2 Alles ist logisch

Zu Beginn ein kleines Rätsel[1]:

Andreas, Benjamin und Clemens stehen vor Gericht, aber nur einer von ihnen ist schuldig.

Andreas behauptet, unschuldig zu sein.

Benjamin bestätigt, dass Andreas unschuldig ist.

Clemens behauptet schließlich, selbst schuldig zu sein.

Im Verlauf des Gerichtsverfahrens stellt sich heraus, dass der Schuldige gelogen hat. Wer ist der Schuldige?

Sie wissen die Antwort bereits? Prima. Wenn nicht, so macht das auch nichts. In diesem Kapitel lernen Sie die notwendigen „Werkzeuge“ kennen, mit denen Sie sich die Antwort selbst herleiten können.

[1] Frei nach Smullyan, Raymond (1997): The Riddle of Scheherazade. Alfred A. Knopf, New York.

R. Drechsler et al., *Computer*, Technik im Fokus, DOI 10.1007/978-3-662-53060-3_2

2.1 Was ist Logik?

Um dieses Rätsel zu lösen, müssen Sie logisch denken. Klingt einfach? Ist es aber nicht unbedingt. Wie oft sagen wir im Alltag „Ist doch logisch!“. Doch die Logik ist eine Kunst, die ein Um-die-Ecke-Denken erfordert, ein Verstehen von Zusammenhängen, die auf den ersten Blick nicht immer ersichtlich sind. Die digitale Ausgabe des Dudens definiert Logik als die „Lehre vom folgerichtigen Denken, vom Schließen aufgrund gegebener Aussagen“[2]. Es geht also darum, Aussagen auf ihre Gültigkeit hin zu überprüfen und daraus die richtigen Schlüsse zu ziehen. Und wer war der erste logische Denker? Na wer wohl? Aristoteles na-

[2] http://www.duden.de/rechtschreibung/Logik, Zugriff am 20.11.2015.

türlich, der alte Alleskönner. Er entwickelte die Syllogistik, ein System, nachdem aus zwei Aussagen auf eine dritte geschlossen wurde. Ein klassisches Beispiel: Aus den Aussagen „Alle Menschen sind sterblich" und „Alle Griechen sind Menschen" lässt sich logisch schlussfolgern, dass alle Griechen sterblich sind. So einfach ist es aber nicht immer. Manchmal verführt uns unsere Intuition zu Schlüssen, die sich beim genaueren Hinsehen als falsch herausstellen. Nur weil ich auf meine Gesundheit achte und Obst gesund ist, heißt das nicht automatisch, dass ich auch regelmäßig Obst esse. Möglicherweise mag ich gar kein Obst und esse stattdessen viel Gemüse, oder eine Fructose-Intoleranz zwingt mich dazu, auf Apfel und Co. zu verzichten. Mit voreiligen Schlüssen hat Logik also nichts zu tun – kein Wunder, schließlich ist sie von jeher eng mit der Philosophie verbunden.

Im 19. Jahrhundert fand die Logik zunehmend Eingang in die Mathematik, und zwar als eine Sprache, die sich dank ihrer Eindeutigkeit – entweder eine Aussage ist wahr oder sie ist falsch – perfekt dafür eignet, mathematische Sätze zu formulieren und Beweise zu führen. Der Engländer George Boole (1815–1864) beschrieb in seinem Hauptwerk „The Mathematical Analysis of Logic" von 1847 den ersten algebraischen Logikkalkül, ein formales Regelsystem, das vorgibt, wie sich aus gegebenen Aussagen weitere Aussagen ableiten lassen. Damit gilt Boole als einer der Begründer der modernen mathematischen Logik.

Aber Halt! Was hat das denn alles mit dem Computer zu tun?

Als Lehre des richtigen Schlussfolgerns ist die Logik nicht nur die Sprache der Mathematik, sondern auch der Computertechnik. Der richtige Umgang mit logischen Ausdrücken ist der Schlüssel, um zu verstehen, wie moderne Computer funktionieren.

2.2 Computer und Logik

Warum spricht der Computer eigentlich nicht unsere Sprache? Mal abgesehen davon, dass weltweit etwa 7000 unterschiedliche menschliche Sprachen existieren, ist das größte Problem die Mehrdeutigkeit sprachlicher Zeichen. Dabei können nicht nur Worte, wie „Bank“ (Sitzgelegenheit, Geldinstitut) oder „Leiter“ (Stufengerät, Chef, physikalisches Bauteil), sondern auch ganze Aussagen in die Irre führen, weil sie mehr als nur eine Bedeutung haben.

Bleiben wir im Deutschen und nehmen zum Beispiel die Aussage „Ich sehe jemanden auf dem Balkon mit dem Fernglas“. Auch wenn uns dieser Satz wohl eher selten über die Lippen kommt, so eignet er sich doch recht gut zur Veranschaulichung sprachlicher Ungenauigkeit, denn er kann gleich vier unterschiedliche Bedeutungen haben. Er könnte zum einen bedeuten, dass ich mich auf einem Balkon befinde, mit einem Fernglas, durch das ich eine Person erblicke. Es könnte aber auch sein, dass sich die andere Person auf dem Balkon aufhält und ich sie durch mein Fernglas dort sehe. Oder ich sehe jemanden auf dem Balkon, der ein Fernglas bei sich hat. Aber auch der Balkon, auf dem eine Person steht, könnte mit einem Fernglas ausgestattet sein. Ganz schön verwirrend, oder?

Mehrdeutige Aussagen, wie sie in unserer Alltagssprache häufig vorkommen, können zu Missverständnissen führen. Ein Computer kann mit ungenauen Kommandos erst recht nichts anfangen. Die Computertechnik greift daher auf die Logik zurück, mit der es möglich ist, ganz klar definierte Aussagen zu formulieren, und in der es klare Regeln gibt, wie sich aus bestehenden Aussagen neue herleiten lassen.

2.3 Aussagenlogik

Und hier kommt die Aussagenlogik ins Spiel: Als Teilgebiet der klassischen Logik beschäftigt sie sich mit Aussagen und der Verknüpfung von Aussagen zu neuen Aussagen.

Was ist überhaupt eine Aussage? Eine Aussage kann sich aus Wörtern unserer natürlichen Sprache zusammensetzen, aber auch aus mathematischen Zeichen. Zwei Prinzipien gelten hier: zum einen das Prinzip der Zweiwertigkeit, wonach eine Aussage nur entweder wahr oder falsch sein kann, zum anderen das Extensionalitätsprinzip, das besagt, dass der Wahrheitswert jeder Aussage eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt ist. Ob eine Verknüpfung richtig oder falsch ist, hängt also immer davon ab, ob ihre Einzelteile richtig oder falsch sind. Hier einige Beispiele für Aussagen:

A1: Canberra ist die Hauptstadt von Australien.
A2: $10 \div 2 = 5$.
A3: Alle Hunde sind Rottweiler.
A4: Berlin ist eine Stadt mit mehr als 3 Millionen Einwohnern.

Nach kurzer Verunsicherung (Ist Sydney nicht die Hauptstadt von Australien?) lässt sich Aussage 1 zweifellos bejahen. Es ist kein Taschenrechner nötig, um der zweiten Aussage zuzustimmen. Dagegen ist die dritte Aussage – und da werden uns sicherlich viele Hundebesitzer recht geben – eindeutig falsch. Aussage 4 ist eine zusammengesetzte Aussage, die aus den Teilaussagen „Berlin ist eine Stadt" und „Berlin hat mehr als 3 Millionen Einwohner" besteht. Da beide Teilaussagen wahr sind, muss laut dem Extensionalitätsprinzip auch ihre Verknüpfung wahr sein.

In der natürlichen Sprache lassen sich Aussagen zum Beispiel mit den Worten „und", „oder", „wenn (...) dann" und „nicht" verknüpfen. Beispiele gefällig? Ich mag Rotwein *und* indisches Essen. Ich fahre mit dem Rad *oder* mit der Bahn zur Arbeit. *Wenn* mir kalt ist, *dann* drehe ich die Heizung auf. In der Logik werden solche Bindewörter als Junktoren bezeichnet. Anstatt jedoch einzelne Satzteile einer natürlichen Sprache zu verbinden, verknüpfen Junktoren logische Aussagen miteinander.

Es gibt noch einen entscheidenden Unterschied: Die Bedeutung eines Junktors ist eindeutig definiert. Dagegen können Bindewörter je nach Kontext eine unterschiedliche Bedeutung haben. So bedeutet „oder" in der Aussage „Heute Abend esse ich auswärts *oder* ich koche zu Hause", dass ich zwar zwischen den zwei Optionen wählen, mich aber nicht für beide gleichzeitig entscheiden werde. Das Bindewort „oder" ist hier im Sinne eines „entweder (...) oder" zu verstehen. Im Gegensatz dazu ist die folgende Aussage nicht ausschließend: „Wenn ich hungrig bin oder Appetit habe, esse ich". Ich esse also erstens, wenn ich Hunger habe, zweitens, wenn ich Lust auf etwas Bestimmtes habe, aber nicht unbedingt hungrig bin, und drittens, wenn ich Hunger *und* Appetit habe. In diesem Beispiel entspricht das Bindewort „oder" der Bedeutung „und/oder". Die in der Aussagenlogik verwendeten Junktoren lassen sich also nicht mit den Bindewörtern unserer natürlichen Sprache gleichsetzen.

2.4 Boolesche Algebra

Nicht nur in der Aussagenlogik können aus einfachen Aussagen komplexere zusammengesetzt werden. Gleiches gilt für die Boolesche Algebra, die die Grundlage für den Entwurf von elektronischen Schaltungen bis hin zu Computern bildet. Diese wurde nach George Boole benannt, den wir bereits als Begründer der mathematischen Logik kennengelernt haben, und der in seinem Logikkalkül zum ersten Mal Methoden der Algebra in der Aussagenlogik anwandte. Mithilfe der Booleschen Algebra lassen sich elektronische Schaltungen beschreiben, entwickeln und optimieren. Wie diese Schaltungen technisch realisiert werden, schauen wir uns in Kap. 3 dieses Buches genauer an. Bleiben wir zunächst auf der Logikebene.

Genau wie die Aussagenlogik kennt auch die Boolesche Algebra nur die beiden Zustände „wahr“ und „falsch“, die den binären Werten „1“ und „0“ entsprechen. Gut so, denn Computer „sprechen“ Binär-Code, können also nur Informationen verstehen und verarbeiten, die sich aus den Zahlen 0 und 1 zusammensetzen. Bei elektronischen Schaltungen entsprechen diese beiden Werte den Spannungszuständen „Strom fließt“ (1) und „Strom fließt nicht“ (0).

2.4.1 Boolesche Operatoren

Die drei Grundverknüpfungen, aus denen sich in der Booleschen Algebra alle anderen Verknüpfungen zusammensetzen lassen, bilden die uns schon bekannten Junktoren UND, ODER und NICHT. Sie werden auch als Boolesche Operatoren bezeichnet. Zusätzlich zu diesen logischen Operatoren soll im Folgenden die Implikation – auch WENN-DANN-Verknüpfung genannt – vorgestellt werden, da sie für die Lösung unseres Einstiegsrätsels von Bedeutung ist und zu den wichtigsten logischen Verknüpfungen gehört.

Insgesamt existieren für zwei Variablen A und B, die die Werte „wahr“ oder „falsch“ annehmen können, 16 unterschiedliche Verknüpfungsmöglichkeiten. Warum gerade 16? Dies lässt sich wie folgt herleiten: Zunächst gibt es für die zwei Variablen vier verschiedene Kombinationen: wahr und wahr, wahr und falsch, falsch und wahr, falsch und falsch. Diese Kombinationsmöglichkeiten können ihrerseits wieder zwei verschiedene Ergebnisse haben, entweder sie sind wahr oder falsch. Daraus ergeben sich für die vier Kombinationen insgesamt 16 unterschiedliche Ergebniskonstellationen. Verwirrt? Dann nehmen Sie sich doch Stift und Zettel zur Hand und probieren es selbst aus: Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten finden Sie, die vier Felder der Tab. 2.1 mit den zwei Werten „wahr" oder „falsch" auszufüllen?

Die Anzahl der Verknüpfungsmöglichkeiten lässt sich übrigens auch mit der Formel 2^n berechnen. Das n steht dabei für die möglichen Kombinationen der Eingangsvariablen, der Wert 2 für die immer gleichbleibende Anzahl der aus den Kombinationen ableitbaren Ergebnisse.

Neben den bereits erwähnten Operatoren UND, ODER, NICHT und WENN-DANN gibt es also noch 12 andere Boolesche Verknüpfungen. Weitere für die Digitaltechnik wichtige Verknüpfungen, die sich allerdings aus den drei Grundoperatoren zusammensetzen lassen, sind die NICHT-UND-Verknüpfung – die Negation einer UND-Verknüpfung – und die NICHT-ODER-Verknüpfung – die Negation einer ODER-Verknüpfung. Die logischen Verknüpfungen werden auch als Boolesche Funktionen bezeichnet, bei deren Veranschaulichung uns Wertetabellen helfen. Mit ihnen lassen sich die Wahrheitswerte der Ausdrücke, die durch Boolesche Operatoren verknüpft sind, bestimmen.

UND-Verknüpfung (Konjunktion)

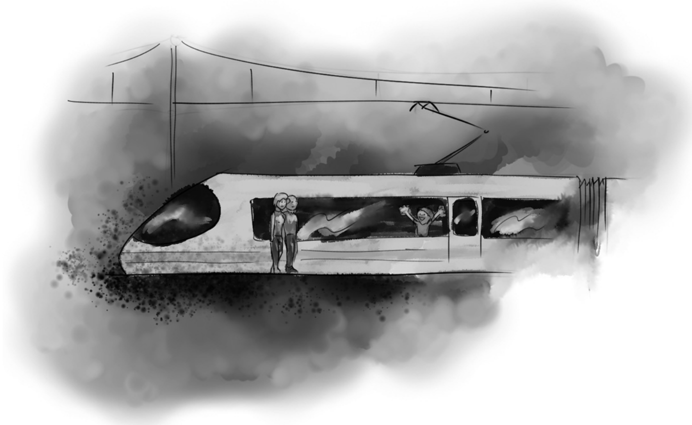
Die UND-Verknüpfung, auch Konjunktion genannt, deckt sich im Großen und Ganzen mit dem Gebrauch des Bindewortes „und" in unserer natürlichen Sprache. Die Behauptung, dass Berlin eine Stadt mit mehr als drei Millionen Einwohnern ist, kann nur dann richtig sein, wenn die beiden Aussagen „Berlin ist eine Stadt" *und* „Berlin hat mehr als drei Millionen Einwohner" wahr sind. Ein weiteres Beispiel für eine UND-Verknüpfung: „Wenn ich mir den Brückentag freinehmen kann *und* ein günstiges Bahnticket bekomme, besuche ich meine Eltern über Himmelfahrt." Meine Eltern können sich also nur über einen Besuch von mir freuen, wenn sowohl mein Arbeitgeber als auch die Deutsche Bahn mitspielen.

Symbolisiert wird die UND-Verknüpfung durch ein $\wedge$. Ein Blick in die Wertetabelle (Tab. 2.2) zeigt: Die Aussage $A \wedge B$ (gesprochen

Tab. 2.1 Boolesche Verknüpfungen

	A = wahr	A = falsch
B = wahr	*wahr o. falsch*	*wahr o. falsch*
B = falsch	*wahr o. falsch*	*wahr o. falsch*

„A und B“) ist nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind. Schon bei einer falschen Teilaussage ist die gesamte Aussage falsch.



ODER-Verknüpfung (Disjunktion)
Kleine Wiederholung: Das Bindewort „oder“ besitzt in der Umgangssprache zwei verschiedene Lesarten: zum einen im Sinne von „und/oder“, wie in der Aussage „Die Wohnung ist nicht für Personen mit Kindern oder Haustieren geeignet“, zum anderen in der Bedeutung von „entweder, oder“: „*Entweder* gehe ich heute Abend noch unter die Dusche *oder* erst morgen früh“. Es ist also Vorsicht geboten, denn die logische ODER-Verknüpfung entspricht lediglich der ersten Bedeutung, ist also im Sinne von „und/oder“ zu verstehen und wird daher auch als „nicht-ausschließendes oder“ bezeichnet. Daneben gibt es die ENTWEDER-ODER-Verknüpfung, die der zweiten Lesart entspricht.

Tab. 2.2 Wertetabelle UND-Verknüpfung

A	B	$A \wedge B$
falsch (0)	falsch (0)	falsch (0)
falsch (0)	wahr (1)	falsch (0)
wahr (1)	falsch (0)	falsch (0)
wahr (1)	wahr (1)	wahr (1)

Springer
http://www.springer.com/978-3-662-53059-7

Computer
Wie funktionieren Smartphone, Tablet & Co.?
Drechsler, R.; Fink, A.; Stoppe, J.
2017, VIII, 126 S. 22 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-53059-7