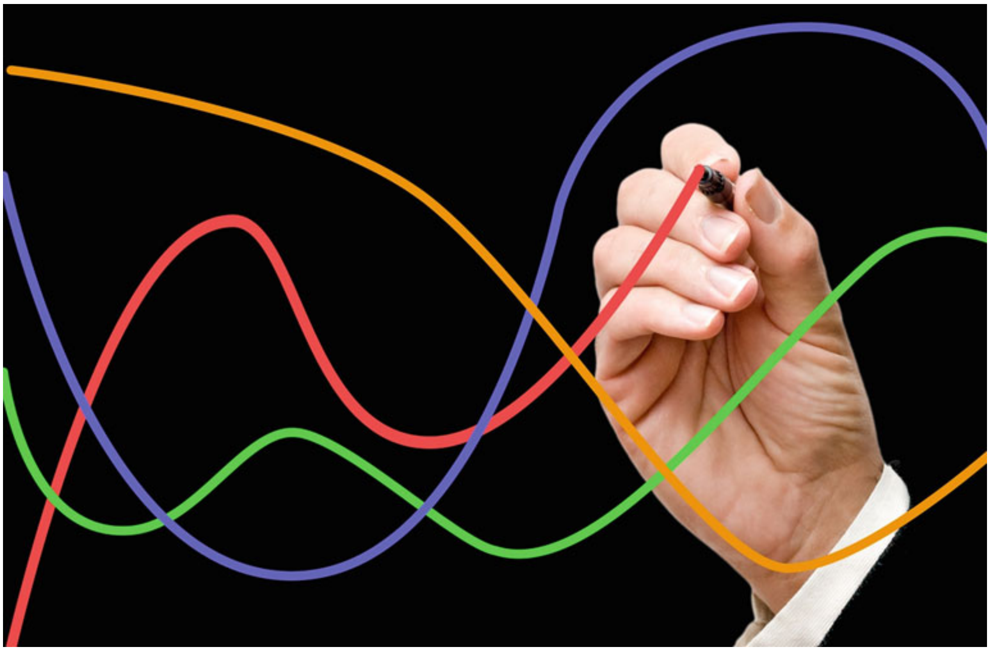
Funktionen

2

Teil I



Wie kann man Funktionen charakterisieren?

Welche grundlegenden Funktionen gibt es?

Was sind Umkehrfunktionen?

Wie geht Partialbruchzerlegung?

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_2

In diesem Kapitel behandeln wir das Konzept der Funktion und diskutieren qualitative Eigenschaften von Funktionen. Danach stellen wir die wichtigsten Funktionen vor, die in den Ingenieurwissenschaften benötigt werden.

2.1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

Funktionen sind ein grundlegendes Werkzeug, um voneinander abhängige physikalische Größen darzustellen, z. B. die Änderung der Spannung an einer elektrischen Komponente im Laufe der Zeit, die zeitliche Änderung des Drehwinkels in einem Motor oder die Änderung einer Signalstärke in Abhängigkeit sowohl von der Zeit als auch vom Ort.

Eine Funktion ordnet einer Eingangsgröße genau eine Ausgangsgröße zu

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die einer gegebenen Eingangsgröße eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße zuordnet. Salopp gesprochen kann eine Funktion verstanden werden als ein Mechanismus, der aus einer gegebenen Eingangsgröße genau eine Ausgangsgröße produziert (Abb. 2.1).

Achtung Gibt es zu einer Eingangsgröße mehr als eine Ausgangsgröße, handelt es sich nicht um eine Funktion. ◀

Definition

Eine **reelle Funktion** f ist eine Abbildung, die jeder reellen Zahl $x \in D \subset \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl $y = f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Man spricht auch von einer **Funktion** f in Abhängigkeit von x und bezeichnet dies mit

$$f\colon D \to \mathbb{R}, \quad y = f(x).$$

Die Variable x wird als **Argument** oder als **unabhängige Variable** und die Variable y als **Funktionswert** oder als **abhängige Variable** bezeichnet. D heißt **Definitionsmenge** oder **Definitionsbereich** der Funktion. Die Menge $W = \{f(x) | x \in D\}$ heißt **Wertemenge** oder **Wertebereich** der Funktion. Mitunter schreibt man für den Wertebereich $W = f(D)$. Hierdurch wird betont, dass die Menge D vermöge f auf die Menge $W = f(D)$ abgebildet wird.

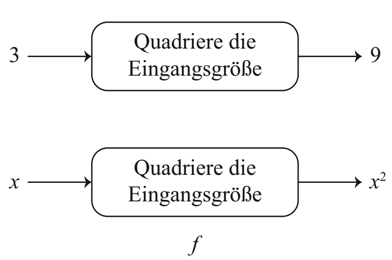


Abb. 2.1 Die Funktion „Quadriere die Eingangsgröße" produziert aus einer gegebenen Eingangsgröße x genau eine Ausgangsgröße x^2

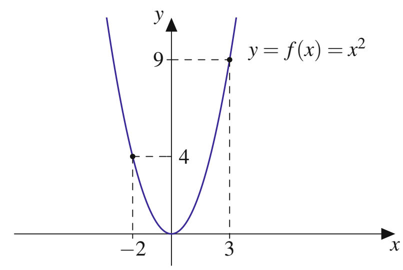


Abb. 2.2 Funktionsgraph der Funktion „Quadriere die Eingangsgröße". Die Eingangsgröße wird auf der horizontalen Achse und die Ausgangsgröße auf der vertikalen Achse aufgetragen. Das Schaubild ist eine Parabel

Reelle Funktionen $y = f(x)$ können in einem rechteckigen (**kartesischen**) Koordinatensystem grafisch dargestellt werden. Die Eingangsgröße wird auf der horizontalen Achse (**Abszisse**) und die Ausgangsgröße auf der vertikalen Achse (**Ordinate**) aufgetragen (Abb. 2.2).

Das Entscheidende dabei ist die Vorschrift; die verwendeten Bezeichnungen sind nicht wesentlich. Übliche mathematische Bezeichnungen sind x für die Eingangsgröße, y für die Ausgangsgröße und f für die Funktion. In konkreten Problemen werden in der Regel problemspezifische Bezeichnungen, also auch andere Buchstaben als x und y, verwendet.

Lineare Funktion und Normalparabel

- Die **lineare Funktion** ist gegeben durch

$$y = f(x) = m \cdot x + b$$

  mit Steigung m und y-Achsenabschnitt b. Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}$, und der Wertebereich ist $W = \mathbb{R}$ (Abb. 2.3).
- Die **Normalparabel** besitzt die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = x^2$$

  mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W = [0, \infty)$ (Abb. 2.4). ◀

Ohmsches Gesetz: Funktionaler Zusammenhang

Fließt ein elektrischer Strom I durch einen ohmschen Widerstand R, so fällt nach dem ohmschen Gesetz an R die

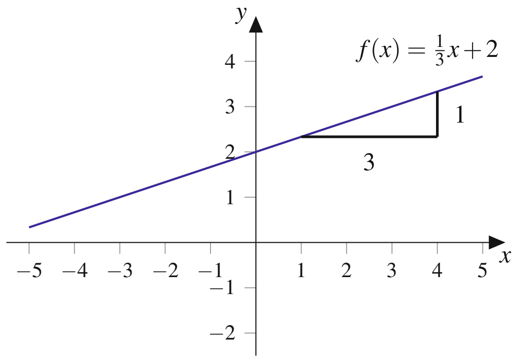


Abb. 2.3 Lineare Funktion $y = m \cdot x + b$, hier mit $m = \frac{1}{3}$ und $b = 2$

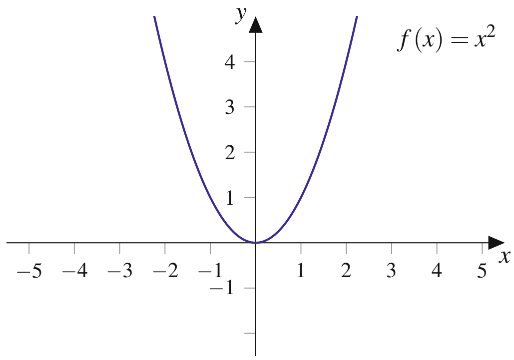


Abb. 2.4 Normalparabel $y = x^2$

Spannung

$$U = R \cdot I \tag{2.1}$$

ab. Der Spannungsabfall U hängt von R und von I ab. Interessieren wir uns für die Abhängigkeit der Spannung U vom Strom I, so beschreibt (2.1) die Funktion

$$U(I) = R \cdot I.$$

Jedem Strom I wird die Spannung $U(I)$ zugeordnet, der Widerstand R bleibt fest.

Das Schaubild dieser Funktion ist in Abb. 2.5 in einem rechteckigen Koordinatensystem dargestellt. Die unabhängige Variable I wird auf der horizontalen Achse abgetragen, der Funktionswert U, d. h. die abhängige Variable, wird auf der vertikalen Achse abgetragen. Das Bild von $U(I)$ ist eine Gerade mit der Steigung R.

Man kann aber auch danach fragen, wie der Strom bei konstanter Spannung vom Widerstand abhängt. Löst man (2.1) nach I auf, erhält man $I = \frac{U}{R}$. Bei konstanter Spannung erhält man also die Funktion

$$I(R) = \frac{U}{R}.$$

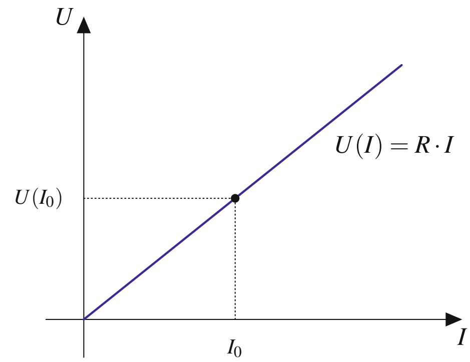


Abb. 2.5 Die funktionale Abhängigkeit der Spannung U vom Strom I bei festem Widerstand R. Zum Strom I_0 ergibt sich die Spannung $U(I_0)$

Hier darf man für R nicht alle reellen Zahlen einsetzen. Aus formalen Gründen kann man nicht $R = 0$ einsetzen, da dies zu einer Division durch 0 führen würde. Es ist physikalisch nicht sinnvoll, negative Werte für R einzusetzen, denn Widerstände sind nichtnegativ. Deshalb ist für eine Funktion nicht nur der Funktionsausdruck $I(R) = \frac{U}{R}$ wichtig, sondern auch der Definitionsbereich, d. h. die Teilmenge D der reellen Zahlen, aus der man die Werte der unabhängigen Variablen, hier R, nimmt. Man schreibt

$$I(R) = \frac{U}{R}, \quad R > 0.$$

Das Bild ist eine sog. Hyperbel (Abb. 2.6). ◀

Achtung Die Rolle der abhängigen und unabhängigen Variablen kann sich ändern, je nachdem, unter welcher Fragestellung man ein Problem betrachtet. Sowohl mathematisch formale Gründe als auch anwendungsbezogene Überlegungen können dazu führen, dass der Definitionsbereich einer Funktion eingeschränkt werden muss. ◀

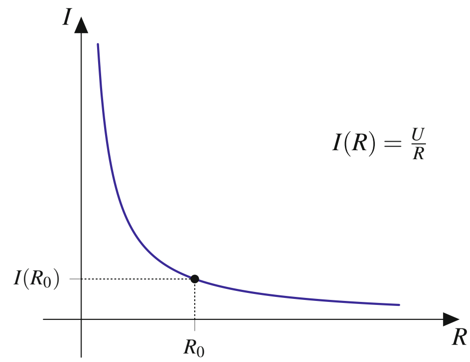


Abb. 2.6 Interessiert man sich für die Abhängigkeit des Stromes vom Widerstand bei konstanter Spannung, erhält man einen anderen funktionalen Zusammenhang als in Abb. 2.5. Hier muss zusätzlich der Definitionsbereich eingeschränkt werden

Funktionale Zusammenhänge werden auf verschiedene Arten dargestellt

Funktionen können unterschiedlich angegeben werden. Am häufigsten ist die bisher verwendete **explizite Darstellung** durch einen nach der abhängigen Variablen aufgelösten Ausdruck wie z. B. $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.

In der Praxis werden Sie häufig Messungen durchführen, um funktionale Abhängigkeiten experimentell zu ermitteln. Sie erhalten dann Datensätze der Form $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$, also **Wertetabellen**. Auch auf diese Weise lässt sich eine Funktion darstellen.

Eine weitere Darstellungsform für Funktionen ist die **implizite Darstellung**.

Beispiel

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschreibt eine Punktmenge in **impliziter Form**.

Sie besteht aus allen Punkten, die diese Gleichung erfüllen. Dies sind gerade die Punkte auf dem Einheitskreis (Abb. 2.7).

Um mit impliziten Ausdrücken arbeiten zu können, versucht man in der Regel, die definierende Gleichung nach y aufzulösen. Allerdings wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ keine eindeutige Zuordnung von x-Werten zu y-Werten vorgenommen. Formales Auflösen der Gleichung nach y ergibt nämlich

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Damit definiert die Kreisgleichung implizit zwei Funktionen: den oberen Halbkreis

$$y = f_1(x) = \sqrt{1-x^2} \text{ mit } -1 \leq x \leq 1 \text{ und } y \geq 0$$

sowie den unteren Halbkreis

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1-x^2} \text{ mit } -1 \leq x \leq 1 \text{ und } y \leq 0. \quad ◀$$

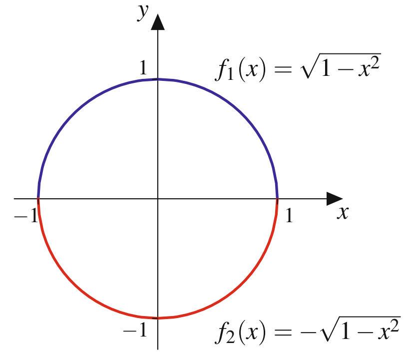


Abb. 2.7 Die implizite definierte Kurve $x^2 + y^2 = 1$ stellt den Einheitskreis dar. Zur expliziten Darstellung benötigt man zwei Funktionen, die den oberen und den unteren Halbkreis beschreiben

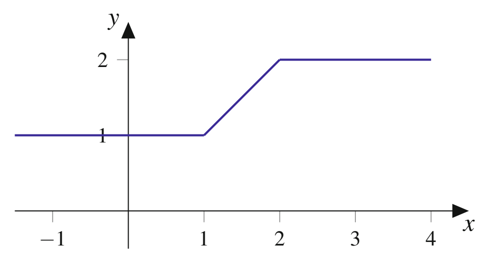


Abb. 2.8 Die Funktion $y = f(x)$ besteht aus drei Abschnitten: Für $x \leq 1$ ist $f(x)$ konstant 1, für $1 < x \leq 2$ ist $f(x)$ ein Geradenstück, und für $x > 2$ ist $f(x)$ konstant 2

Funktionen können aus Stücken zusammengesetzt werden

Nicht immer lässt sich der Verlauf einer Funktion mit einer einzigen Funktionsgleichung beschreiben. Vielmehr treten in der Technik auch häufig **stückweise definierte Funktionen** auf. Mit diesen Funktionen kann man verschiedene Betriebszustände (z. B. $f(x) = 1$ für „eingeschaltet“ und $f(x) = 0$ für „ausgeschaltet“) beschreiben.

Die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und in drei Abschnitten erklärt (Abb. 2.8). Sie weist keine Sprünge an den Übergängen von einem Abschnitt zum nächsten auf.

Weitere Beispiele für stückweise erklärte Funktionen sind die Beschreibung der Balkenbiegung (Abb. 2.29) und das Laden und Entladen eines Kondensators (Anwendungsbox in Abschn. 2.5).

Verkettung heißt Hintereinanderausführung von Funktionen

Beim Auswerten der Funktion $y = h(x) = 2x^2$ geht man in zwei Schritten vor: zuerst quadriert man die unabhängige Variable x, dann verdoppelt man das Ergebnis, das man zuvor erhalten hat. Wir können dies als Hintereinanderausführung oder **Verkettung** der Funktionen $y = g(x) = x^2$ und $y = f(x) = 2x$ interpretieren (Abb. 2.9). Dafür schreibt man

$$h(x) = f(g(x)).$$

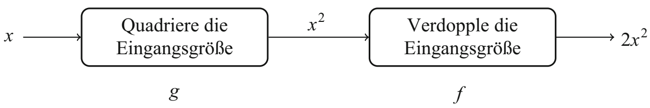


Abb. 2.9 Die Funktion h mit $h(x) = 2x^2$ kann als Hintereinanderausführung $h(x) = f(g(x))$ mit $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^2$ interpretiert werden

Bei der Verkettung von Funktionen spielt die Reihenfolge eine Rolle.

Beispiel

1. Es sei $y = f(x) = 3x + 5$ und $y = g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Bestimmen Sie $f(g(x))$ und $g(f(x))$.
   Zunächst setzen wir $g(x)$ in f ein:
   $$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - 2\right) = 3\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 5 = \frac{3}{2}x - 1.$$
   Nun setzen wir $f(x)$ in g ein:
   $$g(f(x)) = g(3x + 5) = \frac{1}{2}(3x + 5) - 2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$
   Die beiden Ergebnisse sind offensichtlich unterschiedlich. Beim Verketten von Funktionen kommt es auf die Reihenfolge an.
2. Gegeben sind die Funktionen $y = f(x) = x^2 - 1$ und die Funktion $y = g(x) = \sqrt{x}$. Wir bestimmen nun $g(f(x))$ und achten dabei auf die Definitions- und Wertebereiche der Funktionen.
   Die Funktion $y = f(x) = x^2 - 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und nimmt Werte $y \geq -1$ an, während die Funktion g nur für $x \geq 0$ definiert ist.
   Verkettet ergibt sich folgende neue Abbildung:
   $$g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}.$$
   Die verkettete Funktion ist nun nur noch für $|x| \geq 1$ definiert. ◀

Achtung Beim Verketten von Funktionen muss der Definitionsbereich der inneren Funktion u. U. so eingeschränkt werden, dass ihr Wertebereich nicht größer ist als der Definitionsbereich der äußeren Funktion. ◀

Anwendung der Verkettung

Für einen industriellen Fertigungsprozess wird Wasser in einem Becken mit 2 m Tiefe gespeichert. Der Wasserstand über dem Boden wird mit einem Sensor gemessen. Der Sensor wandelt den Pegel x (in m) in ein Spannungssignal U (in V) um:

$$U = f(x) = -5\,\mathrm{V} + 5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot x.$$

Der Wasserstand von 0–2 m wird in ein Spannungssignal zwischen −5 V und 5 V abgebildet.

In Abhängigkeit der Spannung wird ein Zuflussventil geöffnet gemäß der Funktion

$$z(U) = \begin{cases} -10\,\frac{\ell}{\mathrm{V}} \cdot U, & U \leq 0, \\ 0\,\ell, & U > 0. \end{cases}$$

Für eine negative Spannung U wird Wasser nachgeführt, und zwar proportional zum Wert der Spannung. Bei positiver Spannung schließt das Ventil.

Die Verkettung der Funktionen $z(U)$ und $U(x)$ beschreibt die Zuflussrate in $\frac{\ell}{\mathrm{m}}$ in Abhängigkeit vom Pegelstand x (in m). Für $U \geq 0\,\mathrm{V}$, d. h. für $x \geq 1\,\mathrm{m}$, und für $U \leq 0\,\mathrm{V}$, d. h. für $x \leq 1\,\mathrm{m}$, folgt durch Einsetzen:

$$Z(x) = z(U(x)) = \begin{cases} 50\,\ell - 50\,\frac{\ell}{\mathrm{m}} \cdot x, & x \leq 1\,\mathrm{m}, \\ 0\,\ell, & x > 1\,\mathrm{m}. \end{cases}$$

Für Pegelstände im Becken unter 1 m wird Wasser zugeführt. Steht der Pegel über 1 m, wird der Zufluss gestoppt. ◀

Beschränktheit von Funktionen heißt Beschränktheit des Wertebereichs

Wir haben bereits gesehen, dass es Funktionen gibt, die nicht jeden Wert aus $\mathbb{R}$ annehmen, selbst wenn die jeweilige Definitionsmenge mit ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmt. So nimmt beispielsweise die Funktion $y = x^2 - 1$ keinen Wert unterhalb von -1 an. Der kleinste Wert, den die Wertemenge dieser Funktion besitzt, ist die Zahl -1, die sich durch das Einsetzen von $x = 0$ ergibt. Wir sprechen hierbei von einem Minimum von f.

Die Funktion $y = \frac{1}{x}$ nimmt für $x > 0$, also für die Definitionsmenge $D = (0, \infty)$, keine negativen Werte an, nicht einmal die Zahl 0 wird durch diese Funktion erreicht. Wir können uns allerdings der Zahl 0 mit den Funktionswerten beliebig nähern, indem wir immer größere werdende x-Werte aus D einsetzen. Wertemäßig können wir jede positive Zahl mit Funktionswerten von g unterschreiten. Hierzu müssen wir nur hinreichend große x-Werte einsetzen. Es gibt zwar kein Minimum von g, jedoch liegt mit der Zahl 0 das Infimum, also die größte untere Schranke, für die Wertemenge von g vor. Wenn wir uns dagegen mit den x-Werten aus $D = (0, \infty)$ der linken Intervallgrenze 0 nähern, so erhalten wir beliebig groß werdende Funktionswerte. Wir sagen in dieser Situation, dass die Funkion g zwar nicht nach oben, jedoch nach unten beschränkt ist. Es liegt daher nahe, basierend auf dem Beschränktheitsbegriff für die Wertemenge einer Funktion, die Beschränktheit dieser Funktion zu definieren.

Teil I

Definition: Beschränktheit einer Funktion

Es sei $y = f(x)$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$. Man nennt f **(nach oben bzw. nach unten) beschränkt**, wenn die Wertemenge $W = f(D)$ (nach oben bzw. nach unten) beschränkt ist.

Beispiel

1. Die Sinusfunktion $y = f(x) = \sin(x)$ ist beschränkt, da ihr Wertebereich $[-1, 1]$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.
2. Die Exponentialfunktion $y = f(x) = \mathrm{e}^x$ ist nach unten beschränkt, da sie nur positive Werte annimmt. Der Wertebereich $(0, \infty)$ ist eine nach unten beschränkte Menge mit 0 als Infimum.
3. Die Funktion $y = f(x) = x^2$, $x \in D = [-2, 2)$ ist beschränkt, da ihr Wertebereich $W = [0, 4]$ eine beschränkte Menge ist.
4. Die Funktion $y = f(x) = x^2$, $x \in D = \mathbb{R}$ ist nur nach unten beschränkt, denn hier ist $W = [0, \infty)$. ◀

Monotonie beschreibt eine grundlegende Eigenschaft von Funktionen

Neben der Beschränktheit ist Monotonie eine Eigenschaft, die wir hier zunächst allein über die Betrachtung der Funktionswerte definieren.

Definition: Monotonie einer Funktion

Es sei $y = f(x)$ eine reelle Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$. Man nennt f

1. **monoton wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$,
2. **streng monoton wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$,
3. **monoton fallend**, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$,
4. **streng monoton fallend**, falls $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$.

Für den Begriff „(streng) monoton wachsend" gibt es auch die Bezeichnung „(streng) monoton steigend" (Abb. 2.10).

Wie die Beschränktheit ist Monotonie eine Eigenschaft, die vom betrachteten Definitionsbereich abhängt.

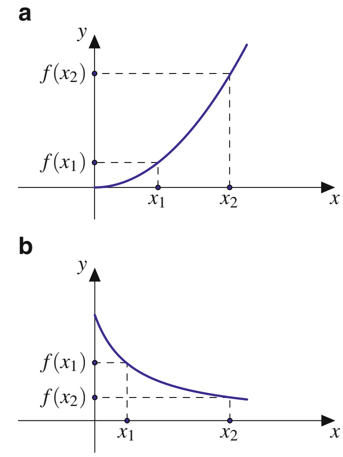


Abb. 2.10 Streng monoton wachsende Funktion (**a**) und streng monoton fallende Funktion (**b**)

Beispiel

1. Die Identität id mit $y = \mathrm{id}(x) = x$ ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.
2. $-\mathrm{id}$ ist streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$.
3. Die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D = (-\infty, 0)$ ist streng monoton fallend.
4. Die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D = (0, \infty)$ ist streng monoton fallend.
5. Die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht monoton, da beispielsweise für $1 < 2$ gilt: $f(1) > f(2)$, aber für $-1 < 1$ Gegenteiliges erfüllt ist: $f(-1) < f(1)$. ◀

Perspektivwechsel: Der Blick auf den Wertebereich einer Funktion

Eine Funktion $f\colon A \to B$ ordnet jedem $x \in A$ eindeutig ein $y = f(x) \in B$ zu. Betrachten wir die Zuordnung der Werte y zu den Argumenten x mit $y = f(x)$, so unterscheidet man drei Eigenschaften, die für die Umkehrung der Funktion wesentlich sind.

Definition

- Die Funktion $f\colon A \to B$ heißt **injektiv**, wenn es keine zwei verschiedene Elemente in A gibt, die auf das gleiche $y \in B$ abgebildet werden:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

bzw.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Die Funktion $f\colon A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn jedes Element $y \in B$ Funktionswert eines Elements von A ist.
- Die Funktion $f\colon A \to B$ heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Ist f bijektiv, so lässt sich zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ bestimmen. Auch bei injektiven Funktionen ist dies möglich, sofern man sich auf Elemente des Wertebereichs von f beschränkt.

Anschaulicher wird die Situation, wenn wir reelle Funktionen betrachten.

Beispiel

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$y = f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$$
ist injektiv (Abb. 2.11, blau). Jedem $y \in \mathbb{R}$ ist höchstens ein $x \in \mathbb{R}$ zugeordnet mit $y = f(x)$. Für $y \in (-\infty, 0)$ gilt $y = x$, und für $y \in [1, \infty)$ gilt $x = y - 1$. Zu $y \in [0, 1)$ existiert kein x mit $y = f(x)$. Daher ist f nicht surjektiv.
2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit
$$y = f(x) = x^2$$
ist surjektiv (Abb. 2.11, rot). Jedem $y \in [0, \infty)$ sind zwei x-Werte mit $y = f(x)$ zugeordnet, nämlich $x_1 = \sqrt{y}$ und $x_2 = -\sqrt{y}$. Diese Funktion ist nicht injektiv.
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$y = f(x) = x^3$$
ist bijektiv (Abb. 2.11, grün). Jedem $y \in \mathbb{R}$ ist genau ein $x \in \mathbb{R}$ zugeordnet mit $y = f(x)$. Für $y \in [0, \infty)$ gilt $x = \sqrt[3]{y}$ und für $y \in (-\infty, 0)$ gilt $x = -\sqrt[3]{-y}$. Die Funktion f ist sowohl surjektiv als auch injektiv.
4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$y = f(x) = x^2$$
ist weder injektiv noch surjektiv. Zu $y \in [0, \infty)$ existieren zwei x-Werte mit $y = f(x)$, aber zu $y \in (-\infty, 0)$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$. ◀

Umkehrung von Funktionen: Wenn auch die Zuordnung von *y* zu *x* eine Funktion ist

Für die Auflösung von Gleichungsbeziehungen spielen Umkehrfunktionen eine entscheidende Rolle, da sich bei Hintereinanderausführung Funktion und Umkehrfunktion gegenseitig aufheben.

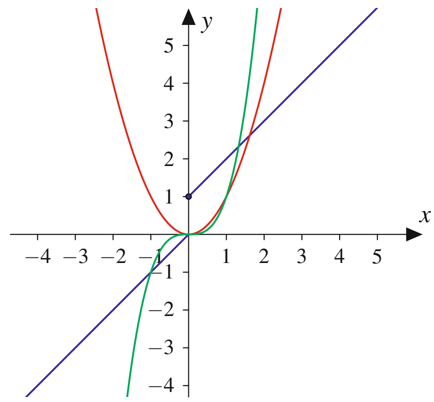


Abb. 2.11 Funktionen vom Wertebereich aus betrachtet: injektive (*blau*), surjektive (*rot*) und bijektive (*grün*) Funktion

Definition: Umkehrfunktion

Eine Funktion $f : D \longrightarrow W$ heißt **umkehrbar**, wenn es eine Funktion $g : W \longrightarrow D$ gibt mit
$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in D$$
und
$$f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in W.$$

In diesem Fall heißt g die **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Die Umkehrfunktion f^{-1} muss nicht existieren. Falls es sie gibt, so ist f^{-1} durch f eindeutig bestimmt.

Achtung Der Exponent -1 in $f^{-1}(y)$ ist in diesem Zusammenhang keine Potenz, sondern kennzeichnet die Umkehrfunktion. ◀

Beispiel

Weisen Sie nach, dass $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ die Umkehrfunktion zu $f(x) = 3x + 2$ ist.

Wir müssen zeigen, dass die Hintereinanderausführung $f^{-1}(f(x))$ für alle x wieder x ergibt. Dazu definieren wir eine Hilfsvariable $z = f(x) = 3x + 2$. Damit ist
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(z) = \frac{z}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x+2) - \frac{2}{3} = x.$$

Weiter müssen wir zeigen, dass die Hintereinanderausführung $f(f^{-1}(x))$ für alle x wieder x ergibt. Dazu definieren wir eine Hilfsvariable $u = f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$. Damit

Teil I

ist

$$f(f^{-1}(x)) = f(u) = 3u + 2 = 3\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) + 2 = x.$$

Also ist f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion zu f. ◄

Eine Funktion muss eine Voraussetzung erfüllen, damit sie umkehrbar ist.

Umkehrbare Funktionen

Eine Funktion ist umkehrbar, wenn zu jedem y aus dem Wertebereich der Funktion genau ein x aus dem Definitionsbereich gehört mit $f(x) = y$.

- Ist f auf D eine injektive Funktion, so ist f umkehrbar.
- Ist f auf D streng monoton (entweder steigend oder fallend), so ist f umkehrbar.

Dies ist dann der Fall, wenn jede waagerechte Gerade den Funktionsgraphen höchstens einmal schneidet (Abb. 2.12). Bei der Funktion in Abb. 2.12, oben, gibt es mit den x-Werten x_0, x_1, x_2 und x_3 vier Werte im Definitionsbereich, deren Funktionswert y_0 ist. Daher ist die Funktion nicht umkehrbar. Bei der Funktion in Abb. 2.12, unten, gibt es mit x_0 genau einen Wert aus dem Definitionsbereich y_0, dessen Funktionswert y_0 ist. Daher ist sie umkehrbar.

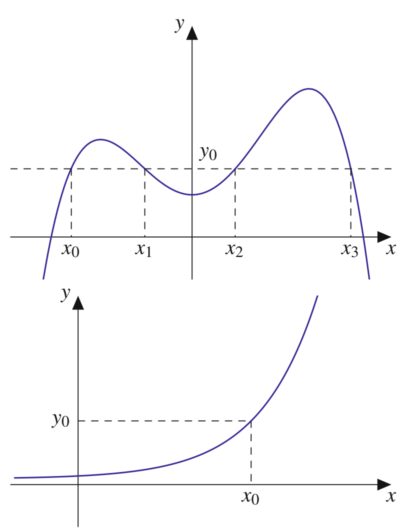


Abb. 2.12 Die Funktion *oben* ist nicht umkehrbar, denn es gibt mit den x-Werten x_0, x_1, x_2 und x_3 vier Werte im Definitionsbereich, deren Funktionswert y_0 ist. Die Funktion *unten* ist umkehrbar, denn es gibt für jedes y_0 genau einen Wert x_0 aus dem Definitionsbereich, dessen Funktionswert y_0 ist

Bei der Bestimmung der Umkehrfunktion geht man in zwei Schritten vor.

Bestimmung der Umkehrfunktion

1. Man löst $y = f(x)$ nach x auf: $x = f^{-1}(y)$.
2. Man vertauscht die Bezeichnungen x und y und erhält $y = f^{-1}(x)$.

Beispiel

- Die lineare Funktion $y = f(x) = 2x+1$ mit $D = W = \mathbb{R}$ ist umkehrbar. Beim Bestimmen der Umkehrfunktion suchen wir eine Funktion f^{-1}, die die Wirkung von f rückgängig macht. Das bedeutet, dass f^{-1} das Argument $2x + 1$ wieder auf x abbilden muss:

$$f^{-1}(2x + 1) = x.$$

1. Wir lösen $y = 2x + 1$ nach x auf und erhalten

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

2. Die Umbenennung liefert

$$y = \frac{x-1}{2}.$$

Die Umkehrfunktion lautet

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Die Funktionsgraphen von $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ liegen in einem kartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$ (Abb. 2.13).

- Wir bestimmen die Umkehrfunktion zu $y = f(x) = 1 + x^2$ mit $x \geq 0$:

1. Auflösen nach x

$$y = 1 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-1},$$

denn nur für die positive Wurzel erhält man Werte aus dem Definitionsbereich von f

2. Umbenennen

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \text{ mit } x \geq 1 \text{ und } y \geq 0$$

(Abb. 2.14). ◄

Weitere Beispiele für Paare von Funktionen, bei denen die eine jeweils die Umkehrfunktion der anderen ist, sind Potenz- und Wurzelfunktionen (Abschn. 2.4) sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen (Abschn. 2.5).

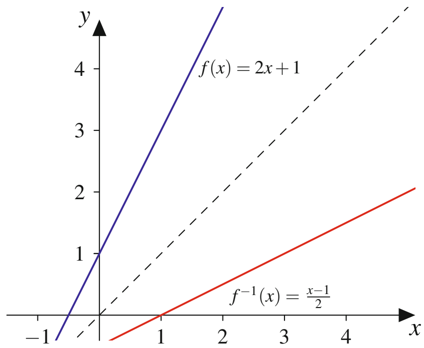


Abb. 2.13 Die Funktion $y = f(x) = 2x + 1$ mit ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

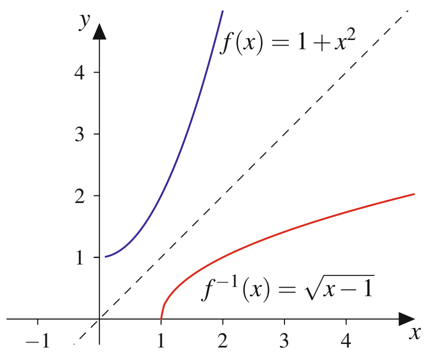


Abb. 2.14 Die Funktion $y = f(x) = 1 + x^2$ mit ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

Durch Streckung, Stauchung und Verschiebung entstehen neue Funktionen

Eine Funktion und ihr Schaubild kann man strecken, stauchen oder verschieben, indem man die unabhängige Variable x bzw. die abhängige Variable y mit einem festen Zahlenwert multipliziert oder zu x bzw. y eine feste Zahl addiert. Dadurch entsteht eine neue Funktion, die der ursprünglichen Funktion ähnlich sieht.

Streckung, Stauchung und Spiegelung einer Funktion

Wir betrachten eine beliebige Funktion $y = f(x)$:

- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = a \cdot f(x)$ mit $a > 1$ entspricht der Streckung von $y = f(x)$ in y-Richtung um den Faktor a (Abb. 2.15).
- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = a \cdot f(x)$ mit $0 < a < 1$ ist gegenüber $y = f(x)$ in y-Richtung gestaucht.
- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = f(a \cdot x)$ mit $a > 1$ entspricht der Stauchung von $y = f(x)$ in x-Richtung (Abb. 2.16a).
- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = f(a \cdot x)$ mit $0 < a < 1$ streckt den Graphen von $y = f(x)$ in x-Richtung (Abb. 2.16b).
- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = -f(x)$ entspricht der Spiegelung von $y = f(x)$ an der x-Achse (Abb. 2.17).

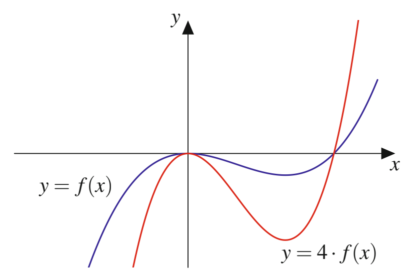


Abb. 2.15 Die Funktion $y = 4 \cdot f(x)$ (*rot*) ist gegenüber $y = f(x)$ (*blau*) in y-Richtung gestreckt

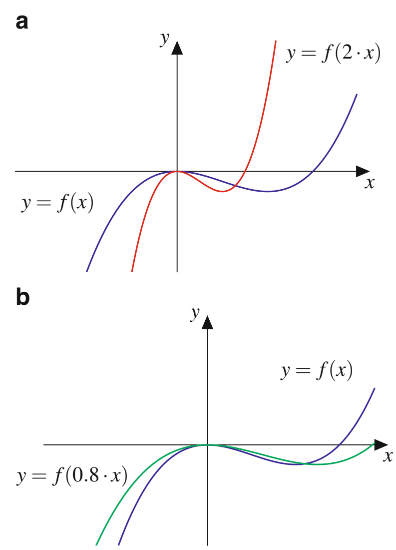


Abb. 2.16 Stauchung und Streckung in x-Richtung. Die Funktion $y = f(2x)$ (*rot*) ist gegenüber $y = f(x)$ (*blau*) in x-Richtung gestaucht (**a**). Die Funktion $y = f(0.8 \cdot x)$ (*grün*) ist gegenüber $y = f(x)$ (*blau*) in x-Richtung gestreckt (**b**)

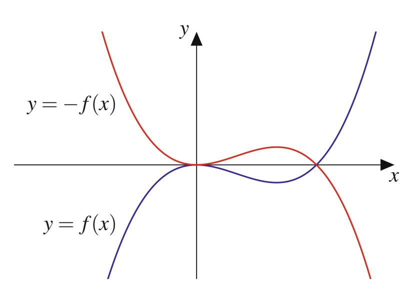


Abb. 2.17 Die Funktion $y = -f(x)$ (*rot*) ist gegenüber $y = f(x)$ (*blau*) an der x-Achse gespiegelt

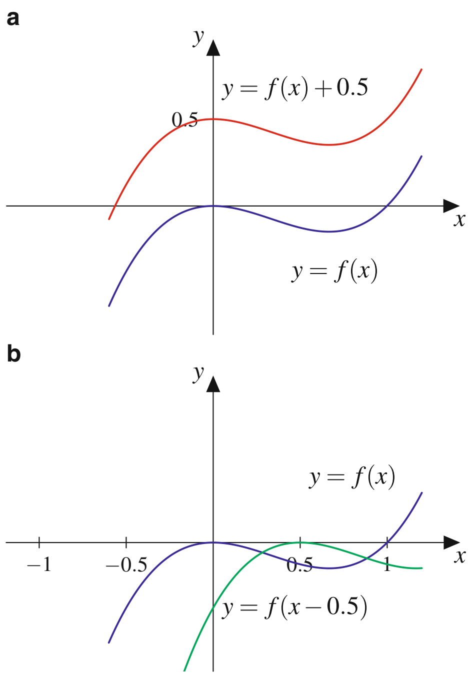


Abb. 2.18 Verschiebung in y- und in x-Richtung. Die Funktion $y = f(x) + 0.5$ (*rot*) ist gegenüber $y = f(x)$ (*blau*) um 0.5 nach oben verschoben (**a**). Die Funktion $y = f(x - 0.5)$ (*grün*) ist gegenüber $y = f(x)$ (*blau*) um 0.5 nach rechts verschoben (**b**)

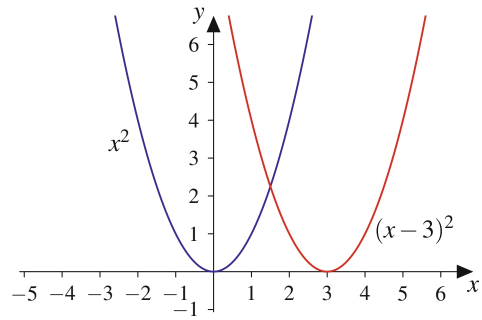


Abb. 2.19 Die Parabel $y = (x - 3)^2$ ist gegenüber der Normalparabel $y = x^2$ um drei Einheiten nach rechts verschoben

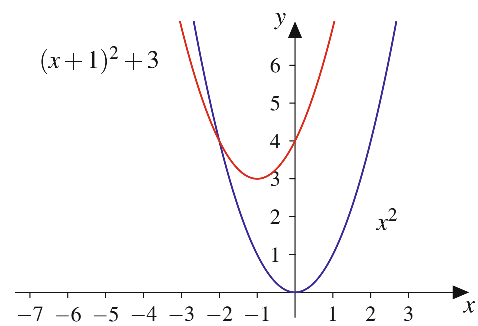


Abb. 2.20 Die Parabel $y = (x+1)^2 + 3$ ist gegenüber der Normalparabel $y = x^2$ um eine Einheit nach links und um drei Einheiten nach oben verschoben

Verschiebung einer Funktion

- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = f(x) + y_0$ ist gegenüber dem Graphen von f um y_0 in die y-Richtung verschoben (Abb. 2.18a).
- Der Graph von $y = \tilde{f}(x) = f(x - x_0)$ ist gegenüber dem Graphen von f in x-Richtung verschoben, und zwar
  - für $x_0 > 0$ nach rechts und
  - für $x_0 < 0$ nach links (Abb. 2.18b).

Beispiel

1. Die Funktion

$$y = \tilde{f}(x) = (x - 3)^2$$

ist gegenüber der Normalparabel $y = f(x) = x^2$ um $x_0 = 3$ nach rechts verschoben (Abb. 2.19).

2. Die Funktion

$$y = \tilde{f}(x) = x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3$$

bzw. $y = \tilde{f}(x) = (x + 1)^2 + 3$ ist gegenüber der Normalparabel $y = f(x) = x^2$ um $y_0 = 3$ nach oben und um $x_0 = 1$ nach links verschoben (Abb. 2.20). ◄

Immer wiederkehrend: Periodische Funktionen

Vorgänge, die durch Wiederholung gekennzeichnet sind, werden als periodisch bezeichnet. Entsprechend werden Funktionen mit einer gesetzmäßigen Wiederholung von Funktionsstücken „periodische Funktionen“ genannt.

Definition: Periodische Funktion

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **periodisch** mit der **Periode** $p > 0$, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + p) = f(x)$$

gilt. Mit p ist auch jedes ganzzahlige Vielfache von p eine Periode. Die kleinste Periode heißt **minimale** oder **primitive Periode** (Abb. 2.21).

http://www.springer.com/978-3-662-53866-1

Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden
Band 1: Vorkurs, Analysis in einer Variablen, Lineare Algebra, Statistik

Göllmann, L.; Hübl, R.; Pulham, S.; Ritter, S.; Schon, H.; Schüffler, K.; Voß, U.; Vossen, G.

2017, XIV, 530 S. 261 Abb., 253 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-53866-1