Kapitel 2: Lineare Optimierung

Aufgabe 2.1:

Lösen Sie zeichnerisch die folgenden LP-Modelle:

a) Max. $F(x,y) = 4x + 3y$

$$\begin{aligned} x + 3y &\le 9 \\ -x + 2y &\ge 2 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

b) Max. $F(x,y) = x + y$

$$\begin{aligned} 5x + y &\le 10 \\ x + 2y &\le 6 \\ x - y &\ge 1 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

c) Max. $F(x,y) = x - y$

$$\begin{aligned} 2x - y &\le 0 \\ x + 2y &\le 1 \\ 2x + y &\ge 2 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

d) Max. $F(x,y) = 2x + y$

$$\begin{aligned} -x + y &\le 1 \\ x + 3y &\ge 6 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

e) Max. $F(x,y) = 4x + 3y$

$$\begin{aligned} n(n-1)x + ny &\le n + (n-1)^2 \qquad \text{für } n = 1,2,\ldots \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2:

Formulieren Sie zur Lösung der folgenden Probleme jeweils ein LP und bestimmen Sie graphisch eine optimale Lösung!

a) Eine Bergwerksgesellschaft besitzt zwei verschiedene Gruben (bzw. Minen), in denen bestimmte Erzarten gefördert werden. Die Gruben befinden sich in verschiedenen Landesteilen und verfügen über unterschiedliche Kapazitäten. Nach dem Brechen werden bei Erz drei Klassen unterschieden, grob-, mittel- und feinkörniges Erz. Nach jeder Erzart besteht eine gewisse Nachfrage. Die Bergwerksgesellschaft konzentriert sich darauf, einem Hüttenwerk wöchentlich mindestens 12t grob-, 8t mittel- und 24t feinkörniges Erz zu liefern. Die Betriebskosten für die Gruben sind 200 GE pro Tag bei Grube 1 und 160 GE bei Grube 2. In der Grube 1 werden dabei pro Tag 6t grob-, 2t mittel- und 4t feinkörniges Erz gefördert, während die zweite Grube eine tägliche Leistung von 2t grob-, 2t mittel- und 12t feinkörnigem Erz hat. Wie viele Tage sollte jede der Gruben pro Woche befahren werden, um die Aufträge der Firma auf wirtschaftliche Weise zu erfüllen?

b) Der Automobilfabrikant Dingeldein stellt in zwei Werken Personenkraftwagen (PKW) und Lastkraftwagen (LKW) her. Im ersten Werk, in dem die grundlegenden Montagearbeiten durchgeführt werden, werden fünf Mann-Tage pro LKW und zwei Mann-Tage pro PKW benötigt. Im zweiten Werk, in dem die Endmontage erfolgt, sind pro PKW und pro LKW je drei Mann-Tage notwendig. Die Kapazität des ersten Werkes beträgt 180 und die des zweiten Werkes 135 Mann-Tage pro Woche. Wie viele PKW und LKW sollte der Fabrikant herstellen, um seinen Gewinn zu maximieren? Als weitere Information ist bekannt, dass der Fabrikant an einem LKW 3000 GE und an einem PKW 2000 GE verdient.

W. Domschke et al., *Übungen und Fallbeispiele zum Operations Research,*
DOI 10.1007/978-3-662-48230-8_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Aufgabe 2.3:

Gegeben sei das nebenstehende LP mit einem positiven Parameter β_i.

Man bestimme für $\beta_1 = 18$, $\beta_2 = 12$ und $\beta_3 = 6$ jeweils graphisch die Menge der zulässigen und die Menge der optimalen Lösungen!

Maximiere $F(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 9 \\ 2x_1 + x_2 &\leq \beta_i \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4:

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem nach x_1, x_2 und x_3 auf und bestimmen Sie eine Lösung des Systems mit nichtnegativen Variablenwerten, für welche die Funktion $F(x_1,...,x_6) = 20 - 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 23x_4 + 5x_5 - 16x_6$ einen maximalen Wert annimmt:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 13x_4 - 4x_5 + 9x_6 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 12x_4 - x_5 - 4x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 - 3x_5 + 9x_6 &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5:

Untersuchen Sie, ob $\mathbf{x} = (12, 13, 6, 0)$ eine optimale Lösung des Ungleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &\leq 87 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &\leq 55 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leq 61 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

bezüglich der zu maximierenden Zielfunktion $F(x_1,...,x_4) = 17x_1 + 9x_2 + 20x_3 + 8x_4$ ist!

Aufgabe 2.6:

Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_i \geq 0$ für $i = 2,...,n$ geht durch die Substitution $x_1 := x_1' - x_1''$ mit $x_1' \geq 0$ und $x_1'' \geq 0$ in ein LP mit nichtnegativen Entscheidungsvariablen über.

Zeigen Sie, dass in jeder Basislösung $x_1' \cdot x_1'' = 0$ gilt!

Aufgabe 2.7:

Die Firma Wichtelmann GmbH & Co. KG fertigt Vorgartenzwerge. Interessierten Kleingärtnern steht folgendes reichhaltige Sortiment zur Auswahl:

1) Wächter-Zwerg Hugo mit Laterne und Hellebarde, besonders romantisch.
2) Gärtner-Zwerg Jan mit Schaufel, besonders eindrucksvoll in Blumenbeeten.
3) Räuberhauptmann-Zwerg Hotzenplotz, Luxusausführung.
4) Seemanns-Zwerg Freddy mit Akkordeon, singt auf Wunsch 10 einfühlsame Seemannslieder, ideal für den seefahrtsliebenden Gärtner.
5) Zwerg Anton mit Pfeife, kartenspielend, für gesellige Gärtner.

Für die Herstellung der Zwerge werden drei verschiedene Tonarten A, B, C verwendet, von denen jeweils nur ein begrenzter Vorrat pro Periode zur Verfügung steht. Je nach Artikel werden unterschiedliche Mengen Ton (gemessen in kg) zur Herstellung eines Zwerges benötigt. Gesucht ist das gewinnmaximale Produktionsprogramm für die nächste Periode, wenn man davon ausgeht, dass die hergestellten Produkte vollständig abgesetzt werden können. Die planungsrelevanten Daten sind in obiger Tabelle zusammengestellt.

Tonart	Tonbedarf pro ME des Artikels					Vorrat
	1	2	3	4	5	
A	1	2	1	0	1	100
B	0	1	1	1	1	80
C	1	0	1	1	0	50
Gewinn/ME	2	1	3	1	2	

a) Formulieren Sie ein LP, dessen Lösung das gewinnmaximale Produktionsprogramm pro Periode angibt!

b) Errechnen Sie die optimale Lösung mit Hilfe des Simplex-Algorithmus!

c) Untersuchen Sie den Lösungsverlauf! Warum ergibt sich eine ganzzahlige Lösung?

d) Geben Sie eine ökonomische Interpretation des Optimaltableaus!

Aufgabe 2.8:

Ein Betrieb kann fünf Produkte P_i ($i = 1,...,5$) herstellen. Jedes der Produkte durchläuft drei Arbeitsprozesse A_1, A_2, A_3 auf Maschinen, die mit einer Kapazität von 6000, 2000 bzw. 1000 Maschinenstunden pro Woche zur Verfügung stehen. Der Kapazitätsbedarf an Maschinenstunden pro ME der einzelnen Produkte ist nebenstehender Tabelle zu entnehmen.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
A_1	2	6	6	4	5
A_2	5	1	1	4	4
A_3	12	6	8	20	10

Welche Mengen x_i der Produkte P_i sind pro Woche herzustellen, wenn der Gewinn 8, 9, 6, 12 bzw. 10 GE pro Einheit von $P_1, P_2,..., P_5$ ist und der Gesamtgewinn maximiert werden soll?

Aufgabe 2.9:

Lösen Sie das nebenstehende LP (siehe Domschke et al. (2015, Kap. 2.2)) mit dem Simplex-Algorithmus! Wählen Sie dabei als Pivotspalte nicht diejenige mit dem kleinsten negativen, sondern die erste mit negativem Wert bei Betrachtung der F-Zeile von links nach rechts (Pivotstrategie "first-fit")! Stellen Sie die Folge der Eckpunkte auf dem Weg zum Optimum graphisch dar und vergleichen Sie diese mit derjenigen, die sich bei Anwendung der üblichen Pivotstrategie "steepest ascent" ergibt!

Maximiere $F(\mathbf{x}) = 10x_1 + 20x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrr} x_1 & + & x_2 & \leq & 100 & (1) \\ 6x_1 & + & 9x_2 & \leq & 720 & (2) \\ & & x_2 & \leq & 60 & (3) \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Aufgabe 2.10:

Ermitteln Sie sämtliche Basislösungen des nebenstehenden LPs, veranschaulichen Sie graphisch deren Lage, und berechnen Sie die optimale Lösung mit dem Simplex-Algorithmus!

$$\begin{array}{l} \text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = 40x_1 + 30x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & x_2 & \le & 8 & \quad (1) \\ 2x_1 & + & x_2 & \le & 12 & \quad (2) \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \le & 18 & \quad (3) \\ & & x_1, x_2 & \ge & 0 & \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 2.11:

Gegeben ist das nebenstehende LP.

Bestimmen Sie eine (optimale) Lösung

a) mit der M-Methode und

b) mit dem primalen Simplex-Algorithmus!

Hinweis: Bevor Sie das jeweilige Verfahren anwenden, sollten Sie das Modell in die Maximierungsform mit ≤-Nebenbedingungen bzw. in die Normalform überführen.

$$\begin{array}{l} \text{Minimiere } F(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & & & \ge & -10 \\ x_1 & & & - & x_3 & \ge & 12 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \ge & -8 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \ge & 2 \\ & & & & x_1, x_2, x_3 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 2.12:

Lösen Sie das nebenstehende LP mit Hilfe des Simplex-Algorithmus!

Hinweis: Ermitteln Sie eine zulässige Startlösung mit Hilfe des dualen Simplex-Algorithmus oder der M-Methode!

$$\begin{array}{l} \text{Minimiere } F(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 2x_2 & \ge & 6 \\ 2x_1 & + & x_2 & \ge & 6 \\ x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

Aufgabe 2.13:

Gegeben ist das folgende Simplextableau. Es zeigt eine zulässige Basislösung eines erweiterten Modells, die unter Verwendung der M-Methode entstanden ist.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	b_i
	−1	2	5	1				15
		−1	3		−1	1		3
	2		−1				1	7
F	−4	1	2					0
M-Zeile	−2M	M	−2M		M			−10M

a) Geben Sie diese Basislösung explizit an!

b) Welches Maximierungsmodell P (ohne Schlupf- und künstliche Variablen) liegt dem erweiterten Tableau zugrunde? Wie bezeichnet man die Variablen x_1, x_2, x_3?

c) Gibt es eine zulässige Lösung für P? Wenn ja, geben Sie eine an!

d) Ermitteln Sie eine optimale Lösung von P! Wie viele optimale Lösungen gibt es und woran lässt sich dies erkennen?

Aufgabe 2.14:

Gegeben sei das nebenstehende LP.

$$\begin{array}{l} \text{Maximiere } F(\mathbf{x}) = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \\ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & \le & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & \le & 9 \\ & & x_1, x_2 & \ge & 0 \end{array} \end{array}$$

a) Wie lautet das dazu duale LP?

b) Geben Sie das duale LP in Maximierungsform mit ≤-Nebenbedingungen an und berechnen Sie eine Optimallösung mit dem dualen Simplex-Algorithmus!

c) Bestimmen Sie anhand des Optimaltableaus des dualen LPs die Optimallösung des primalen LPs!

Aufgabe 2.15:

Seien A eine reellwertige Matrix mit m Zeilen und n Spalten, **b** ein reellwertiges m-Tupel und **c** ein reellwertiges n-Tupel; dann sind die beiden folgenden LPe zueinander dual:

Maximiere $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$	Minimiere $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$
unter den Nebenbedingungen	unter den Nebenbedingungen
$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$	$A^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$	$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$

Man zeige, dass unter den genannten Voraussetzungen

(1) Maximiere $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ unter den Nebenbedingungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$

(2) Minimiere $\mathbf{b}^T\mathbf{y}$ unter den Nebenbedingungen $A^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}$ und $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$

zueinander duale LPe sind!

Hinweis: Man verwende ggf. die Lösung der Aufgabe 2.6!

Aufgabe 2.16:

Es soll ein Ernährungsplan mit minimalen Kosten erstellt werden, bei dem mindestens 21 ME Kalorien und mindestens 12 ME Vitamine pro Essensration angeboten werden. Dafür stehen fünf Lebensmittelsorten zur Verfügung, aus denen sich der Kalorien- bzw. Vitamingehalt (K bzw. V) wie folgt ermitteln lässt:

$$\begin{array}{lcl} K & = & x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 \\ V & = & x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \end{array} \qquad (x_i = \text{Menge des Lebensmittels } i)$$

Die Kosten für die Lebensmittel betragen pro Ration:

$$F(\mathbf{x}) = 20x_1 + 20x_2 + 31x_3 + 11x_4 + 12x_5$$

a) Formulieren Sie diese Aufgabe als LP!

b) Formulieren Sie das dazu duale LP!

c) Ermitteln Sie eine Lösung des primalen LPs, indem Sie zunächst das duale LP graphisch lösen und anschließend die gesuchte Lösung mit Hilfe der Dualitätstheorie herleiten!

Aufgabe 2.17:

Gegeben sei das nebenstehende LP-Modell P.

Maximiere $F(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 4 \\ -x_1 & & & + & x_3 & - & x_4 & \leq & -1 \end{array}$$

$x_1, x_3 \geq 0$ sowie $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie das zu P duale Modell D an! Ermitteln Sie dabei D durch direkte Anwendung der Dualisierungsregeln auf P, ohne dieses Modell vorher zu transformieren!

b) Formulieren Sie ein zu P äquivalentes Modell P1, das ausschließlich Gleichheitsrestriktionen sowie nichtnegative Variablen enthält!

c) Geben Sie das zu P1 duale Modell D1 an!

d) Sind die Modelle D und D1 äquivalent?

Aufgabe 2.18:

Gegeben sei das nebenstehende LP.

Maximiere $F(\mathbf{x}) = 3x_1 + 5x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie eine optimale Lösung mit Hilfe des revidierten Simplex-Algorithmus!

b) Verwenden Sie zur Bestimmung einer optimalen Lösung den Simplex-Algorithmus mit impliziter Berücksichtigung oberer Schranken!

Aufgabe 2.19:

Lösen Sie das nebenstehende LP durch Anwendung des Simplex-Algorithmus mit impliziter Berücksichtigung oberer Schranken!

Maximiere $F(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \end{array}$$

$x_1 \in [0, 6]$, $x_2 \in [0, 5]$

Aufgabe 2.20:

Gegeben ist folgendes LP:

Maximiere $F(\mathbf{x}) = 12x_1 + 4x_2 + 16x_3$ $(= c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & \leq & 50 & (= b_1) \\ 9x_1 & + & 12x_2 & + & 15x_3 & \leq & 60 & (= b_2) \\ & & & x_1, x_2, & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

a) Lösen Sie das Problem mit dem primalen Simplex-Algorithmus!

b) Betrachten Sie unabhängig voneinander folgende Datenänderungen und ermitteln Sie die jeweilige optimale Lösung, ausgehend von dem in a) erhaltenen Optimaltableau:

(i) $b_1 = 20$ (ii) $b_2 = 30$ (iii) $c_2 = 20$ (iv) $c_3 = 8$

c) In welchem Intervall $[b_k - b_k^-, b_k + b_k^+]$ können b_1 bzw. b_2 variiert werden, ohne dass die unter a) ermittelte optimale Basislösung die Optimalitätseigenschaft verliert, d.h. ohne dass ein Basistausch erforderlich wird?

d) In welchem Intervall $[c_k - c_k^-, c_k + c_k^+]$ können c_2 bzw. c_3 variiert werden, ohne dass die unter a) ermittelte optimale Basislösung ihre Optimalitätseigenschaft verliert?

Aufgabe 2.21:

Bestimmen Sie für das nebenstehende LP die optimalen Basislösungen und optimalen Zielfunktionswerte in Abhängigkeit des reellwertigen Parameters μ! Veranschaulichen Sie den Verlauf des Zielfunktionswertes F_μ in Abhängigkeit von μ!

Maximiere $F_\mu(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\le 8 + 2\mu \\
x_1 + 2x_2 &\le 7 + 7\mu \\
x_2 &\le 3 + 2\mu \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.22:

Bestimmen Sie nichtnegative Variablenwerte x_1, x_2, x_3, x_4 unter Beachtung der nebenstehenden Nebenbedingungen so, dass die Funktion $F_1(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4$ maximiert wird und dabei die Summe $F_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ möglichst klein ist!

$$
\begin{aligned}
9x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 16 \\
4x_1 \qquad\quad - x_3 + x_4 &\le 1 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad &\ge 6
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.23:

Ein Unternehmen fertigt drei Produkte. Es verfolgt damit neben dem langfristigen Gewinnziel weitere Zielsetzungen. In der nebenstehenden Tabelle sind das jeweils angestrebte Ziel, die Zielbeiträge der einzelnen Produkte pro ME und ein entsprechender Gewichtungsfaktor angegeben.

Zielart	Produkt			Gewichtungs-
	1	2	3	faktor
Gewinn	12	9	15	0.5
Prestige	5	3	4	0.2
Umweltvertr.	5	7	8	0.3

Bezeichnet man mit x_1, x_2 und x_3 die zu produzierenden Mengen der Produkte 1, 2 und 3, so ist das folgende Nebenbedingungssystem zu berücksichtigen:

$$
\begin{aligned}
6x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\le 25 \qquad \text{(Kapazitätsrestriktion im Produktionsbereich)} \\
3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\le 20 \qquad \text{(Absatzrestriktion)} \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

a) Lösen Sie dieses Problem mit Mehrfachzielsetzung (Gewinnmaximierung; höchstmögliches Prestige des Unternehmens, das durch die einzelnen Produkte unterschiedlich beeinflusst wird; maximale Umweltverträglichkeit der Produkte) durch Zielgewichtung!

b) Bestimmen Sie eine Zielkompromisslösung auf der Grundlage der Minimierung von Abstandsfunktionen (siehe Domschke et al. (2015, Kap. 2.7.4)) mit $p = 1$ sowie $p = \infty$ und unter Verwendung der oben angegebenen Gewichtungen!

Aufgabe 2.24:

Gegeben sei das 2-Personen-Nullsummen-Matrixspiel mit der nebenstehenden Auszahlungsmatrix von Spieler B an Spieler A.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	–3	2	0	2
a_2	3	–1	1	–2
a_3	0	0	–2	–1

a) Man prüfe, ob sich die Matrix reduzieren lässt! Das ist immer dann der Fall, wenn es für Spieler A eine Strategie a_k gibt, die bei keiner Entscheidung von B günstiger ist als eine andere Strategie a_i. Man sagt, a_k wird von a_i *dominiert* oder a_k ist *ineffizient*. Entsprechend besitzt evtl. auch B eine oder mehrere dominierte bzw. ineffiziente Strategien.

b) Berechnen Sie den unteren und oberen Spielwert des verbleibenden Spiels!

c) Formulieren und lösen Sie für das Spiel ein LP! Geben Sie die optimalen Strategien des Spiels in der gemischten Erweiterung und den Spielwert an!

Aufgabe 2.25:

Das Papier-Stein-Schere-Knobeln ist ein 2-Personen-Nullsummen-Matrixspiel mit nebenstehender Auszahlungsmatrix von Spieler B an Spieler A.

	b_1 = Papier	b_2 = Stein	b_3 = Schere
a_1 = Papier	0	1	–1
a_2 = Stein	–1	0	1
a_3 = Schere	1	–1	0

a) Ermitteln Sie den unteren und oberen Spielwert des Spiels in reinen Strategien!

b) Bestimmen Sie optimale Strategien des Spiels in der gemischten Erweiterung mittels linearer Optimierung!

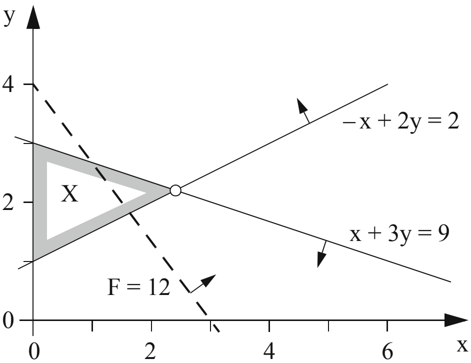
Lösungen zu Kapitel 2: Lineare Optimierung

Aufgabe 2.1:

a) Optimale Lösung:

$x^* = 2.4$, $y^* = 2.2$

$F^* = 16.2$

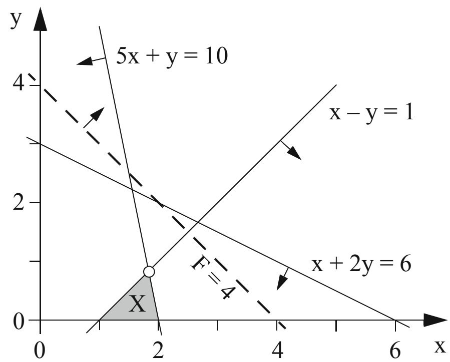


b) Optimale Lösung:

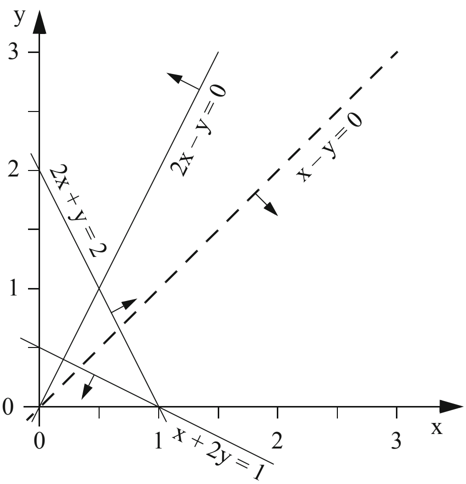
$x^* = 11/6 = 1.833$

$y^* = 5/6 = 0.833$

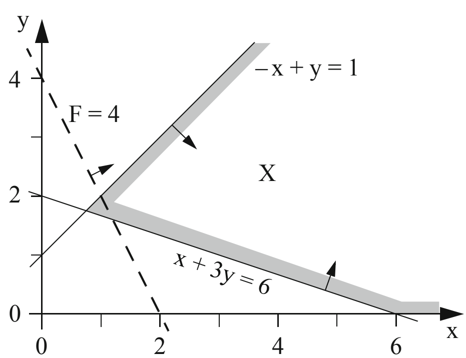
$F^* = 8/3 = 2.67$



c) Es existiert keine zulässige Lösung.



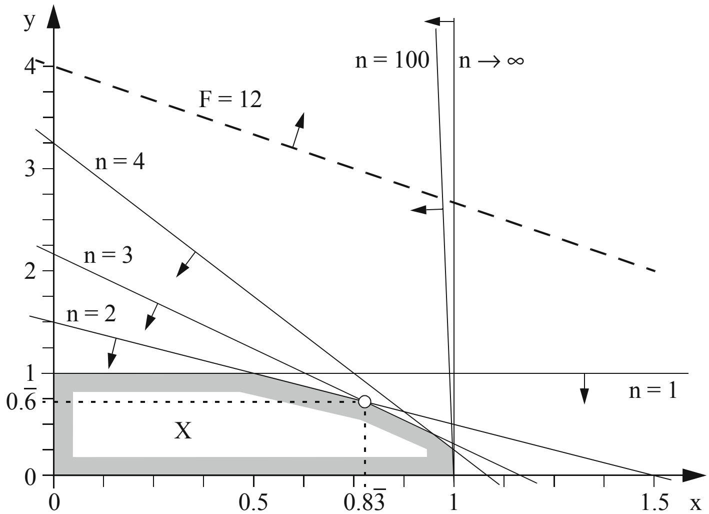
d) Der zulässige Bereich ist unbeschränkt. Der Zielfunktionswert lässt sich beliebig steigern; somit ist keine optimale Lösung angebbar.



e) $n=1$: $y \le 1$
$n=2$: $2x + 2y \le 3$
$n=3$: $6x + 3y \le 7$
$n=4$: $12x + 4y \le 13$ usw.

Die optimale Lösung befindet sich im Schnittpunkt der Restriktionen für $n=2$ und $n=3$. Sie lautet $x^* = 0.833$, $y^* = 0.667$ und besitzt den Zielfunktionswert $F^* = 5.333$.

Für $n \to \infty$ nähert sich die Restriktion der Bedingung $x \le 1$ an.



Aufgabe 2.2:

a) Formulierung als LP:

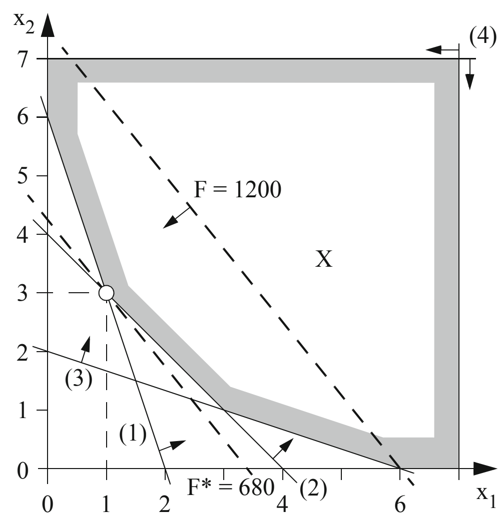
x_1 Anzahl der Arbeitstage in Grube 1

x_2 Anzahl der Arbeitstage in Grube 2

Minimiere $F(\mathbf{x}) = 200x_1 + 160x_2$

unter den Nebenbedingungen

$$6x_1 + 2x_2 \ge 12 \qquad (1)$$
$$2x_1 + 2x_2 \ge 8 \qquad (2)$$
$$4x_1 + 12x_2 \ge 24 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2 \le 7 \qquad (4)$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (5)$$



Die anhand der nebenstehenden Abbildung graphisch ermittelte optimale Lösung ist $x_1^* = 1$, $x_2^* = 3$ mit $F^* = 680$.

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-48229-2

Übungen und Fallbeispiele zum Operations Research
Domschke, W.; Drexl, A.; Klein, R.; Scholl, A.; Voß, S.
2015, XII, 210 S., Softcover
ISBN: 978-3-662-48229-2