungen von linearen Ungleichungssystemen. Deswegen müssen wir die Werkzeuge der linearen Algebra um Elemente erweitern, die Vorzeichen stärker berücksichtigen. Obwohl man diese Theorie über beliebigen geordneten Körpern entwickeln könnte, beschränken wir uns auf Körper $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$.

Zunächst einmal wiederholen wir aber Inhalte der linearen Algebra, wenn auch vielleicht unter etwas anderen Namen als Sie sie kennen gelernt haben.

2.1 Affine Unterräume des $\mathbb{K}^n$

Affine Unterräume des $\mathbb{K}^n$ sind genau die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme. Wir werden gleich zeigen, dass affine Unterräume abgeschlossen unter affinen Kombinationen sind.

► **Definition 2.1** Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}^n$. Eine Linearkombination

$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

dieser Elemente mit $\lambda_i \in \mathbb{K}$ heißt *affine Kombination von* $a_1, \ldots, a_k$, wenn darüber hinaus gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Eine affine Kombination heißt *echt*, wenn es $\lambda_i \neq 0 \neq \lambda_j$ mit $a_i \neq a_j$ gibt.

W. Hochstättler, *Lineare Optimierung*,
DOI 10.1007/978-3-662-54425-9_2

Wir sagen, $a_1, \dots, a_k$ sind *affin unabhängig*, wenn aus $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ notwendig folgt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ gilt. Andernfalls heißen die Vektoren *affin abhängig*.

Proposition 2.2
Sei $M \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:

i) M ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$.
ii) M ist abgeschlossen unter affinen Kombinationen.
iii) $M = \emptyset$ oder $\Delta M := \{y - z \mid y, z \in M\} \subset \mathbb{K}^n$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{K}^n$ und für alle $x \in M$ gilt

$$M = x + \Delta M := \{x + u \mid u \in \Delta M\}.$$

iv) $M = \emptyset$ oder es gibt ein $x \in M$ sowie einen Untervektorraum U des $\mathbb{K}^n$ mit

$$M = x + U.$$

Beweis

„*i) ⇒ ii)*" Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$ mit $M = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ und $a_1 \dots, a_k \in M$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Dann ist

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A a_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b = b,$$

da $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Also ist M unter affinen Kombinationen abgeschlossen.

„*ii) ⇒ iii)*" Ist M leer, so ist nichts zu zeigen. Wir verifizieren zunächst das Unterraumkriterium aus der linearen Algebra, falls $M \neq \emptyset$. Seien $u, v \in \Delta M$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Seien ferner $y_u, y_v, z_u, z_v \in M$ mit $u = y_u - z_u$ und $v = y_v - z_v$. Dann gilt nach ii)

$$(1 - \mu) y_u + \mu y_v \in M \quad \text{und auch} \quad \lambda z_u + \mu z_v + (1 - \lambda - \mu) y_u \in M.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda y_u + \mu y_v - (\lambda z_u + \mu z_v) \\ &= (1 - \mu) y_u + \mu y_v - (\lambda z_u + \mu z_v + (1 - \lambda - \mu) y_u) \in \Delta M. \end{aligned}$$

Also erfüllt ΔM das Unterraumkriterium. Da ferner für $x \in M$

$$M = x + \{m - x \mid m \in M\} \subseteq x + \Delta M,$$

bleibt nur noch die andere Inklusion $x + \Delta M \subseteq M$ Seien also $m \in \Delta M$ und $y_m, z_m \in M$ mit

$$m = y_m - z_m.$$

Dann ist $x+y_m-z_m$ eine affine Kombination in x, y_m und z_m also, nach ii) in M.

„*iii*) $\Rightarrow$ *iv*)“ Dies ist mit $U := \Delta M$ offensichtlich.

„*iv*) $\Rightarrow$ *i*)“ Wir wählen eine Orthogonalbasis von U und ergänzen diese durch $a_1, \ldots, a_k$ zu einer Orthogonalbasis von $\mathbb{K}^n$. Sei $A \in \mathbb{K}^{k\times n}$ die Matrix, deren Zeilen $a_1, \ldots, a_k$ sind. Dann ist $U = \ker(A)$. Sei nun $x \in M$ und $b = Ax$. Dann ist $M = x + U$ nach linearer Algebra die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$, also ein affiner Unterraum des $\mathbb{K}^n$.

□

Für einen affinen Unterraum $M \subset \mathbb{K}^n$ nennen wir

$$\dim M := \begin{cases} \dim \ \Delta M, & \text{falls } M \neq \emptyset, \\ -1, & \text{falls } M = \emptyset, \end{cases}$$

die *Dimension* von M.

Ist $S \subseteq \mathbb{K}^n$, so nennen wir die Menge aller affinen Kombinationen mit Elementen in S die *affine Hülle* Aff(S) *von S*. Die Menge aller Linearkombinationen von Elementen in S nennen wir die *lineare Hülle* Lin(S) *von S*.

Proposition 2.3
Sei $M \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{K}^n$ der Dimension k. Dann gibt es $k+1$ affin unabhängige Vektoren in M und je $k+2$ Vektoren in M sind affin abhängig.

Beweis Ist M leer, so ist die Aussage offensichtlich richtig. Andernfalls sei $x \in M$ und seien $b_1, \ldots, b_k$ eine Basis von ΔM. Wir werden zeigen, dass dann gilt, dass $x, x + b_1, \ldots, x + b_k$ affin unabhängig sind. Sei also

$$\lambda_0 x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x + b_i) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0.$$

Dann ist $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$ und somit

$$\begin{aligned} \lambda_0 x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x + b_i) &= -\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x + b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i. \end{aligned}$$

Da die b_i linear unabhängig sind, folgt hieraus notwendig $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ und somit wegen $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$ auch $\lambda_0 = 0$.

Für die zweite Aussage betrachten wir $a_1, \ldots, a_{k+2} \in M$. Da die Vektoren in einem k-dimensionalen affinen Raum liegen, gilt dies auch für $\binom{0}{a_1}, \ldots, \binom{0}{a_{k+2}} \in \mathbb{K}^{n+1}$ und ebenso für $\binom{1}{a_1}, \ldots, \binom{1}{a_{k+2}} \in \mathbb{K}^{n+1}$. Also spannen letztere einen höchstens

$(k+1)$-dimensionalen linearen Unterraum auf, sind also linear abhängig. Folglich gibt es eine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{k+2} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die offensichtlich beweist, dass $a_1, \ldots, a_{k+2}$ affin abhängig sind. □

Aufgabe 2.4

Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie:

i) *Aff* ist ein Hüllenoperator, d. h. *Aff* erfüllt die Axiome
   - H1 $\forall S \subseteq \mathbb{K}^n : S \subseteq \mathrm{Aff}(S)$. (Extensivität)
   - H2 $\forall S, T \subseteq \mathbb{K}^n : (S \subseteq T \Rightarrow \mathrm{Aff}(S) \subseteq \mathrm{Aff}(T))$. (Monotonie)
   - H3 $\forall S \subseteq \mathbb{K}^n : \mathrm{Aff}(\mathrm{Aff}(S)) = \mathrm{Aff}(S)$. (Idempotenz)

ii) $\mathit{Aff}(S)$ ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

iii) $\mathit{Aff}(S) = \bigcap\limits_{\substack{S \subseteq A \\ A \text{ ist affiner U.raum}}} A$

Lösung siehe Lösung 9.7.

2.2 Konvexe Kegel im $\mathbb{K}^n$

▶ **Definition 2.5** Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}^n$. Eine Linearkombination

$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

dieser Elemente mit $\lambda_i \in \mathbb{K}_+$ heißt *konische Kombination von* $a_1, \ldots, a_k$. Eine konische Kombination heißt *echt*, wenn es $\lambda_i \neq 0 \neq \lambda_j$ mit a_i und a_j linear unabhängig gibt oder der einzige Nicht-Nulleintrag $\lambda_i \neq 1$ ist.

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt *konvexer Kegel*, wenn sie abgeschlossen unter Bildung konischer Kombinationen ist.

Ist $S \subset \mathbb{K}^n$, so bezeichnen wir die Menge aller konischen Kombinationen von Elementen in S als *konische Hülle Cone*(S) *von* S.

$a_1, \ldots a_\ell$ heißen *konisch unabhängig*, wenn es keine nicht-triviale Linearkombination der Null

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i a_i = 0$$

gibt, bei der genau ein Koeffizient μ_{i_0} negativ ist. Ansonsten heißen die Vektoren *konisch abhängig*.

Proposition 2.6
$\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}_+ \forall x, y \in C : \lambda x + \mu y \in C.$$

Beweis Da ein konvexer Kegel per definitionem unter konischen Kombinationen abgeschlossen ist, ist die Notwendigkeit der Bedingung trivial. Dass sie auch hinreichend ist, zeigen wir mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der Summanden in einer konischen Kombination. Ist die Anzahl der Summanden Null, so erhalten wir den Nullvektor. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in C$. Wegen $0 = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ ist der Nullvektor in C enthalten. Sei also nun eine konische Kombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ mit $k > 0$ Summanden gegeben. Nach Induktionsvorausssetzung ist $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i \in C$, also ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i \right) + \lambda_k x_k \in C.$$

□

Ist C ein konvexer Kegel, so setzen wir $\dim(C) = \dim(\mathrm{Lin}(C))$ gleich der Dimension des von C erzeugten Vektorraumes $\mathrm{Lin}(C)$.

Der folgende Satz besagt, dass man, um ein bestimmtes Element in der konischen Hülle einer Menge S konisch zu kombinieren, höchstens $\dim(\mathrm{Cone}(S))$ Elemente braucht.

Proposition 2.7
Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ und $x \in \mathrm{Cone}(S)$. Dann gibt es $k \leq \dim(\mathrm{Cone}(S))$ und $a_1, \ldots, a_k \in S$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}_+$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i.$$

Beweis Indem wir eventuell einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Lin}(S)$ und $\mathbb{K}^{\dim(\mathrm{Cone}(S))}$ anwenden, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $\mathrm{Cone}(S)$ volldimensional ist.

Seien nun die a_i und die λ_i so gewählt, dass k minimal ist. Wir werden zeigen, dass dann $k \leq n$ ist. Ist $k \leq 1$, so ist nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, das $k \geq 2$ ist. Dann gilt offensichtlich $0 < \lambda_i < \infty$ für $i = 1, \ldots, k$. Angenommen $k > n$, so sind $a_1, \ldots, a_k$ linear abhängig. Sei nun

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i = 0$$

eine nicht-triviale Linearkombination der Null. Wir können, eventuell nach Multiplikation mit -1 annehmen, dass mindestens ein $\mu_i > 0$ ist. Sei nun

$$i_0 \in \operatorname{argmax}_{i=1}^{k} \left\{ \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right\},$$

wobei argmax die Indizes bezeichnet, an denen das Maximum angenommen wird.

Dann ist $\mu_{i_0} > 0$ und

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \right) a_i.$$

$$\forall i = 1, \dots, k{:}\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} = \lambda_i \Big(1 - \underbrace{\frac{\mu_i}{\lambda_i} \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}}_{\leq 1} \Big) \geq 0.$$

Weil darüber hinaus $\lambda_{i_0} - \mu_{i_0} \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} = 0$ ist, haben wir x als konische Kombination mit weniger als k Nicht-Nullkoeffizienten dargestellt, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität von k. Also muss $k \leq n$ gelten. □

Was die Maximalzahl konisch unabhängiger Elemente angeht, liegen die Verhältnisse anders als bei der linearen Unabhängigkeit. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass es für $n \geq 3$ im $\mathbb{R}^n$ konisch unabhängige Mengen von überabzählbarer Kardinalität gibt. Für $\mathbb{K}^1, \mathbb{K}^2$ liegen die Verhältnisse allerdings anders.

Proposition 2.8

i) Es gibt zwei Vektoren im $\mathbb{K}^1$, die konisch unabhängig sind.
ii) Je drei Vektoren im $\mathbb{K}^1$ sind konisch abhängig.
iii) Es gibt vier Vektoren im $\mathbb{K}^2$, die konisch unabhängig sind.
iv) Je fünf Vektoren im $\mathbb{K}^2$ sind konisch abhängig.

Beweis

i) $1, -1 \in \mathbb{K}^n$ können nur beide mit positivem Vorzeichen oder beide mit negativem Vorzeichen zur Null linear kombiniert werden, sind also konisch unabhängig.
ii) Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{K}$. Ist ein $a_i = 0$, so leistet $-1 \cdot a_i$ das Gewünschte. Ansonsten gibt es $i \neq j$ mit $a_i a_j > 0$. Dann ist $\operatorname{sign}(a_i) = \operatorname{sign}(a_j)$ und

$$|a_i| a_j - |a_j| a_i = \underbrace{\operatorname{sign}(a_i) a_i}_{>0} a_j + \underbrace{(-1)\operatorname{sign}(a_j) a_j}_{<0} a_i = 0$$

beweist die konische Abhängigkeit der Vektoren.
iii) $e_1 = \binom{1}{0}, \binom{-1}{0}, e_2 = \binom{0}{1}, \binom{0}{-1}$ sind konisch unabhängig, da in jeder Linearkombination der Null die Koeffizienten von e_i und $-e_i$ gleiches Vorzeichen

haben müssen, die Gesamtanzahl der Koeffizienten mit gleichen Vorzeichen also immer gerade sein muss.

iv) Liegen zwei Elemente auf einem Halbstrahl, von der Null ausgehend, so folgt wie in Teil ii), dass diese zwei Elemente konisch abhängig sind. Wir können also davon ausgehen, dass wir die Elemente $a_1, \ldots, a_5$ so angeordnet haben, dass die Winkel der Polarkoordinaten der Vektoren $0 \leq \varphi_1 < \ldots < \varphi_5 < 2\pi$ sind. Da die konische Unabhängigkeit bzw. Abhängigkeit invariant unter Isomorphismen des $\mathbb{K}^2$, also insbesondere unter Drehungen der Ebene ist, können wir annehmen, dass $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_3 < \pi$ ist, denn die Summe zweier benachbarter Winkel muss irgendwo kleiner als π sein. In Polarkoordinaten ist $a_1 = \binom{r_1}{0}, a_2 = \binom{r_2}{\varphi_2}$ und $a_3 = \binom{r_3}{\varphi_3}$. Wir betrachten nun das Dreieck $a_1, 0, a_3$. Wegen $0 < \varphi_3 < \pi$ haben alle Punkte dieses Dreiecks eine nicht-negative y Koordinate. Insbesondere sind die y Koordinaten der Strecke $\overline{a_1 a_3}$ echt positiv, außer in a_1. Der Halbstrahl durch a_2 ausgehend von 0 startet wegen $0 < \varphi_2 < \varphi_3$ innerhalb des Dreiecks, muss also die Strecke $\overline{a_1 a_3}$ irgendwo schneiden. Folglich gibt ein $\lambda > 0$ und ein $t \in \,]0, 1[$ mit

$$\lambda a_2 = t a_1 + (1 - t) a_3.$$

Da alle beteiligten Punkte Koordinaten in $\mathbb{K}^2$ haben, ist auch $\lambda \in \mathbb{K}$, da wir λ als Lösung eines linearen Gleichungssystems über $\mathbb{K}$ erhalten. Somit beweist die Linearkombination

$$0 = -\lambda a_2 + t a_1 + (1 - t) a_3$$

die konische Abhängigkeit der Vektoren. □

2.3 Konvexe Mengen im $\mathbb{K}^n$

Wenn Sie in diesem Abschnitt den Eindruck erhalten, dass große Teile aus dem letzten Abschnitt wörtlich kopiert und nur leicht modifiziert worden sind, so liegen Sie völlig richtig. Wenn Sie darüber hinaus die Unterschiede sorgfältig beachten, so haben Sie von den Techniken der Homogenisierung und Dehomogenisierung, die in Kap. 4 eine wichtige Rolle spielen werden, schon Einiges verstanden.

▶ **Definition 2.9** Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}^n$. Eine Linearkombination

$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

dieser Elemente mit $\lambda_i \in \mathbb{K}_+$ und $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ heißt *Konvexkombination von* $a_1, \ldots, a_k$. Eine Konvexkombination heißt *echt*, wenn sie als affine Kombination echt ist.

Eine Teilmenge $C \subseteq \mathbb{K}^n$ heißt *konvex*, wenn sie abgeschlossen unter Bildung von Konvexkombinationen ist.

Ist $S \subset \mathbb{K}^n$, so bezeichnen wir die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen in S als *konvexe Hülle* $Conv(S)$ *von* S.

$a_1, \dots a_\ell$ heißen *konvex unabhängig*, wenn es keine nicht-triviale Linearkombination

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i a_i = 0$$

der Null mit

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i = 0$$

gibt, bei der genau ein Koeffizient μ_{i_0} negativ ist. Ansonsten heißen die Vektoren *konvex abhängig*.

Also sind konvex abhängige Vektoren sowohl konisch als auch affin abhängig.

Proposition 2.10
$C \subseteq \mathbb{K}^n$ ist genau dann konvex, wenn

$$\forall t \in [0,1] \cap \mathbb{K} \ \forall x, y \in C : tx + (1-t)y \in C,$$

also wenn die Menge mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

Beweis Da eine konvexe Menge per definitionem unter Konvexkombinationen abgeschlossen ist, ist wiederum die Notwendigkeit der Bedingung klar. Dass sie auch hinreichend ist zeigen wir mittels vollständiger Induktion über die Anzahl der Summanden in einer Konvexkombination. Ist C leer oder einelementig, so ist nichts zu zeigen. Sei also nun $|C| > 1$ und eine Konvexkombination $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ mit $k > 1$ Summanden gegeben. Wir können annehmen, dass alle Koeffizienten von Null verschieden sind, insbesondere, dass $0 < \lambda_k < 1$ für $1 \le i \le k$ ist. Nach Induktionsvorausssetzung ist $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-\lambda_k} \lambda_i x_i \in C$, denn für alle $i = 1, \dots, k-1$ gilt offensichtlich $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} > 0$ und

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-\lambda_k} \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_k} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_k}(1-\lambda_k) = 1.$$

Nach Voraussetzung des Satzes ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \underbrace{(1-\lambda_k)}_{t} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-\lambda_k} \lambda_i x_i + \underbrace{\lambda_k}_{1-t} x_k \in C.$$

□

Ist C eine konvexe Menge, so setzen wir $\dim(C) = \dim(\mathrm{Aff}(C))$ gleich der Dimension des von C erzeugten affinen Unterraumes von $\mathbb{K}^n$.

Die Übertragung von Proposition 2.7 heißt Satz von Carathéodory.

Satz 2.11 (Carathéodory 1911)
Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$ und $x \in \mathrm{Conv}(S)$. Dann gibt es ein $k \leq n+1$ und $a_1, \dots, a_k \in S$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}_+$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \text{ und } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

Beweis Seien die a_i und die λ_i in einer Konvexkombination von x so gewählt, dass k minimal ist. Wir werden zeigen, dass dann $k \leq n+1$ ist. Offensichtlich gilt zunächst einmal $\lambda_i > 0$ für $i = 1, \dots, k$. Angenommen $k > n+1$, so sind $a_1, \dots, a_k$ nach Proposition 2.3 affin abhängig. Sei nun

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i = 0$$

eine nicht-triviale Linearkombination der Null mit $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$. Sei nun

$$i_0 \in \mathrm{argmax}_{i=1}^{k} \left\{ \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right\},$$

Dann ist $0 < \mu_{i_0}$ und

$$x = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \right) a_i,$$

$$\forall i = 1, \dots, k{:}\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} = \lambda_i \Bigg(1 - \underbrace{\frac{\mu_i}{\lambda_i} \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}}}_{\leq 1} \Bigg) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\lambda_i - \mu_i \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

und $\lambda_{i_0} - \mu_{i_0} \frac{\lambda_{i_0}}{\mu_{i_0}} = 0$. Also haben wir x als Konvexkombination mit weniger als k Nicht-Nullkoeffizienten dargestellt, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität von k. Also muss $k \leq n+1$ gelten. □

Schon in der Ebene gibt es unendlich viele konvex unabhängige Elemente. Für $\mathbb{K}^1$ gilt:

Proposition 2.12

i) Es gibt zwei Vektoren im $\mathbb{K}^1$, die konvex unabhängig sind.
ii) Je drei Vektoren im $\mathbb{K}^1$ sind konvex abhängig.

Beweis Offensichtlich sind 1 und –1 konvex unabhängig. Seien nun $a \leq b \leq c$ drei Vektoren im $\mathbb{K}^1$. Gilt $a = c$, so zeigt

$$\frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c = 0,$$

dass die drei Elemente konvex abhängig sind. Ansonsten leistet dies

$$\frac{c-b}{c-a} \cdot a - b + \frac{b-a}{c-a} \cdot c = 0.$$

$\square$

Satz 2.13
Die Menge

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi[\right\}$$

ist eine überabzählbare Menge konvex unabhängiger Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Beweis Zunächst einmal zeigen wir, dass eine Menge von Vektoren im $\mathbb{K}^n$ genau dann konvex unabhängig ist, wenn sie keinen Vektor enthält, der Konvexkombination der übrigen ist.

Sei dazu zunächst einmal $a_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ eine Konvexkombination, dann ist $(-1) \cdot a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination der Null, die beweist, dass $a_0, a_1, \ldots, a_k$ und damit auch jede ihrer Obermengen konvex abhängig sind.

Sind umgekehrt $a_0, \ldots, a_k$ konvex abhängig, so können wir evtl. nach Umnummerierung und Reskalierung annehmen, dass

$$(-1) \cdot a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad -1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0.$$

Also ist a_0 Konvexkombination von $a_1, \ldots, a_k$.

Zum Beweis des Satzes genügt es also nun zu zeigen, dass kein Element in $x \in C$ eine Konvexkombination von Elementen in $C \setminus x$ ist. Nehmen wir an,

$$\begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \begin{pmatrix} \sin(\varphi_i) \\ \cos(\varphi_i) \end{pmatrix},$$

wäre eine Konvexkombination mit

$$0 \le \varphi_1 < \ldots < \varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1} < \ldots < \varphi_k < 2\pi\,.$$

Da die Drehung der Ebene um $-\varphi$ ein Isomorphismus des $\mathbb{R}^2$ ist, können wir sogar annehmen, dass

$$0 = \varphi < \varphi_1 < \ldots < \varphi_k < 2\pi\,.$$

Dann ist aber $\binom{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \binom{0}{1}$ und für alle $i = 1\ldots,k$: $\cos(\varphi_i) < 1$ im Widerspruch zu

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cos(\varphi_i) = \cos(\varphi) = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,\ \lambda_1, \ldots \lambda_i > 0. \qquad \square$$

Bemerkung 2.14
Im Falle eines beliebigen Körpers $\mathbb{K}$ zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ erhalten wir durch Schnittbildung eine Menge konvex unabhängiger Punkte höchstens der Kardinalität von $\mathbb{K}$.

Aufgabe 2.15

Sei $n \ge 3$. Zeigen Sie: Es gibt eine konisch unabhängige Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ mit überabzählbar vielen Elementen.

Lösung siehe Lösung 9.8.

Aufgabe 2.16

Seien $\{a_1, \ldots, a_k\}$ affin abhängig, aber gelte, dass für jedes i mit $1 \le i \le k$ die Menge $\{a_1, \ldots, a_k\} \setminus \{a_i\}$ affin unabhängig ist. Zeigen Sie: Es gibt eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Partition $\{1, \ldots, k\} = I \dot\cup J$, so dass

$$\operatorname{Conv}(\{a_i \mid i \in I\}) \cap \operatorname{Conv}\left(\{a_j \mid j \in J\}\right) \ne \emptyset.$$

Diese Partition bezeichnen wir auch als *Radon Partition* von $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

Lösung siehe Lösung 9.9.

2.4 Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel Einschränkungen von Linearkombinationen und deren Hüllenoperatoren kennen gelernt. Wir fassen dies hier noch einmal übersichtlich zusammen und skizzieren in Abb. 2.1 die geometrische Situation.

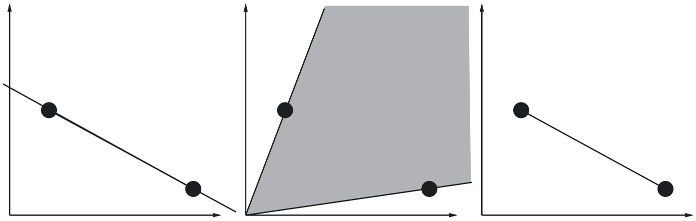

Abb. 2.1 Affine, konische und konvexe Hülle zweier Punkte in der Ebene

Seien $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}^k$. Dann heißt

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

Linearkombination von $x_1, \dots, x_k$. Gilt zusätzlich

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda \geq 0 & \\ & \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \\ \lambda \geq 0, & \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \end{array}\right\}, \text{ so heißt } x \left\{\begin{array}{l} \textit{konische} \\ \textit{affine} \\ \textit{Konvex-} \end{array}\right\} \textit{Kombination}.$$

Die Kombination heißt echt, wenn es $\lambda_i \neq 0 \neq \lambda_j$ mit $x_i \neq x_j$ gibt, oder der einzige Nichtnulleintrag von λ, etwa λ_i, von Eins verschieden ist und $x_i \neq 0$ ist. Für $S \subseteq \mathbb{K}^n$ sei

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Lin}(S) \\ \mathrm{Cone}(S) \\ \mathrm{Aff}(S) \\ \mathrm{Conv}(S) \end{array}\right\}, \text{ die Menge aller } \left\{\begin{array}{l} \textit{linearen} \\ \textit{konischen} \\ \textit{affinen} \\ \textit{konvexen} \end{array}\right\} \text{Kombinationen von}$$

$$\text{Elementen in } S. \text{ Wir sprechen von der } \left\{\begin{array}{l} \textit{linearen} \\ \textit{konischen} \\ \textit{affinen} \\ \textit{konvexen} \end{array}\right\} \textit{Hülle}.$$

Wir haben auch Unabhängigkeit und Abhängigkeit definiert. Die Gemeinsamkeit bei dieser Begriffsbildung liegt in folgender Aussage.

Proposition 2.17

$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}^n$ sind genau dann $\left\{\begin{array}{l} \textit{linear} \\ \textit{konisch} \\ \textit{affin} \\ \textit{konvex} \end{array}\right\}$ abhängig, wenn es einen Index $1 \leq i_0 \leq k$ gibt, so dass x_{i_0} $\left\{\begin{array}{l} \textit{lineare} \\ \textit{konische} \\ \textit{affine} \\ \textit{konvexe} \end{array}\right\}$ Kombination von $\{x_1, \ldots, x_k\} \setminus \{x_{i_0}\}$ ist.

Beweis Übung. □

Aufgabe 2.18

Beweisen Sie Proposition 2.17

Lösung siehe Lösung 9.10.

http://www.springer.com/978-3-662-54424-2

Lineare Optimierung
Hochstättler, W.
2017, XIV, 306 S. 75 Abb., 3 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-54424-2