2

Lineare Gleichungssysteme

Viele einfache Modelle basieren auf linearen Beziehungen zwischen verschiedenen Größen. Problemstellungen mit mehreren Variablen und linearen Beziehungen zwischen diesen Variablen führen auf lineare Gleichungssysteme. Auch kompliziertere Prozesse mit nichtlinearen Beziehungen zwischen den relevanten Parametern lassen sich innerhalb eines für die Praxis häufig ausreichenden Gültigkeitsbereichs durch lineare Beziehungen approximieren. Wir werden in diesem Kapitel lineare Gleichungssysteme zur Beschreibung von elektrischen Netzwerken im Gleichstromkreis und im Wechselstromkreis sowie elastischen Stabwerken kennenlernen und deren Struktur analysieren. Eine weitere wichtige Anwendung sind Systeme von Rohrleitungen, wie zum Beispiel zur Versorgung von Häusern oder Städten mit Wasser oder Gas; dies wird in den Aufgaben thematisiert. Große lineare Gleichungssysteme erhält man auch durch numerische Diskretisierungen von partiellen Differentialgleichungen; diese Gleichungssysteme haben viele Gemeinsamkeiten mit den hier vorgestellten Systemen.

2.1 Elektrische Netzwerke

Elektrische Netzwerke gehören zu den elementarsten Bausteinen der modernen Welt. Sie sind wesentlich für die öffentliche Stromversorgung, aber auch für die Wirkungsweise vieler, auch kleiner Geräte und Maschinen. Wir diskutieren zunächst den einfachsten Fall eines elektrischen Netzwerks im Gleichstromkreis, das im wesentlichen aus Spannungs- oder Stromquellen und aus ohmschen Widerständen besteht. Insbesondere betrachten wir vorläufig noch keine elektronischen Bauteile wie etwa Kondensatoren, Spulen, Dioden oder Transistoren. Als konkretes Beispiel soll das in Abbildung 2.1 gezeigte Netzwerk dienen.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017
C. Eck et al., *Mathematische Modellierung*,
Springer-Lehrbuch, DOI 10.1007/978-3-662-54335-1_2

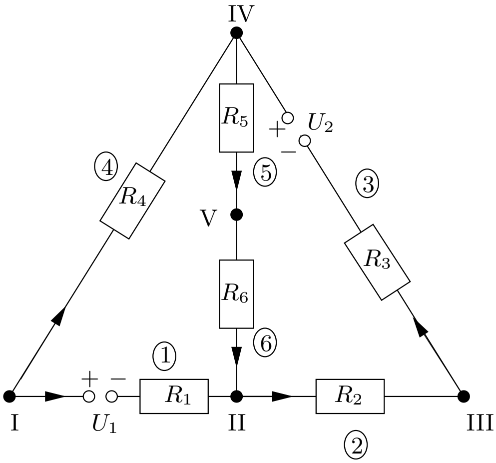

Abb. 2.1. Elektrisches Netzwerk

Das Netzwerk besteht im wesentlichen aus

- Kanten in Form von elektrischen Leitungen,
- Knoten, das sind Verbindungspunkte von zwei oder mehr Leitungen.

Zur Beschreibung des Netzwerks benötigen wir folgende Informationen über die Physik fließender Ströme:

Das *Kirchhoffsche Stromgesetz*, auch 1. Kirchhoffsches Gesetz genannt: Die Summe der Ströme in jedem Knoten ist Null. Dies beschreibt die *Erhaltung der elektrischen Ladung*, Elektronen können durch das Netzwerk wandern, aber nicht in Knoten „verschwinden" oder „erzeugt werden".

Das *Kirchhoffsche Spannungsgesetz*, auch 2. Kirchhoffsches Gesetz genannt: Die Summe der Spannungen über jede geschlossene Leiterschleife ist Null. Daraus folgt die Existenz von *Potentialen* an den Knotenpunkten; die an einem Leiterstück anliegende Spannung ist gegeben durch die Differenz der Potentiale an den Endpunkten.

Das *ohmsche Gesetz*: Der Spannungsabfall U am stromdurchflossenen Widerstand R mit Stromstärke I ist $U = RI$.

Die Stromstärke wird im in Europa üblichen Einheitensystem, dem sogenannten SI–System (Système International d' Unités) in *Ampère* (A) gemessen, die Spannung in *Volt* (V) und der ohmsche Widerstand in *Ohm* (Ω). Dabei ist $1\Omega = (1\text{V})/(1\text{A})$. Ein Ampère entspricht dem Fluss von einem *Coulomb* pro Sekunde, ein Coulomb entspricht $6{,}24150965 \cdot 10^{18}$ Elementarladungen. Wir werden in diesem Kapitel die Einheiten bis auf wenige Ausnahmen in den Aufgaben in der Notation weglassen.

Zur *Modellierung des Netzwerks* definieren wir:

- Eine Nummerierung der Knoten, in Abbildung 2.1 von I–V, sowie eine Nummerierung der Kanten, in Abbildung 2.1 von 1–6. Diese Nummerierungen können beliebig festgelegt werden. Sie beeinflussen natürlich die konkrete Darstellung des daraus konstruierten Modells und dessen Lösung, nicht aber die physikalische Interpretation dieser Lösung.
- Die Festlegung einer *positiven Richtung* für jede Kante. Dies ist in Abbildung 2.1 durch einen Pfeil dargestellt: $\longrightarrow$
  Die Festlegung der positiven Richtung sagt nichts über die tatsächliche Richtung des Stromes aus, die wir ja noch nicht kennen können.

Des weiteren führen wir *Variablen* ein, dies sind die Ströme und Spannungen entlang der Leiter und die Potentiale in den Knoten. Es gibt zwei verschiedene Typen von Variablen:

- *Knotenvariablen*, nämlich die Potentiale x_i, $i = 1, ..., m$, wobei m die Anzahl der Knoten ist, hier also $m = 5$. Diese werden in einem *Potentialvektor* $x = (x_1, ..., x_m)^\top$ der Dimension m zusammengefasst.
- *Kantenvariablen*, das sind zum Beispiel die *Ströme* y_j, $j = 1, ..., n$, wobei n die Anzahl der Kanten ist, hier also $n = 6$. Diese werden in einem *Stromvektor* $y = (y_1, ..., y_n)^\top$ der Dimension n zusammengefasst. Entsprechend kann man einen Vektor $e = (e_1, \ldots, e_n)^\top$ der Spannungen bilden. Die Spannungen lassen sich aus den Potentialen berechnen durch
  $$e_i = x_{u(i)} - x_{o(i)}\,, \quad i = 1, ..., n\,, \tag{2.1}$$
  wobei $u(i)$ der Index des „unteren“ Knotens und $o(i)$ der Index des „oberen“ Knotens ist. „Unten“ und „oben“ definiert sich aus der vorhin festgelegten Richtung des Stromleiters, zum Beispiel ist in Abbildung 2.1 I der untere und II der obere Knoten des Leiters 1.

Ein wesentlicher Schritt besteht nun darin, die Geometrie des Netzwerks und die bekannten physikalischen Gesetze in Beziehungen für die eingeführten Variablen umzusetzen. Dies geschieht mit Hilfe geeigneter *Matrizen.*

Die Beziehung (2.1) zwischen Potentialen und Spannungen lässt sich schreiben als
$$e = -Bx$$
wobei die Matrix $B = \{b_{ij}\}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m} \in \mathbb{R}^{n,m}$ definiert ist durch
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = o(i)\,, \\ -1 & \text{falls } j = u(i) \quad \text{und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Beispiel von Abbildung 2.1 ist

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Die Matrix B heißt *Inzidenzmatrix* des Netzwerks. Sie beschreibt ausschließlich die *Geometrie* des Netzwerks, konkret die Beziehungen zwischen *Knoten* und *Kanten*. Insbesondere „kennt" die Inzidenzmatrix die Anwendung als elektrisches Netzwerk nicht. Dieselbe Inzidenzmatriz wird man auch bei durchströmten Rohrleitungen mit derselben Geometrie bekommen. Die Inzidenzmatrix hat in jeder Zeile genau einmal den Eintrag 1 und genau einmal den Eintrag -1, alle anderen Einträge sind 0. Sie hängt natürlich von der Nummerierung der Knoten und Kanten und der festgelegten Richtung der Kanten ab.

Der Zusammenhang zwischen Spannungsvektor e und Stromvektor y wird durch das Ohmsche Gesetz hergestellt. Dabei muss man mögliche Spannungsquellen berücksichtigen. Abbildung 2.2 zeigt ein Leiterstück mit Widerstand und Spannungsquelle. Für die Potentiale x_u, x_z, x_o gilt mit der Spannung b_j der Spannnungsquelle

$$x_z = x_u - R_j y_j \quad \text{und} \quad x_o = x_z + b_j$$

und damit

$$e_j = x_u - x_o = R_j y_j - b_j \, .$$

Hier bezeichnet $R_j y_j$ den Spannungsabfall am stromdurchflossenen Widerstand und b_j die von der Spannungsquelle erzeugte zusätzliche Potentialdifferenz. In Vektorschreibweise erhält man

$$y = C(e + b) \, ,$$

dabei ist $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine *Diagonalmatrix*, deren Einträge die *Leitwerte* R_j^{-1} sind, und $b \in \mathbb{R}^n$ der Vektor der Spannungsquellen. Bei den Einträgen von b muss man das Vorzeichen beachten: Wir haben ein positives Vorzeichen, wenn die Polung von $-$ nach $+$ in positiver Richtung verläuft, wie in Abbildung 2.2, und ein negatives Vorzeichen, wenn die Polung von $-$ nach $+$ in positiver Richtung verläuft. In unserem Beispiel ist

$$C = \begin{pmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

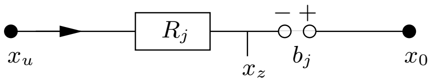

Abb. 2.2. Zur Berechnung des Stromes

Es fehlt noch das *Kirchhoffsche Stromgesetz*. Dieses hat in Vektorschreibweise die Form

$$Ay = 0\,,$$

wobei $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert ist durch

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls } i = o(j)\,, \\ -1 & \text{falls } i = u\,(j) \quad \text{und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In unserem Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich mit der Inzidenzmatrix B sieht man

$$A = B^\top.$$

Das ist *kein* Zufall, ein Vergleich der Definitionen der Einträge a_{ij} und b_{ij} zeigt, dass dies für *jedes Netzwerk* gilt.

Das Kirchhoffsche Spannungsgesetz wurde bereits in das Modell eingebaut, nämlich über die Existenz des Potentialvektors x. Wir haben also alle uns bekannten Informationen über das Netzwerk verarbeitet. Wenn man alles zusammenfasst, dann ist die Modellierung eines elektrischen Netzwerks aus m durchnummerierten Knoten und n durchnummerierten Leitungen mit vorgegebener Richtung gegeben durch

- einen Potentialvektor $x \in \mathbb{R}^m$,
- einem Spannungsvektor $e \in \mathbb{R}^n$, der berechnet werden kann durch

  $$e = -Bx$$

  mit der Inzidenzmatrix $B \in \mathbb{R}^{n,m}$,
- einem Stromvektor $y \in \mathbb{R}^n$, zu berechnen durch

  $$y = C(e + b)$$

  mit der Leitwertmatrix $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ der Spannungsquellen und

- dem Kirchhoffschen Stromgesetz
$$B^\top y = 0\,.$$

Dabei beschreibt die Inzidenzmatrix B die Geometrie des Netzwerks, die Leitwertmatrix C die Materialeigenschaften und der Vektor b die von außen gegebenen „Triebkräfte“.

Zur Berechnung der Ströme, Spannungen und Potentiale im Netzwerk wählt man eine zu bestimmende Variable, zum Beispiel x, und leitet durch Kombination aller Beziehungen eine Gleichung für x her. Man erhält

$$B^\top C(b - Bx) = 0$$

oder

$$B^\top CBx = B^\top Cb\,. \tag{2.2}$$

Die Matrix $M = B^\top CB$ ist symmetrisch, wenn C symmetrisch ist. Aus

$$\langle x, Mx\rangle = \langle Bx, CBx\rangle$$

mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sieht man, dass M

- positiv semidefinit ist, falls C positiv semidefinit ist,
- positiv definit ist, falls C positiv definit ist und B nur den trivialen Kern $\operatorname{Kern} B = \{0\}$ hat.

Für die meisten Netzwerke ist C in der Tat positiv definit. Die Inzidenzmatrix B hat jedoch einen nichttrivialen Kern. Man sieht leicht, dass $(1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ im Kern von B ist. Dies gilt für jede Inzidenzmatrix, da ja jede Inzidenzmatrix in jeder Zeile genau einen Eintrag $+1$ sowie einen Eintrag -1 hat und alle anderen Einträge 0 sind. Dies hat zur Folge, dass das lineare Gleichungssystem keine eindeutige Lösung hat. Physikalisch ist der Grund leicht einzusehen: Die Potentiale sind nur bis auf eine Konstante eindeutig, oder nur dann, wenn man einen „Nullpunkt“ für das Potential festlegt.

Da B einen nichttrivialen Kern hat, ist nicht von vornherein klar, dass das Gleichungssystem überhaupt lösbar ist. Es gilt jedoch:

Satz 2.1. *Es sei $C \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit und $B \in \mathbb{R}^{n,m}$. Dann gilt für $M = B^\top CB$:*

(i) $\operatorname{Kern} M = \operatorname{Kern} B$,

(ii) Das Gleichungssystem $Mx = B^\top b$ hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung.

Beweis. Zu (i): Offensichtlich gilt $\operatorname{Kern} B \subset \operatorname{Kern} M$. Für $x \in \operatorname{Kern} M$ gilt

$$0 = \langle x, B^\top CBx\rangle = \langle Bx, CBx\rangle\,.$$

Da C positiv definit ist, folgt $Bx = 0$, also $x \in \operatorname{Kern} B$.
Zu (ii): Die Gleichung ist lösbar, wenn $B^\top b \perp \operatorname{Kern}(M^\top)$ gilt. Für $x \in \operatorname{Kern}(M^\top) = \operatorname{Kern} M = \operatorname{Kern} B$ gilt

$$\langle B^\top b, x\rangle = \langle b, Bx\rangle = 0\,,$$

somit ist die Aussage bewiesen. □

In unserem Beispiel ist $\operatorname{Kern} B = \operatorname{span}\big\{(1,1,1,1,1,1)^\top\big\}$. Man kann deshalb ein Gleichungssystem mit positiv definiter Matrix durch Festsetzen eines der Potentiale herleiten. Setzt man $x_5 = 0$, dann muss man in der Inzidenzmatrix die 5. Spalte streichen, also

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

setzen, und statt $x \in \mathbb{R}^5$ den Vektor $x = (x_1, ..., x_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ benutzen. Für das Zahlenbeispiel $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1$, $U_1 = 2$, $U_2 = 4$ hat man $C = I \in \mathbb{R}^{6,6}$ und $b = (-2, 0, 4, 0, 0, 0)^\top$, also

$$B^\top CB = B^\top B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } B^\top Cb = B^\top b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus kann man die Spannungen und die Ströme ausrechnen,

$$e = -Bx = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = e + b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine naheliegende Frage ist, ob die Inzidenzmatrix eines Netzwerks immer

$$\operatorname{Kern} B = \operatorname{span}\big\{(1, 1, \ldots, 1)^\top\big\} \tag{2.3}$$

erfüllt. Die Antwort darauf hängt von folgender geometrischen Eigenschaft des Netzwerks ab:

Definition 2.2. *Ein Netzwerk heißt* zusammenhängend*, wenn man je zwei Knoten durch einen Weg aus Kanten verbinden kann.*

Aussage (2.3) ist äquivalent dazu, dass das Netzwerk zusammenhängend ist. Konkret gilt:

Satz 2.3. *Für ein Netzwerk mit Inzidenzmatrix B sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Das Netzwerk ist zusammenhängend.

(ii) B kann nicht durch Umsortieren von Zeilen und Spalten in die Form

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

gebracht werden mit $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1,m_1}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2,m_2}$, $n_1, n_2, m_1, m_2 \geq 1$.

(iii) $\operatorname{Kern} B = \operatorname{span}\left\{(1,1,\dots,1)^\top\right\}$.

Gleichung (2.2) ist nicht die einzige Möglichkeit, aus den physikalischen Zusammenhängen zwischen Spannungen und Strömen im Netzwerk ein lineares Gleichungssysteme zu konstruieren. Man kann zum Beispiel sowohl x als auch y als zu berechnende Variable ansehen. Schreibt man das Ohmsche Gesetz in der Form

$$Ay = e + b \quad \text{mit} \quad A = \operatorname{diag}(R_1, ..., R_n) = C^{-1}\,,$$

so erhält man das System

$$\begin{aligned} Bx + Ay &= b\,, \\ B^\top y &= 0\,, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Diese Formulierung ist insbesondere dann sinnvoll, wenn einer der ohmschen Widerstände gleich Null ist, und man daher die Matrix C nicht mehr bilden kann.

Netzwerke im Wechselstromkreis

Wir werden nun das beschriebene Modell auf Wechselstromkreise mit zusätzlichen Bauteilen erweitern. Im Wechselstromkreis hat man einen zeitlich oszillierenden Strom mit vorgegebener Frequenz, also zum Beispiel

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)\,.$$

Bei einem ohmschen Widerstand ist der Spannungsabfall gegeben durch

$$U(t) = R\,I_0 \cos(\omega t) = U_0 \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad U_0 = R\,I_0 \,.$$

Einen Wechselstromkreis mit ohmschen Widerständen ohne weitere Bauteile kann man daher wie einen Gleichstromkreis beschreiben, wenn man die *Amplituden* I_0 und U_0 für Stromstärke und Spannung anstelle der konstanten Stromstärken und Spannungen des Gleichstromkreises verwendet. Neue Effekte kommen durch weitere elektrische Bauteile hinzu. Wir betrachten hier

- Kondensatoren, bezeichnet mit dem Symbol . Ein Kondensator kann elektrische Ladungen speichern. Die Menge der gespeicherten Ladung ist proportional zur angelegten Spannung. Bei Spannungsänderungen kann ein Kondensator daher Ströme aufnehmen oder abgeben. Dies wird beschrieben durch die Relation

  $$I(t) = C\,\dot{U}(t)\,,$$

  wobei C die *Kapazität* des Kondensators ist. Im Wechselstromkreis mit $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ gilt also

  $$U(t) = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_0}{C\omega} \cos(\omega t - \pi/2)\,.$$

  Man hat hier also eine *Phasenverschiebung* von $\pi/2$ zwischen Strom und Spannung.

- Spulen, bezeichnet durch das Symbol . Eine stromdurchflossene Spule erzeugt ein Magnetfeld, dessen Stärke proportional zur Stromstärke ist. Im Magnetfeld ist Energie gespeichert, diese muss beim Aufbau des Magnetfeldes aus dem Strom der Spule entnommen werden. Dies führt zu einem Spannungsabfall an der Spule, der proportional zur Änderung der Stromstärke ist,

  $$U(t) = L\,\dot{I}(t)\,,$$

  wobei L die *Induktivität* der Spule ist. Im Wechselstromkreis gilt also

  $$U(t) = -LI_0\omega \sin(\omega t) = L\omega I_0 \cos(\omega t + \pi/2)\,.$$

  Man hat hier also eine Phasenverschiebung von $-\pi/2$.

Die auftretenden Phasenverschiebungen machen die Berechnung hier komplizierter als beim Gleichstromkreis. Es ist nützlich, die Stromstärke und die Spannung mit *komplexen Zahlen* darzustellen. Dazu nutzt man die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi\,.$$

Es gilt dann

$$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\big(e^{i\omega t}\big) \quad \text{und} \quad \sin(\omega t) = \mathrm{Re}\big(-ie^{i\omega t}\big)\,.$$

Stellt man die Stromstärke dar als

$$I(t) = \mathrm{Re}\big(I_0 e^{i\omega t}\big)\,,$$

dann folgt für den Spannungsabfall am ohmschen Widerstand

$$U(t) = \mathrm{Re}\big(RI_0 e^{i\omega t}\big)\,,$$

am Kondensator

$$U(t) = \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{\omega C} I_0 e^{i\omega t}\right)$$

und an der Spule

$$U(t) = \mathrm{Re}\big(i\omega L I_0 e^{i\omega t}\big)\,.$$

Man kann dies durch komplexe *Impedanzen*

$$R\,, \quad -\frac{i}{\omega C} \quad \text{und} \quad i\omega L$$

darstellen, die die Rolle der reellen Widerstände übernehmen. Wie bei den reellen ohmschen Widerständen kann man auch komplexe Impedanzen addieren, wenn man mehr als ein Bauteil im selben Leiterstück hat. Die Gesamtimpedanz einer Leiters mit ohmschem Widerstand der Stärke R, Kondensator der Kapazität C und Spule der Induktivität L ist also

$$R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L\,.$$

Beispiel: Wir betrachten das in Abbildung 2.3 dargestellte Netzwerk mit $m = 5$ Knoten und $n = 6$ Kanten, die Knoten und Kanten sind dort bereits durchnummeriert, die positiven Richtungen sind vorgegeben. Die angelegten Spannungen $U_1(t)$ und $U_2(t)$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U_{01}\cos(\omega t) \quad \text{und} \\ U_2(t) &= U_{02}\cos(\omega t)\,. \end{aligned}$$

Es ist hier wichtig, dass die Frequenzen gleich sind, weil sonst kein Wechselstromnetz bekannter Frequenz vorhanden wäre. Die Phasenverschiebungen von U_1 und U_2 sind hier ebenfalls gleich, es ist aber nicht schwierig, unterschiedliche Phasen im Modell zu berücksichtigen. Zur Modellierung des Netzwerks benutzen wir

einen *Potentialvektor* $x \in \mathbb{C}^m$,
einen *Stromvektor* $y \in \mathbb{C}^n$ und
einen *Spannungsvektor* $e \in \mathbb{C}^n$.

http://www.springer.com/978-3-662-54334-4

Mathematische Modellierung
Eck, C.; Garcke, H.; Knabner, P.
2017, XVI, 515 S. 86 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-54334-4