

Aufbau der Atomkerne

2

2.1	Untersuchungsmethoden	10
2.2	Ladung, Größe und Masse der Kerne	11
2.3	Massen- und Ladungsverteilung im Kern	13
2.4	Aufbau der Kerne aus Nukleonen; Isotope und Isobare	18
2.5	Kerndrehimpulse, magnetische und elektrische Momente	19
2.6	Bindungsenergie der Kerne	24
	Zusammenfassung	31
	Aufgaben	31
	Literaturverzeichnis	32

Bevor wir in Kap. 4 die in der Kern- und Hochenergiephysik verwendeten Geräte und experimentellen Methoden ausführlich diskutieren, wollen wir die grundlegenden Ergebnisse der bisher durchgeführten Experimente und die daraus resultierenden Vorstellungen über den Aufbau der Kerne und die elementaren Bausteine der Materie kurz behandeln. Dadurch können experimentelle Details und die Zielsetzung der Experimente besser verstanden werden.

2.1 Untersuchungsmethoden

Wie in der gesamten Mikrophysik sind auch in Kern- und Elementarteilchenphysik die beiden wesentlichen Untersuchungsmethoden *Streumessungen* und *Spektroskopie*. Unsere Kenntnisse über die Kernstruktur und die verschiedenen Wechselwirkungen basieren entweder auf der elastischen, inelastischen oder reaktiven Streuung von Kernen oder Elementarteilchen bei Zusammenstößen von Teilchen oder auf spektroskopischen Messungen der Energierterme stationärer Kernzustände sowie der Intensitäten, der Polarisation und der Winkelverteilung von Strahlung, die bei Übergängen zwischen diesen Energiertermen ausgesandt wird.

Bei allen Streuversuchen wird ein kollimierter Strahl von Teilchen der Energie $E_0 = mv_0^2/2$ mit der Teilchendichte n [m⁻³] und der Teilchenflussdichte

$$\Phi = n \cdot v_0 \quad \text{mit} \quad [\Phi] = 1/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$$

auf die zu untersuchenden *Target*-Kerne mit der Teilchendichte n_T in einem definierten Target-Volumen $V = F \cdot \Delta x$ mit Querschnittsfläche F und Dicke Δx geschossen (Abb. 2.1). Auf die Querschnittsfläche F treffen dann $N = \Phi \cdot F$ Teilchen pro Sekunde.

Bei der *elastischen Streuung* wird der Bruchteil

$$\frac{\Delta N}{N} = f(\vartheta, E_0) \Delta \Omega \quad (2.1)$$

mit

$$f(\vartheta, E_0) = \frac{n_T}{F} \cdot V \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta, E_0)$$

der einfallenden Teilchen gemessen, der von den Targetkernen unter einem Winkel ϑ in den Raumwinkel $\Delta \Omega$ abgelenkt wird.

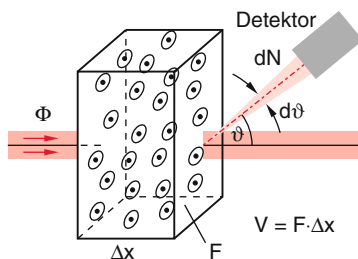


Abbildung 2.1 Prinzip der Messung differentieller Streuquerschnitte

Der differentielle Streuquerschnitt ($d\sigma/d\Omega$) gibt den Beitrag eines Targetkerns zur Streuung um den Winkel ϑ in den Raumwinkel $\Delta \Omega = 1$ sr an. Er hängt außer vom untersuchten Target auch von der Einfallenergie E_0 der auf das Target treffenden Teilchen ab. Bei den Messungen wird entweder der gemessene Ablenkwinkel ϑ , die Energie E_0 der einfallenden Teilchen oder auch beides variiert.

Als einfallende Teilchen können verwendet werden:

- Elektronen, die mit dem Kern nur über elektromagnetische und schwache Kräfte wechselwirken;
- Neutronen, die nur starke Wechselwirkung spüren;
- geladene schwere Teilchen wie Protonen oder α -Teilchen, die sowohl durch die starke als auch durch die elektromagnetische Wechselwirkung beeinflusst werden.

Bei der *inelastischen Streuung*, bei der ein Teil der kinetischen Energie der Stoßpartner in innere Energie umgewandelt wird, kann zusätzlich noch der Energieverlust des gestreuten Teilchens oder die entsprechende Anregungsenergie des Targetkerns bestimmt werden.

Bei der *reaktiven Streuung* bleibt die Identität von gestreutem Teilchen oder Target nicht erhalten. Entweder wird der Targetkern in einen anderen Kern umgewandelt (*künstliche Kernumwandlung*), oder es können ganz neue Teilchen erzeugt werden, wenn die Energie der Stoßpartner dazu ausreicht. Dieser letzte Prozess wird in der Hochenergiephysik auch *tief-inelastische Streuung* genannt.

Die *spektroskopischen Methoden* verwenden:

- Messungen der Energierterme der Elektronenhülle. Gegenüber den Termwerten im Coulombfeld einer Punktladung verschieben sich die Energierterme der Hüllenelektronen, wenn der Kern ein elektrisches Quadrupolmoment oder ein magnetisches Dipolmoment hat (*Hyperfeinstruktur*, siehe Bd. 3, Abschn. 5.6).
- Messungen der Termdifferenzen in „exotischen Atomen“, bei denen ein Elektron der Hülle durch ein Myon μ^- oder ein anderes schweres, negativ geladenes Teilchen (π^- -Meson, K^- -Meson) ersetzt ist, dessen Bohr'scher Bahnradius für das Myon um den Faktor $m_\mu/m_e \approx 200$, für das K^- -Meson sogar 870-mal kleiner ist als in normalen Atomen. Das Myon und erst recht das K^- -Meson hält sich daher sehr nahe am Kern auf, bei schweren Kernen sogar überwiegend innerhalb des Kerns, und seine Energierterme sind deshalb sehr stark von der Ladungsverteilung im Kern abhängig (siehe Bd. 3, Abschn. 6.7).
- Messung der Photonenenergie $h \cdot \nu$ elektromagnetischer Strahlung, die von angeregten Kernniveaus emittiert wird (γ -Strahlung, Abb. 2.2a).
- Messung der Energieverteilung von Teilchen, die von instabilen Kernen emittiert werden (z. B. Elektronen oder α -Strahlung, Abb. 2.2b).

Alle diese Methoden liefern komplementäre Informationen über Kernstruktur, Anregungsenergien und charakteristische Eigenschaften der den Kern bildenden elementaren Teilchen, wie weiter unten im Detail diskutiert werden soll. Man findet eine genaue Darstellung vieler solcher historischer Experimente in

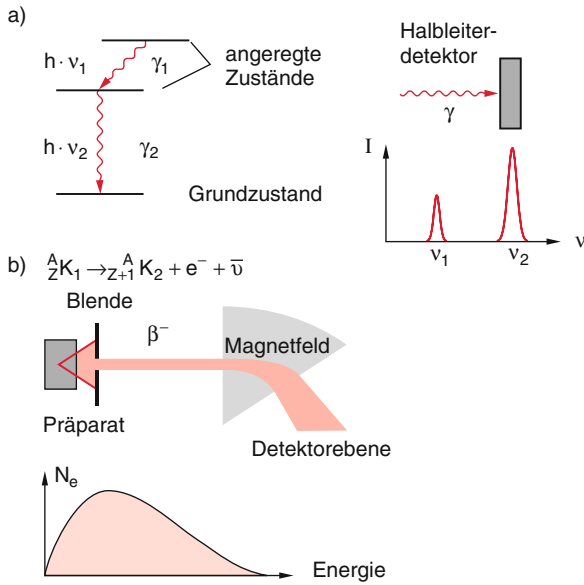


Abbildung 2.2 Spektroskopie von Energiezuständen im Kern **a** durch Messung der Photonenenergie der emittierten γ -Strahlung; **b** durch Messung der Energieverteilung von Elektronen bei der β -Emission radioaktiver Kerne

dem sehr empfehlenswerten Buch von *Bodenstedt* [1] oder in [2].

2.2 Ladung, Größe und Masse der Kerne

Die **Ladung** der Atomkerne konnte bereits aus den Rutherford'schen Streuversuchen (siehe Bd. 3, Abschn. 2.8) abgeschätzt werden. Aus der Messung des differentiellen Wirkungsquerschnitts

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\vartheta} = \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} \quad (2.2)$$

für die elastische Streuung von Teilchen der Energie E_0 und der Ladung $Z_2 \cdot e$ im Coulombfeld des Kerns mit der Ladung $Z_1 \cdot e$ kann die Ladung des Kerns erhalten werden.

Eine wesentlich genauere Bestimmung der Kernladung wurde möglich durch systematische Messungen der Frequenzen der Röntgen- K_α -Linien, die ab 1913 von *Moseley* im Labor von *Rutherford* für viele chemische Elemente durchgeführt wurden. Wie in Bd. 3, Abschn. 7.6 gezeigt, gilt das **Moseley'sche Gesetz**

$$\bar{\nu} = Ry(Z - S)^2 (1/n_1^2 - 1/n_2^2) \quad (2.3)$$

für die Wellenzahl $\bar{\nu} = 1/\lambda$ von Röntgenübergängen zwischen atomaren Niveaus mit den Hauptquantenzahlen n_1 und n_2 , die erfolgen, wenn z. B. durch Elektronenstoß ein Elektron aus der unteren Schale entfernt wurde. Ry ist die Rydberg-Konstante. Die effektive Kernladung $(Z - S)e$ wird durch den Abschirmungsfaktor S der inneren Elektronen bestimmt (siehe Bd. 3,

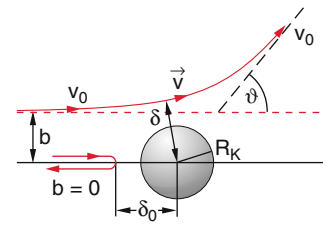


Abbildung 2.3 Zur Herleitung von (2.6)

Abschn. 6.1). Bei Übergängen in den $1s$ -Zustand mit $n_1 = 1$ ist die durch das verbleibende $1s$ -Elektron abgeschirmte effektive Kernladung in guter Näherung $(Z - 1)e$, d. h. $S \approx 1$.

Auch über die **Größe** der Kerne konnte bereits *Rutherford* aufgrund von Streuversuchen Abschätzungen machen [3]. Er nahm an, dass die bei großen Streuwinkeln beobachtete Abweichung der Winkelverteilung $N(\vartheta)$ der gestreuten α -Teilchen von dem bei reiner Coulomb-Abstoßung erwarteten differentiellen Wirkungsquerschnitt (2.2) auf den Einfluss kurzreichweitiger, anziehender Kernkräfte zurückzuführen sei. Allerdings konnte er dies wegen der beschränkten kinetischen Energie von α -Teilchen aus radioaktiven Quellen nur für leichte Kerne untersuchen. Spätere, genauere Messungen von *Wegener* und Mitarbeitern [4] an schweren Kernen benutzten 40 -MeV- α -Teilchen aus Beschleunigern.

Solange das Coulomb-Gesetz gilt, erhält man bei der kleinsten Entfernung δ des Projektils vom Zentrum des streuenden Kerns für kinetische Energie und Drehimpuls die Relationen

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \delta} \quad (\text{Energiesatz}), \quad (2.4a)$$

$$m \cdot b \cdot v_0 = m \cdot \delta \cdot v \quad (\text{Drehimpulserhaltungssatz}), \quad (2.4b)$$

wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und b der Stoßparameter des einfallenden Teilchens ist (Abb. 2.3). Beim zentralen Stoß ($b = 0$) lässt sich der kleinste Abstand δ_0 , bei dem dann $v = 0$ wird, sofort aus der Gleichung

$$\frac{m}{2} v_0^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 \delta_0} \quad (2.4c)$$

bestimmen. Setzt man (2.4c) in (2.4a) ein, so erhält man für den allgemeinen Fall $b \neq 0$

$$mv^2 = mv_0^2 (1 - \delta_0/\delta)$$

und durch Quadrieren von (2.4b):

$$m^2 v_0^2 b^2 = m^2 v^2 \delta^2 = m^2 v_0^2 \delta^2 (1 - \delta_0/\delta). \quad (2.4d)$$

Daraus folgt der Zusammenhang zwischen Stoßparameter b und kleinstem Abstand δ :

$$b^2 = \delta^2 - \delta \delta_0. \quad (2.5)$$

In Bd. 3, Abschn. 2.8.6 hatten wir für die Streuung in einem Coulomb-Potential die Relation

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \cot(\vartheta/2) = \frac{\delta_0}{2} \cot(\vartheta/2)$$

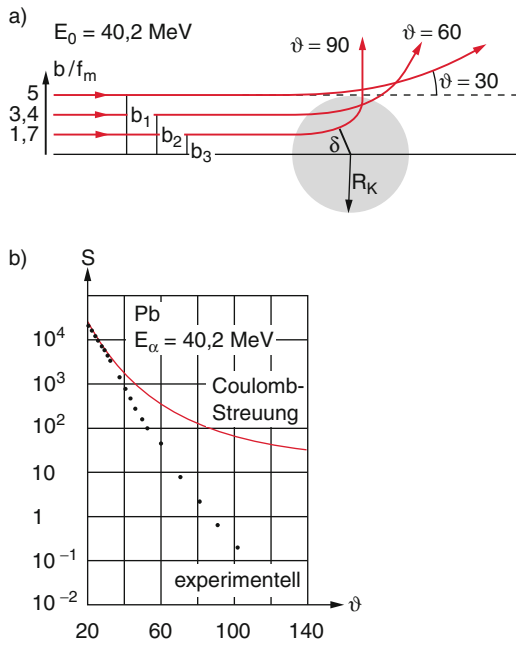


Abbildung 2.4 Streuung von α -Teilchen mit fester Anfangsenergie $E = 40,2$ MeV. **a** Anschauliche Darstellung der Abhängigkeit $b(\vartheta) \rightarrow \vartheta(\delta)$. **b** Vergleich experimenteller Streuraten S bei der Streuung von α -Teilchen an Bleikernen mit der berechneten Coulomb-Streuung [4]

zwischen Stoßparameter b und Ablenkwinkel ϑ hergeleitet. Setzt man dies in (2.5) ein, so ergibt sich schließlich für den kleinsten Abstand derjenigen Teilchen, die um den Winkel ϑ abgelenkt werden:

$$\delta = \frac{\delta_0}{2} \left[1 + \frac{1}{\sin(\vartheta/2)} \right]. \quad (2.6)$$

Was für $\vartheta = 180^\circ$ (Rückwärtsstreuung) wieder den kleinen Abstand $\delta = \delta_0$ für zentrale Stöße ergibt. Unter Streubedingungen, bei denen minimale Abstände $\delta \leq \delta_k$ unterhalb eines kritischen Abstandes δ_k erreicht werden, beobachtet man eine Abweichung der Streuverteilung von (2.2). Man kann diesen kritischen Abstand δ_k als die Reichweite der Kernkräfte interpretieren und in einem ersten groben Modell δ_k gleich dem Kernradius R_K setzen.

Anmerkung. Die Abweichung von der Coulomb-Streuung wird nicht nur von den Kernkräften verursacht, sondern auch durch die endliche Ausdehnung des Atomkerns. Zur Coulomb-Streuung trägt nur die Ladung innerhalb des Radius $r < \delta$ bei.

Bei fester Einschussenergie E_0 der α -Teilchen wird man also solche Abweichungen beobachten für Streuwinkel $\vartheta \geq \vartheta_k$, bei denen $\delta(\vartheta) \leq R_K$ wird (Abb. 2.4), während bei festem Streuwinkel ϑ diese Abweichung für Energien E oberhalb einer kritischen Energie E_k auftreten, für die $\delta(E) \leq R_K$ wird (Abb. 2.5).

Die Auswertung solcher Streumessungen, die 1920 für eine Reihe von Elementen von *J. Chadwick*, einem Schüler *Rutherfords*,

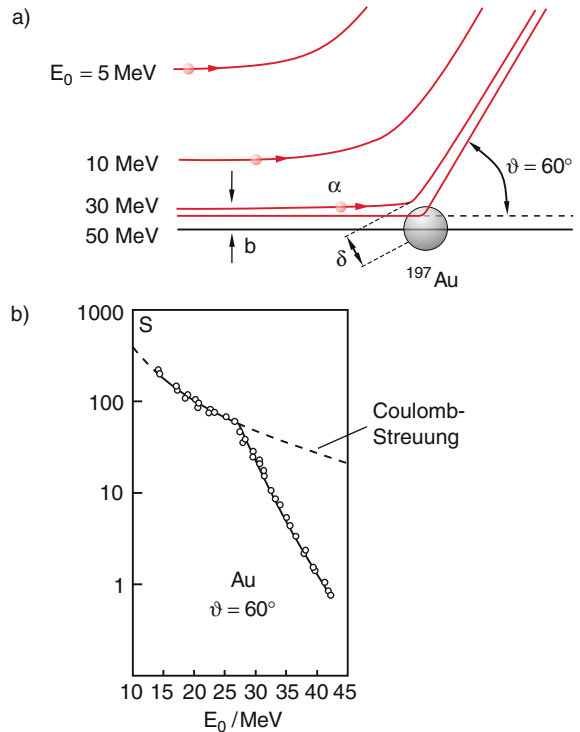


Abbildung 2.5 Streuung von α -Teilchen an Goldkernen bei festem Streuwinkel ϑ . **a** Bahn der α -Teilchen bei verschiedenen Einschussenergien; **b** gemessene Streuraten [5]

begonnen und später von vielen Experimentatoren mit größerem Aufwand und höherer Genauigkeit durchgeführt wurden, ergaben Werte für die Kernradien

$$R_K \approx r_0 \cdot A^{1/3}, \quad (2.7)$$

die in erster Näherung proportional zur dritten Wurzel aus der Atommassenzahl A sind, wobei für leichte Kerne für die Konstante r_0 der Wert

$$r_0 = (1,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad (2.8)$$

gefunden wurde, während für mittelschwere bis zu sehr schweren Kernen r_0 im Wertebereich $0,94 \text{ fm} \leq r_0 \leq 1,25 \text{ fm}$ liegt (Tab. 2.1). Da die Kerndimensionen die Größenordnung 10^{-15} m haben, benutzt man in der Kernphysik häufig die Längeneinheit

$$1 \text{ Fermi} = 1 \text{ Femtometer} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}.$$

Typische Kerndurchmesser liegen daher bei einigen Fermi und sind damit etwa 10^5 -mal kleiner als die Atomdurchmesser. Das Kernvolumen ist damit 10^{15} -mal kleiner als das Atomvolumen!

Die **Massen der Kerne** werden, wie in Bd. 3, Abschn. 2.7 ausführlich behandelt wurde, mit Hilfe von Massenspektrometern gemessen. Sie werden in Einheiten der atomaren Masseneinheit 1 AME ($= \frac{1}{12}M(^{12}_6\text{C})$) angegeben [im Englischen 1 AMU (atomic mass unit)]. Da bei dieser Methode aus dem Verhältnis e/M von Ladung und Masse bei bekannter Ladung e die Masse M^+ des einfach geladenen Ions bestimmt wird, erhält man die Kernmasse M_K aus

$$M_K = M^+ - [(Z - 1)m_e - E_B^{\text{el}}/c^2], \quad (2.9)$$

wobei E_B^{el} die Bindungsenergie der $(Z - 1)$ Elektronen des Ions ist, welche bei leichten Elementen vernachlässigt werden kann.

Die Entwicklung von hochauflösenden doppeltfokussierenden Massenspektrometern hat zu einer sehr genauen Bestimmung der Massen aller stabilen Kerne geführt.

Eine weitere Methode zur Massenbestimmung beruht auf der Messung der Absorptionsfrequenzen $\nu(J)$ von Rotationsübergängen in Molekülen zwischen den Rotationsniveaus mit den Rotationsquantenzahlen J und $J + 1$ und den Energien $E(J) = h \cdot c [B_v J(J + 1) - D_v J^2(J + 1)^2]$ (siehe Bd. 3, Abschn. 9.5), aus denen das Trägheitsmoment eines zweiatomigen Moleküls bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt gemäß der Gleichung

$$\begin{aligned} \nu(J) &= [E(J + 1) - E(J)]/h \\ &= 2c \cdot [B_v(J + 1) - D_v(J + 1)^3] \end{aligned}$$

für die Frequenz eines Rotationsüberganges ermittelt werden kann. Dabei sind die Molekülkonstanten definiert als

$$B_v = \frac{\hbar}{4\pi\mu c \langle R \rangle^2}, \quad D_v = \frac{\hbar^3}{4\pi\mu^2 c \cdot k \langle R \rangle^6},$$

$$k = \frac{\partial E_{\text{pot}}/\partial R}{R - \langle R \rangle}$$

mit der reduzierten Masse $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$, und $\langle R \rangle$ ist der über die Molekülschwingung gemittelte Abstand der beiden Kerne im Molekül. Die Konstante k gibt die Größe der Rückstellkraft $F_r = -\partial E_{\text{pot}}/\partial R = k \cdot (R - \langle R \rangle)$ bei Auslenkung aus der Ruhelage $R = \langle R \rangle$ an.

Wird einer der Kerne durch ein anderes Isotop ersetzt, so ändert sich das Trägheitsmoment, aber nicht der Kernabstand R , sodass aus der Frequenzänderung des Rotationsüberganges die Massen M_1, M_2 bestimmt werden können.

Aus der Abhängigkeit $R_K \approx r_0 A^{1/3}$ des Kernradius R_K von der Massenzahl A folgt, dass die Massendichte

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{M}{V} = \frac{A \cdot \text{AME}}{\frac{4}{3}\pi R_K^3} \quad (\text{AME} = \text{atomare Masseneinheit}) \\ &= \frac{1,66 \cdot 10^{-27}}{\frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3} \approx 10^{17} \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

der Kerne näherungsweise *unabhängig von der Massenzahl A* der Atome ist und den unvorstellbar großen Wert von $\rho_m \approx 10^{17} \text{ kg/m}^3$ hat.

Ein cm^3 Kernmaterie wiegt demnach 10^8 Tonnen! Man vergleiche dies mit 1 cm^3 Blei, dessen Masse $11,3 \text{ g}$ beträgt.

2.3 Massen- und Ladungsverteilung im Kern

In dem groben Kernmodell des vorigen Abschnitts wurde der Kern als homogene Kugel mit scharfem Rand angesehen, wobei der Radius R_K dieser Kugel als der größte Wert des Minimalabstands δ der Stoßpartner betrachtet wurde, bei dem eine Abweichung von der Coulombstreuung festgestellt werden konnte.

In Wirklichkeit werden jedoch die Kernkräfte trotz ihrer kleinen Reichweite nicht plötzlich auf null absinken, d. h. der Kernrand kann nicht unendlich scharf sein, und sowohl die Massendichte $\rho_m(r)$ als auch die Ladungsdichte ρ_e werden im Allgemeinen monoton fallende Funktionen des Abstandes r vom Kernzentrum sein.

Außerdem wird die Abweichung von der Winkelverteilung der Coulombstreuung für $\delta < R_K$ nicht nur durch den Einfluss der Kernkräfte verursacht, sondern es spielen auch Beugungseffekte bei der Beugung eines Projektils mit der de-Broglie-Wellenlänge λ am Kern mit Radius R_K eine Rolle. Um die Kernstruktur genauer abtasten zu können, braucht man Sonden mit einer de-Broglie-Wellenlänge $\lambda \ll R_K$. In diesem Fall beobachtet man aufgrund von Beugungseffekten Maxima und Minima in der gemessenen Streuverteilung

$$\Delta N(\vartheta) d\vartheta = (d\sigma/d\Omega) n_T \cdot N_0 \cdot V \cdot \Delta\Omega$$

(Abb. 2.6). Aus der Lage und Form dieser Beugungsmaxima und -minima lassen sich Rückschlüsse auf den Potentialverlauf $V(r)$ zwischen den Stoßpartnern und damit Massen- bzw. Ladungsverteilung im Targetkern ziehen (siehe Abschn. 2.3.2). Da die de-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}}$$

der Projektilteilchen mit zunehmender Energie E_{kin} abnimmt, müssen als Sonden Teilchen genügend hoher Energie verwendet werden.

Beispiele

1. α -Teilchen mit $E_{\text{kin}} = 10 \text{ MeV}$ haben eine de-Broglie-Wellenlänge $\lambda \approx 1,6 \text{ Fermi}$.
2. Elektronen mit $E_{\text{kin}} = 500 \text{ MeV}$: $\lambda = 0,4 \text{ Fermi}$. ◀

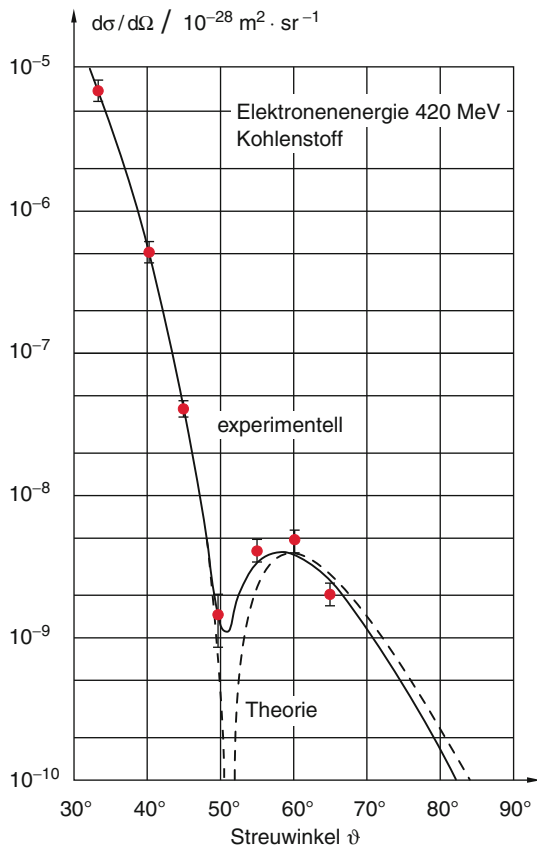


Abbildung 2.6 Beugungseffekte, sichtbar in der Winkelverteilung elastisch gestreuter Elektronen an Kohlenstoffkernen durch das deutlich erkennbare Beugungsminimum [6]

Werden α -Teilchen als Projektile verwendet, so wirken sowohl Coulombkräfte als auch Kernkräfte, und die Streuverteilung hängt von Ladungs- und Massenverteilung ab. Bei schnellen Elektronen als Projektile wird im Wesentlichen die *Ladungsverteilung* gemessen, weil Elektronen nicht der starken Wechselwirkung unterliegen (siehe Abschn. 7.3).

Um die *Massenverteilung* ohne Beeinflussung durch die Ladungsverteilung zu bestimmen, werden schnelle Neutronen verwendet, was allerdings experimentell wesentlich schwieriger zu realisieren ist.

In jedem Fall müssen für Kernstrukturuntersuchungen *schnelle* Teilchen mit genügend hohen Energien verwendet werden, die durch Beschleuniger erreicht werden können (Kap. 4).

Wie wir schon in der Atomphysik gesehen haben, (Bd. 3, Abschn. 2.8), kann man aus Streumessungen nicht direkt das Wechselwirkungspotential, das durch die Massendichteverteilung $\rho_m(r)$ bzw. die Ladungsdichteverteilung $\rho_e(r)$ sowie durch die Art der Wechselwirkungskräfte festgelegt ist, bestimmen. Um $\rho_m(r)$ oder $\rho_e(r)$ zu ermitteln, muss man eine Modellverteilung mit freien Parametern annehmen, aus ihr die Streuverteilung berechnen und dann die Parameter so lange variieren, bis die gerechnete mit der gemessenen Streuverteilung übereinstimmt (Abb. 2.7).

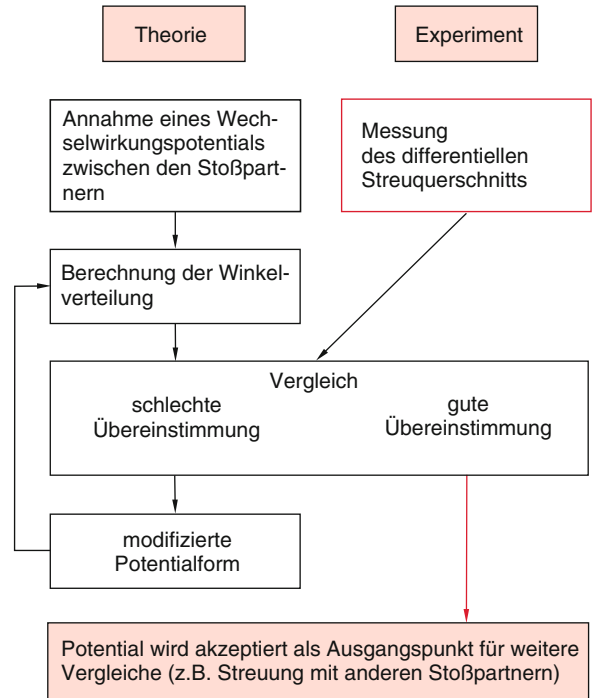


Abbildung 2.7 Flussdiagramm zur Bestimmung von Wechselwirkungspotentialen aus Streumessungen. Nach T. Mayer-Kuckuk: *Kernphysik* (Teubner, Stuttgart 2002)

2.3.1 Massendichteverteilung

Meistens wird für die Massendichteverteilung $\rho(r)$ eine Fermi-Verteilung

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + e^{(r-R_{1/2})/a}} \quad (2.11)$$

angenommen, die für $r = R_{1/2}$ auf die halbe Dichte bei $r = 0$ abgesunken ist (Abb. 2.8). Die Größe a ist ein Maß für die Dicke der Randzone. Im Randbereich $r = R_{1/2} - 2,2a$ bis $r = R_{1/2} + 2,2a$ nimmt die Dichte von $0,9\rho_0$ auf $0,1\rho_0$ ab. Wir definieren diesen Bereich als **Randschichtdicke** $d = 4,4a$.

Aus Streumessungen lässt sich direkt nur der *mittlere* quadratische Kernradius

$$R_m^2 = \langle r^2 \rangle = \frac{1}{M_K} \int_0^\infty r^2 \cdot \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr \quad (2.12)$$

der Dichteverteilung $\rho(r)$ bestimmen (siehe Tab. 2.1).

Für eine homogene Kugel mit Radius R_K und konstanter Massendichte ρ wird wegen $M = 4\pi\rho \int r^2 dr$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^{R_K} r^4 dr}{\int_0^{R_K} r^2 dr} = \frac{3}{5} R_K^2 \quad (2.13)$$

Beschreibt man den realen Kern näherungsweise durch eine Kugel mit konstanter Massendichte, so kann man den Radius R_K

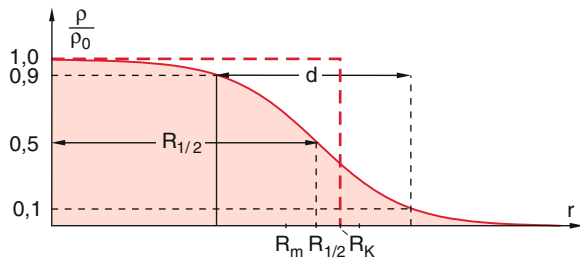


Abbildung 2.8 Radiale Fermi-Verteilung $\rho_m(r)$ der Massendichte im Kern

Tabelle 2.1 Mittlerer Radius $R_m = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$, Halbwertsradius $R_{1/2}$, äquivalenter Kugelradius R_K und $R_K/A^{1/3}$ sowie Randschichtdicke d einiger Kerne. Alle Größen sind in $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ angegeben. Aus Landolt-Börnstein: *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology – New Series: Gruppe I*. Begründet von H. Landolt; R. Börnstein (Hrsg.): Bd. 2. *Kernradien*. H. Schopper (Hrsg.). R. Hofstadter und H.R. Collard, S. 30 ff.

Kern	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$	$R_{1/2}$	R_K	$R_K/A^{1/3}$	d
^1_1H	0,80	1,03	1,03	1,03	–
^2_1D	2,17		2,80	2,22	
^4_2He	1,67	1,33	2,16	1,36	1,4
$^{12}_6\text{C}$	2,58	2,3	3,3	1,36	1,9
$^{16}_8\text{O}$	2,75	2,70	3,5	1,4	1,8
$^{24}_{12}\text{Mg}$	2,98	2,85	3,8	1,33	2,6
$^{40}_{20}\text{Ca}$	3,50	3,58	4,5	1,32	2,5
$^{197}_{79}\text{Au}$	5,32	6,38	6,87	1,18	1,3

des Kern-Kugelmodells als

$$R_K = \sqrt{\frac{5}{3} \langle r^2 \rangle} \quad (2.13a)$$

definieren (Abb. 2.8).

Bei konstanter Massendichte $\rho_m = \rho_0$ kann man den **Äquivalentradius** R_S definieren durch die Normierung

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \pi \rho_0 \cdot R_S^3 &= M_K \Rightarrow R_S = \left(\frac{3M_K}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} \\ &= r_0 \cdot A^{1/3} \\ \text{mit } r_0 &\approx 0,94\text{--}1,3 \text{ fm} . \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Mit den experimentell gefundenen Massenverteilungen lassen sich drei verschiedene Radien näherungsweise durch die folgenden Relationen beschreiben:

$$R_m = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0,77 \cdot R_K = 1 \cdot A^{1/3} \text{ [fm]} , \quad (2.14a)$$

$$R_K = R_S = \sqrt{\frac{5}{3}} R_m \approx 1,3 \cdot A^{1/3} \text{ fm} , \quad (2.14b)$$

$$R_{1/2} = (0,9\text{--}1,1) \cdot R_m \approx (0,9\text{--}1,1) \cdot A^{1/3} \text{ [fm]} \quad (2.14c)$$

je nach Randschichtdicke d .

Man sieht hieraus, dass die genauen Werte der Kernradien von dem Modell abhängen, durch das die Massen bzw. Ladungsverteilung angenähert wird.

Jedem Nukleon steht im Kern je nach Modell ein mittleres Volumen von $\frac{4}{3}\pi R_m^3/A \approx 4,2 \text{ fm}^3$ bis $\frac{4}{3}\pi R_K^3/A \approx 9 \text{ fm}^3$ zur Verfügung.

2.3.2 Ladungsverteilung im Kern

Im Gegensatz zur Massendichteverteilung $\rho_m(r)$ lässt sich die **Ladungsverteilung** $\rho_c(r)$ im Kern mit wesentlich größerer Genauigkeit bestimmen, wenn man die Streuung von schnellen Elektronen an Kernen misst, weil hier nur die bekannte elektromagnetische Wechselwirkung eine Rolle spielt und die unbekannteren Kernkräfte nicht auf die Elektronen wirken. Deshalb wird die Streuverteilung der Elektronen nur durch die Ladungsverteilung, nicht durch die Massenverteilung im Kern bestimmt.

Solche Streuveruche wurden von *Robert Hofstadter* (Abb. 2.9) und Mitarbeitern am Linearbeschleuniger in Stanford durchgeführt [6–8]. Damit die räumliche Auflösung genügend hoch ist, muss die de-Broglie-Wellenlänge λ der Elektronen klein, d. h. ihre kinetische Energie groß sein. Bei einer Energie von $E = 500 \text{ MeV}$ wird $\lambda = 0,4 \text{ fm}$ und damit klein gegen den Durchmesser größerer Kerne. In Abb. 2.13 weiter unten sind die gemessenen Streuquerschnitte für verschiedene Energien als Funktion des Streuwinkels aufgetragen. Man erkennt, dass mit zunehmender Energie, d. h. abnehmender de-Broglie-Wellenlänge, das erste Beugungsminimum zu immer kleineren Streuwinkeln hin verschoben wird.

Wir wollen uns nun den Zusammenhang zwischen Streuverteilung $\Delta N(\vartheta)$ und Ladungsverteilung $\rho_c(r)$ klar machen: Die Ablenkung eines Elektrons bei Durchqueren der Ladungsverteilung $\rho_c(r)$ hängt ab von dem bei der Streuung übertragenen



Abbildung 2.9 Robert Hofstadter (1915–1990), Nobelpreis 1961. Aus E. Bagge: *Die Nobelpreisträger der Physik* (Heinz-Moos-Verlag, München 1964)

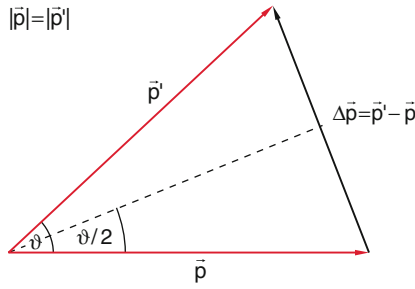


Abbildung 2.10 Impulsänderung Δp eines elastisch gestreuten Teilchens

Impuls

$$\Delta p = p - p' .$$

Bei der elastischen Streuung ist $|p| = |p'|$ und man entnimmt der Abb. 2.10 die Relation

$$\sin(\vartheta/2) = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p}{2mv} . \quad (2.15)$$

Setzt man dies in (2.2) ein, so erhält man wegen $E_0 = p^2/2m$ die Rutherford'sche Streuformel für die Streuung an einer Punktladung (*Coulomb-Streuung*) in der Form

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\vartheta = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2 \cdot m}{\pi \epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\Delta p^4} . \quad (2.16)$$

Wie wird der differentielle Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ nun durch die endlich ausgedehnte Ladungsverteilung modifiziert? Wir beschreiben den einfallenden Elektronenstrahl durch eine ebene Materiewelle. Fällt auf das Volumenelement dV mit der Ladung $dq = \rho_e dV$ und dem Abstand r vom Streuzentrum $r = \mathbf{0}$ die Materiewelle

$$\psi = \psi_0 \cdot e^{i(kr - \omega t)} ,$$

so wird im Beobachtungspunkt P im Abstand R vom Streuzentrum (Abb. 2.11) die Amplitude der von der Ladung $dq(r) = \rho_e dV$ in Richtung k' gestreuten Kugelwelle

$$\begin{aligned} A &= \psi_0 \cdot e^{ikr} \cdot \frac{a}{r'} \cdot e^{ik'r'} \\ &= \frac{a \cdot \psi_0}{r'} e^{i(kr + k'r')} , \end{aligned} \quad (2.17)$$

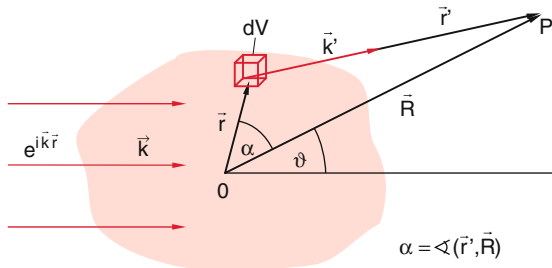


Abbildung 2.11 Zur Streuung einer einfallenden ebenen Welle an einer ausgedehnten kugelsymmetrischen Ladungsverteilung $\rho_e(r)$

wobei der Faktor a von dq und vom Wirkungsquerschnitt für die Streuung abhängt. Nach Abb. 2.11 gilt

$$r = R - r' ,$$

sodass

$$k' \cdot r' = k' \cdot R - k' \cdot r ,$$

wird. Dies ergibt

$$e^{i(kr + k'r')} = e^{ik'R} \cdot e^{i\Delta k r}$$

Für $R \gg r$ wird $r' \approx R$ und k' praktisch parallel zu R , sodass man mit $|k'| = |k| = k$ schreiben kann $e^{ik'R} \approx e^{ikr}$. Aus (2.17) erhält man dann

$$A = \frac{a \cdot \psi_0}{R} \cdot e^{ikR} \cdot e^{i(k-k')r} . \quad (2.18)$$

Integration über alle Volumenelemente der Ladungsverteilung $\rho_e(r)$ ergibt damit die gesamte Streuamplitude

$$A = \frac{a \cdot \psi_0 \cdot e^{ikR}}{R \cdot Q} \int \rho_e(r) \cdot e^{i\Delta k r} dr , \quad (2.19)$$

wobei $dr = dx \cdot dy \cdot dz = dV$ und $Q = \int \rho_e dr = Z \cdot e$ die Kernladung ist (siehe analoge Behandlung in Bd. 3, Abschn. 11.4). Der erste Faktor ist die Kugelwelle, die durch Coulombstreuung an einer Ladung $Z \cdot e$ im Zentrum $r = 0$ erzeugt würde, wenn nur der Atomkern vorhanden wäre, während der zweite Faktor die Modifikation dieser Welle durch die ausgedehnte Ladungsverteilung $\rho_e(r)$ der Elektronenhülle beschreibt. Für den differentielle Wirkungsquerschnitt, der proportional zum Quadrat der Streuamplitude ist, erhält man dann mit

$$a = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \epsilon_0 \cdot |\Delta p|^2} \quad \text{und} \quad \Delta p = \hbar \Delta k$$

statt dem Rutherford'schen Streuquerschnitt (2.16) den modifizierten Ausdruck

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\vartheta &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Coul}} \cdot \left| \int \rho_e(r') \cdot e^{i\Delta k r'} dr' \right|^2 \\ &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Coul}} \cdot |F(\varrho, \Delta k)|^2 , \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei für die Streuung von Elektronen $Z_1 = 1$ ist. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer Ladungsverteilung $\rho_e(r)$ kann also geschrieben werden als Produkt aus zwei Faktoren: Dem *Wirkungsquerschnitt* (2.1) für die Streuung am Coulomb-Potential, d.h. an einer punktförmigen Ladung, und einem *Formfaktor* $|F(\varrho_e(r), \Delta p)|^2$, der von der Ladungsverteilung $\rho_e(r)$ und dem bei der Streuung auf das Elektron übertragenen Impuls $\Delta p = p' - p = \hbar \Delta k$ abhängt. Man sieht aus (2.20), dass der Formfaktor

$$F(\varrho, \Delta k) = \int \rho_e(r) \cdot e^{i\Delta k r} dr \quad (2.21)$$

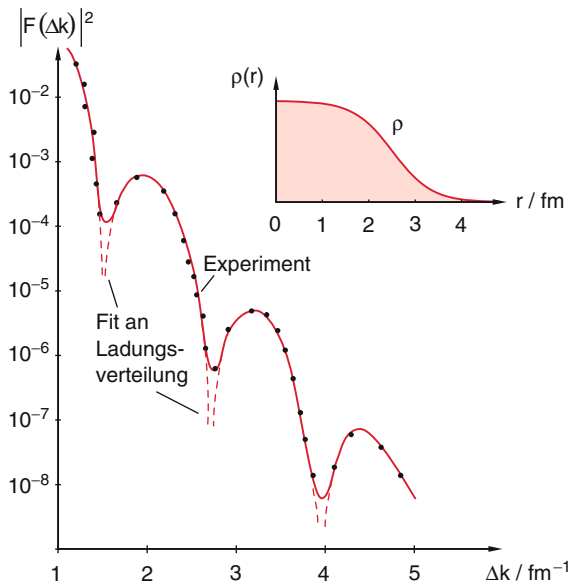


Abbildung 2.12 Abhängigkeit des Formfaktors $|F(\Delta p)|^2$ vom übertragenen Impuls $\Delta p = \hbar \cdot \Delta k$ bei der Streuung von 750 MeV-Elektronen an der Ladungsverteilung $\sigma(r)$ von $^{16}_8\text{O}$ -Kernen. Man beachte die logarithmische Ordinatenskala. Nach G. Musiol, J. Ranft, R. Reif, D. Seeliger: *Kern- und Elementarteilchenphysik* (Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988)

gleich der Fourier-Transformierten der Ladungsverteilung $\rho(r)$ ist. Der Formfaktor $F(\rho_e, \Delta p)$ ist eine mit wachsendem Δp fallende Funktion, die bei genügend hohen Einfallenergien E_0 ausgeprägte Minima hat (Abb. 2.12), die durch Beugungseffekte verursacht werden.

Der differentielle Streuquerschnitt *sinkt* mit zunehmender Energie E_0 der Elektronen, weil

- der erste Faktor in (2.20), der die Coulombstreuung angibt, mit $(1/E_0)^2$ abfällt;
- der Formfaktor $|F(\Delta p)|^2$ mit wachsender Impulsübertragung $\Delta p = \hbar \Delta k$ kleiner wird (Abb. 2.12). Bei festem Streuwinkel ϑ wird Δp nach (2.15) proportional zum Impuls p , d. h. zu $\sqrt{2mE_0}$.

Die Oszillationen in der Kurve $d\sigma/d\Omega(E)$ werden mit wachsender Energie, d. h. sinkender de-Broglie-Wellenlänge, immer deutlicher (Abb. 2.13) und das erste Beugungsmaximum verschiebt sich zu kleineren Streuwinkeln.

Wenn die einfallenden Teilchen durch ihre de-Broglie-Wellenlänge λ_{dB} beschrieben werden, erscheint das erste Minimum in der Winkelverteilung der gestreuten Teilchen für einen Durchmesser D der Streuer beim Winkel ϕ_{min} , für den die Bedingung $\sin \phi_{min} = \lambda_{dB}/D$ gilt, weil es dann im gestreuten Teilbündel immer Paare von Teilchen mit einem Wegunterschied von $\lambda/2$ gibt (siehe Bd. 2, Abschn. 10.5).

In Abb. 2.14 sind die radialen Ladungsverteilungen einiger Kerne, wie sie sich aus den Elektronenstreuversuchen von Hofstadter ergaben, dargestellt.

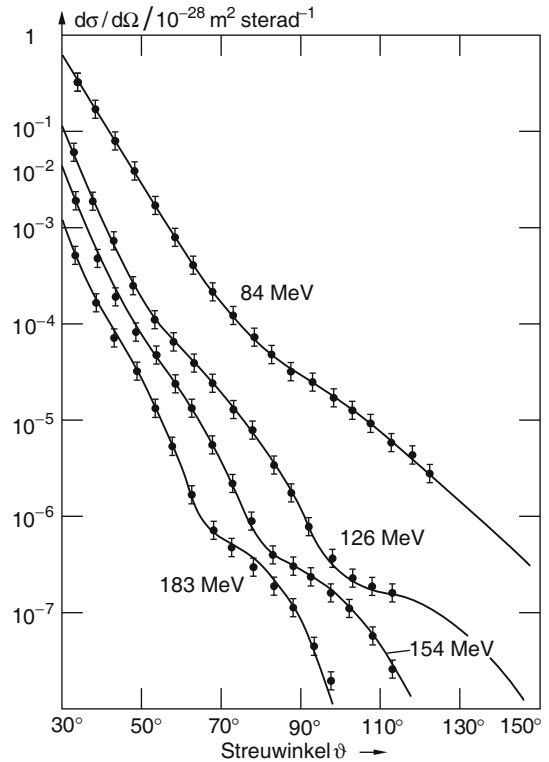


Abbildung 2.13 Experimentelle Kurven für den Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ bei der Streuung von Elektronen an Goldkernen. Nach R. Hofstadter (ed.): *Electron Scattering and Nuclear and Nucleon Structure* (Benjamin New York 1963)

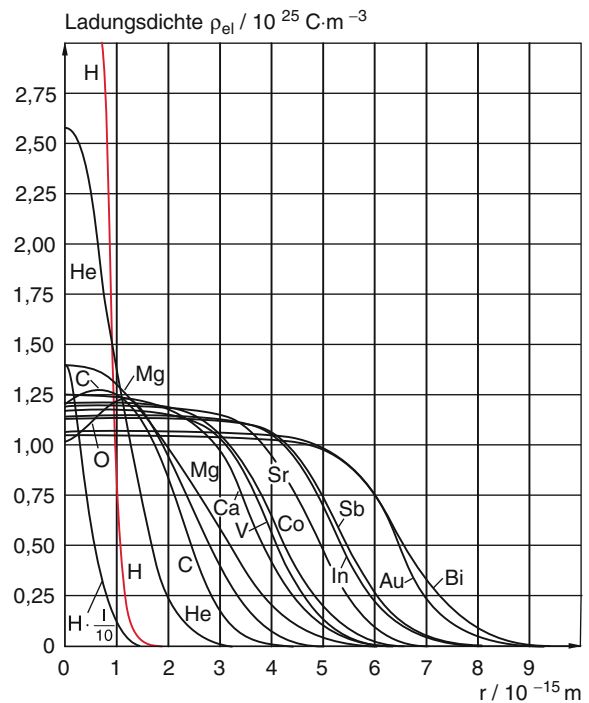


Abbildung 2.14 Radiale Ladungsdichteverteilung einiger Kerne, bestimmt aus Elektronenstreuversuchen. Nach R. Hofstadter: *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **7**, 231 (1957)

Die Experimente zeigen, dass die Ladungsverteilung im Allgemeinen einen anderen radialen Verlauf hat als die Massenverteilung. Dies liegt an der Coulomb-Abstoßung zwischen den Protonen. Es erweist sich ferner, dass die Ladungsverteilung für viele Kerne *nicht* kugelsymmetrisch ist (siehe Abschn. 2.5.2).

Eine wichtige Methode zur Messung der Ladungs- und Massenverteilung ist die spektroskopische Bestimmung der Energierterme „exotischer Atome“. Dies sind Atome, bei denen ein Elektron der Atomhülle durch ein schweres negativ geladenes Teilchen (μ , π , K^-) ersetzt wird (siehe Bd. 3, Abschn. 6.7).

Die Bohr'schen Radien dieser Teilchen mit der Masse m_x sind um den Faktor m_x/m_e kleiner als bei einem Elektron und für die K -Schale schwerer Atome kleiner als die Kernradien, sodass die Energiewerte der stationären Zustände solcher exotischer Atome ganz wesentlich von der Massen- und Ladungsverteilung im Kern abhängen.

Genau spektroskopische Messungen am Paul-Scherrer Institut bei Zürich an Myonischen Atomen bei denen der Bohr-Radius des Myons 200 mal kleiner ist als der des Elektrons, haben überraschenderweise gezeigt, dass der Radius der Ladungsverteilung im Proton kleiner ist, als bisher angenommen. Statt eines Wertes von 0,8768 fm fand man 0,84184 fm [9]. Der Grund für diese Abweichung konnte bisher nicht gefunden werden.

Anmerkung. Bei der Streuung von α -Teilchen an Goldkernen ist der geometrische Wirkungsquerschnitt $\sigma = \pi(r_\alpha + r_{Au})^2$. Man muss also die Kernradien beider Teilchen berücksichtigen. ◀

2.4 Aufbau der Kerne aus Nukleonen; Isotope und Isobare

Als *Rutherford* sein Atommodell aufstellte, kannte man als einzige elementare atomare Bausteine das Elektron und das Proton. Da Messungen der Atommassen und Ladungen ergeben hatten, dass ein Atomkern der Ladung $Z \cdot e$ eine Masse $M \approx A \cdot m_p$ hat, die für schwerere Kerne mehr als doppelt so groß ist wie Z Protonenmassen, wurde die Hypothese aufgestellt, dass die Kerne aus A Protonen der Ladung $+e$ und $(A - Z)$ Neutronen der Ladung $-e$ aufgebaut seien. Diese Hypothese wurde dadurch gestützt, dass man radioaktive Kerne gefunden hatte, die Elektronen aussenden (β^- -Strahler). Sie kann aber durch folgende Argumente und Beobachtungen widerlegt werden:

- Wenn Elektronen Bestandteile stabiler Kerne wären, würde ihre räumliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit auf das Kernvolumen beschränkt sein. Nach der Heisenberg'schen Unschärferelation (siehe Bd. 3, Abschn. 3.3.3), würde ihre Impuls-Unschärfe Δp bei einer Ortsunschärfe Δr dann mindestens $\Delta p \geq h/\Delta r$ betragen und ihre kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} \geq \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} \geq \frac{h^2}{2m_e \Delta r^2} \quad (2.22)$$

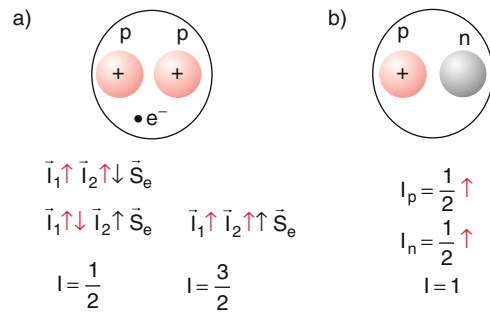


Abbildung 2.15 a Falsches, b richtiges Modell des Deuterons

Setzt man die entsprechenden Zahlenwerte, z. B. für den Sauerstoffkern mit $A = 16$, ein, so erhält man mit $\Delta r < R_K = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ eine untere Grenze von $E_{\text{kin}} > 10^{11} \text{ eV}$ pro Elektron. Dies ist weit mehr als die elektrostatische Bindungsenergie von Elektron und Proton bei einem Abstand von 3 Fermi ($|E_B| < 10^6 \text{ eV}$), sodass die Elektronen nicht stabil gebunden sein könnten.

- Ein weiteres überzeugendes Argument gegen die Hypothese, dass der Kern aus Protonen und Elektronen besteht, wird durch die Messung der Kerndrehimpulse geliefert (siehe Abschn. 2.5). Aus der Messung der Hyperfeinstruktur in Atomspektren (siehe Bd. 3, Abschn. 5.6) kann man schließen, dass viele Kerne ein magnetisches Moment haben, das mit einem Eigendrehimpuls (**Kernspin**) des Kerns verknüpft ist. Messungen der Hyperfeinstruktur des H-Atoms zeigen, dass der Kernspin des Protons $I = \frac{1}{2} \hbar$ ist. Da auch der Elektronenspin $s = \frac{1}{2} \hbar$ ist, müsste der Kern des Deuterons ($A = 2, Z = 1$) den Gesamtspin $I = \frac{1}{2} \hbar$ oder $\frac{3}{2} \hbar$ haben, wenn er aus zwei Protonen und einem Elektron aufgebaut wäre (Abb. 2.15a). Die Experimente zeigen jedoch eindeutig, dass das Deuteron den Kernspin $I = 1 \cdot \hbar$ hat (Abb. 2.15b).

Rutherford postulierte deshalb schon 1920, dass Kerne aus Protonen und etwa gleich schweren neutralen Teilchen aufgebaut sein müssten. Als dann *Chadwick* 1932 das Neutron entdeckte [9], fand *Rutherford's* Hypothese eine experimentelle Bestätigung. Nach diesem Modell, das noch heute gilt, besteht ein Kern aus Z Protonen und $A - Z$ Neutronen. Protonen- und Neutronenmassen unterscheiden sich nur sehr geringfügig. Diese beiden Kernbausteine werden **Nukleonen** genannt und der Atomkern ein **Nuklid**. Ein bestimmter Atomkern X ist durch seine Protonenzahl Z und Neutronenzahl $A - Z$ eindeutig charakterisiert. Man schreibt ihn in abgekürzter Schreibweise als ${}^A_Z X$.

Anmerkung. Oft werden die Atome (Kern + Elektronenhülle) als Nuklide bezeichnet. Wir wollen aber hier den Ausdruck „Nuklid“ (gemäß seinem Namen) auf Atomkerne, also *ohne* Elektronenhülle beschränken. ◀

Beispiel

Ein Lithiumkern mit drei Protonen und vier Neutronen wird charakterisiert durch das Symbol ${}^7_3\text{Li}$. ◀



<http://www.springer.com/978-3-662-52883-9>

Experimentalphysik 4

Kern-, Teilchen- und Astrophysik

Demtröder, W.

2017, XXII, 497 S. 615 Abb., 594 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-52883-9