

Kapitel 2

Prototyp der Klimahaushaltsgleichung

Im vorigen Kapitel haben wir das Konzept des Haushalts, repräsentiert durch die Klimaformel, für diskrete Systeme entwickelt. Mit diskret ist gemeint, dass die Elemente des betrachteten Klimasystems aus unterscheidbaren, räumlich getrennten und endlich großen Objekten bestehen (z. B. Wolkentröpfchen). Diese Betrachtungsweise führt dazu, dass zwei verschiedene Klimasysteme verschiedenen Gleichungen gehorchen. Beispielsweise sind bei dem Kopplungsexperiment in Bild 1.10 die Haushaltsgleichungen (1.26) der großen Tropfen verschieden von denen der kleinen Tropfen.

Diese Verschiedenheit scheint zunächst nicht besonders folgenreich zu sein; denn unsere Klimaformel (1.1) sorgt ja als übergeordnetes Prinzip dafür, dass beide Gleichungssysteme konzeptionell doch gleich gebaut sind. Aber wäre es nicht wünschenswert, stofflich verschiedene, dynamisch aber gleichartige Systeme auch mit genau derselben Gleichung zu beschreiben?

Ein anderes, tieferliegendes Problem unseres Tropfenexperiments, sichtbar bereits in Bild 1.9, ist die Verschiedenheit der beiden Zeitpunkte t_1 und t_2 . Damit haben wir gemäß (1.18) die Geschwindigkeit u durch einen *Differenzenquotienten* definiert, was dazu führt, dass u im ganzen Kontrollvolumen in x -Richtung konstant ist. Das macht doch nichts, sagen Sie, da kann man doch den Limes t_1 gegen t_2 bilden, und man bekommt den *Differenzialquotienten*, also die Augenblicksgeschwindigkeit. Stimmt, aber das geht nur, wenn man gleichzeitig Δx in der Definition (1.18) beliebig klein macht, d. h. das Kontrollvolumen auf einen Punkt zusammenschrumpfen lässt.

Das bedeutet: Wir stehen vor der Aufgabe, die Gleichung für den *Haushalt eines ausdehnungslosen Punktes* aufzustellen. Dieses Programm gehen wir jetzt an. Ausgestattet mit der Klimaformel (1.1) als Grundprinzip starten wir mit der diskreten Verteilung der Zustandsgröße, und gehen dann durch einen Grenzübergang zur Klimahaushaltsgleichung für einen Punkt über. Das sollte den Haushalt an jeder Stelle im Raum liefern und wir würden lauter verschiedene, kontinuierliche (d. h. überall stetige und im Allgemeinen sogar differenzierbare) Verteilungen aller Größen (Geschwindigkeiten, Konzentrationen, Ströme etc.) zur Verfügung bekommen. Vor allem aber: Die Haushaltsgleichung wäre an jedem Punkt im Raum gleich.

2.1 Diskrete und stetige Haushalte

In den bisherigen Beispielen haben wir das Haushaltsprinzip mit Wolkentropfen illustriert, also mit diskreten Objekten. Aber das Haushaltsprinzip gilt auch, wenn die Zustandsgrößen stetig verteilt sind, also für Dichten und für Konzentrationen. Da reicht es nicht mehr, wie bisher, das Kontrollvolumen sich als ausdehnungslos im Irgendwo zu denken; sondern da muss man die Verteilung der Zustandsgrößen, Flüsse und Umwandlungsraten auf den Raum spezifizieren. Hier wird es schnell sehr unanschaulich, weil man das Gefühl hat, dass einem die Fluide durch die Finger rinnen. Daher wollen wir zuerst den Unterschied zwischen diskreten und stetig verteilten Größen beleuchten.

Die erste Frage betrifft die gerade behauptete Ausdehnungslosigkeit unserer Kontrollvolumina. Wir haben doch bei der Diskussion des Experiments von Bild 1.9 Zeitintervall Δt und Raumintervall Δx explizit angegeben. Wie kann man da sagen, dass wir uns das Kontrollvolumen als ausdehnungslos im Irgendwo denken?

Sehr einfach: die makroskopischen Parameter Δt und Δx sind in der Geschwindigkeit u miteinander kombiniert und dadurch zum Verschwinden gebracht worden, und der absolute Wert ΔV des Kontrollvolumens kommt in den drei Summanden (1.23) des Haushalts gar nicht vor. Das bedeutet: schon für einen Haushalt wie den von Bild 1.9, der eine recht ansehnliche Größe haben kann, und der keineswegs im Irgendwo liegt, sind die zugehörigen Raum-Zeit-Koordinaten zwar nicht unbekannt und vielleicht für die Interpretation auch einmal wichtig; aber für die eigentliche Haushaltsaussage sind sie ohne Belang. Dies wollen wir zunächst für einige praktisch bedeutsame Fälle beleuchten.

2.1.1 Punkt- (0-D-)Haushalte

Inbegriff diskreter Haushalte sind *Punkthaushalte* oder *Boxhaushalte*. Die Lage oder die räumliche Ausdehnung des zugehörigen *Reservoirs* ist gewöhnlich un-spezifiziert; das muss nicht bedeuten, dass sie unbekannt ist, aber sie hat auf den Haushalt keinen Einfluss. Das Reservoir wird als Kasten dargestellt, dessen wichtigste Eigenschaft die Flüsse sind, die von den Seiten hinein- oder herausfließen können (das können auch verschiedene Seiten sein). Außerdem kann das Reservoir die transportierte Zustandsgröße speichern. Aber wo das Reservoir liegt und wie groß es ist, kommt in der Gleichung für den Boxhaushalt nicht vor.

Solche Reservoirdarstellungen sind in der Klimatologie weit verbreitet. Wir nennen:

- **Planetares Strahlungsgleichgewicht:** Hier gibt es nur einen Einfluss und einen Ausfluss, beide sind gleich (dazu weiter unten Bild 6.2).
- **Treibhauseffekt:** Hier gibt es zwei Reservoirs (Atmosphäre und Erde) und die Vertikalflüsse dazwischen (dazu weiter unten Bild 6.12).

- **Globaler Energiehaushalt nach Trenberth:** Diese Darstellung (Bild 6.21) hat drei Reservoirs (und ebenfalls keine Speicherung): gesamte Erde, eingebettet darin die Subsysteme Atmosphäre und Erdoberfläche.
- **Globaler APE-Haushalt nach Lorenz:** Bei diesem Klassiker [37] gibt es vier stationäre Reservoirs: je zwei für die kinetische und die verfügbare potenzielle Energie der Atmosphäre. Diese befinden sich gemeinsam im gleichen Volumen, hier der gesamten Atmosphäre, und tauschen miteinander aus. Ein Beispiel dieses Typs findet sich unten in Bild 6.32 mit drei Energiereservoirs.
- **Hydrologischer Zyklus:** Beim Wasserhaushalt (Bild 7.3) haben wir ebenfalls vier stationäre Reservoirs: Atmosphäre über dem Meer, Atmosphäre über dem Land, Meer, Land. Diese tauschen untereinander aus, sind aber verschieden groß, und das Land ist noch dazu in Kontinente geteilt, also nicht zusammenhängend. Die Darstellung ist trotzdem verständlich und sinnvoll.
- **C-Haushalt:** In diesem Schema (Bild 8.2) gibt es drei übergeordnete Reservoirs (Atmosphäre, Land, Meer) mit vielen darin eingebetteten Unterreservoirs und mit Speicherung, also nicht stationär. Alle Reservoirs sind verschieden groß, wechselwirkende Flüsse gibt es Hunderte.

Am letzten Beispiel sieht man, wie der Reservoir-Gedanke einer beliebigen Ausdehnung und Verallgemeinerung fähig ist. Dies ist so lange möglich, wie die Reservoirs räumlich ineinander eingebettet sind.

2.1.2 Von Linien- zu Volumenhaushalten

Bei unseren Tropfenbeispielen (Bilder 1.9, 1.10) ist das Kontrollvolumen, in dem die Zustandsgrößen existieren, für die Haushaltsaussage unerheblich und wird daher nicht näher spezifiziert. Das ändert sich aber, wenn die miteinander wechselwirkenden Reservoirs räumlich getrennt sind.

Linien-(1D-)Haushalte

Den Prototyp für diesen Zusammenhang haben einst die Stadtväter erfunden, als sie das U-Bahn-System graphisch darzustellen suchten (Bild 2.1). Jede Haltestelle wird durch einen dicken Punkt markiert, bei dem keine Rücksicht darauf genommen werden muss, ob das eine große oder eine kleine Haltestelle ist, ob sie ober- oder unterirdisch liegt, ob sie Rolltreppen hat oder keine. Was zählt, ist der Haltepunkt, an dem Fahrgäste ein- und aussteigen können.

Jede einzelne U-Bahn-Station stellt dadurch einen minimalisierten Haushalt dar. In ihm gibt es ausschließlich *Personenflüsse*: Leute, die mit der U-Bahn ankommen oder abfahren, außerdem Leute, die zu Fuß in die Station kommen oder von ihr weggehen. Bei stationärem Betrieb (und natürlich ist nur dieser in Bild 2.1 gemeint) sind alle zusammen null, denn die Station speichert keine Fahrgäste.

Aber diese minimalisierten Haushalte sind erstens gekoppelt: der gleiche Zug, der von Heiligenstadt nach Süden hin abfährt, muss in Spittelau ankommen. Und

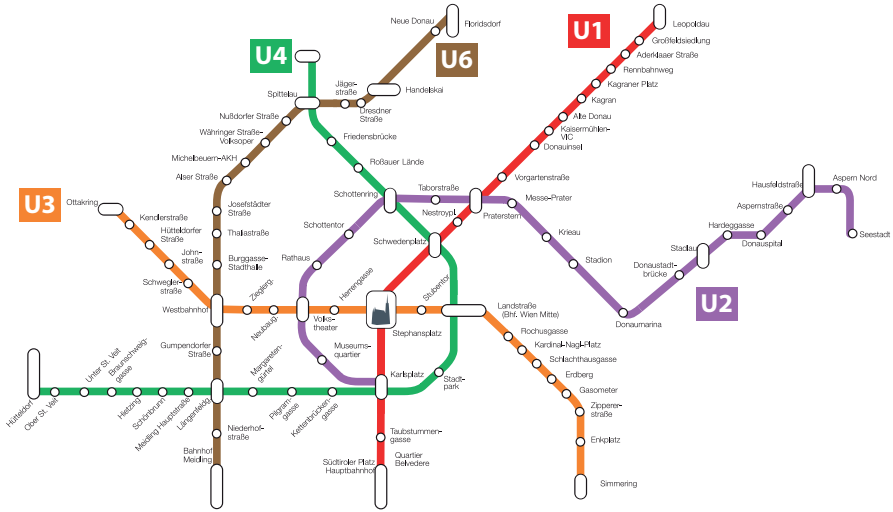


Bild 2.1 Das U-Bahn-System Wiens, Stand 2016. Kreise: einfache Stationen; Ellipsen: Stationen mit Umsteigemöglichkeit.

sie sind zweitens räumlich getrennt: die U-Bahn ist schließlich für den Personentransport zwischen verschiedenen Orten gedacht. Diese räumliche Wechselwirkung zwischen den Stationen können wir als Prototyp für den Austausch zwischen benachbarten Haushalten ansehen. Es ist sprachlich kein Zufall, wenn wir diese Konfiguration einer *U-Bahn-Linie* als *Linienhaushalt* bezeichnen.

Trotz der räumlichen Trennung der Stationen, die man im U-Bahn-Plan von Bild 2.1 auch unbedingt sehen muss, kommt es überhaupt nicht auf den Kilometer-Abstand dieser Stationen an. Das ermöglicht, den Plan schematisch zu zeichnen und die Stationen mit kurzen geraden Strichen zu verbinden, obwohl die wahren Wegstrecken vielfach stark gekrümmt sind. Die geographisch „richtige“ Lage der Stationen, wonach Heiligenstadt nördlich des Westbahnhofs liegt, wird gerade nur oberflächlich angedeutet, und Sie als Kunde sind damit zufrieden. Aber Sie wissen auch, dass Bild 2.1 aus diesem Grund als Stadtplan ungeeignet ist, denn auf einem solchen zählen die Kilometer-Abstände.

Wir können uns jetzt vorstellen, dass wir die Zahl der Stationen beliebig vergrößern, bis sie dicht aneinander liegen. Für die Stadtplaner wäre eine solche Idee unsinnig, aber uns ermöglicht sie den gedanklichen Übergang zur stetigen Verteilung der Haushalte, zunächst in einer Dimension. Diese Überlegung werden wir später im Abschnitt 2.2 beim Automodell wieder aufgreifen.

Flächen-(2D-)Haushalte

Kann eine Fläche überhaupt einen Haushalt haben? Da sie kein Volumen hat, wie soll sie etwas speichern? Hier kann man mehrere Perspektiven unterscheiden:

- Wir können den eben erläuterten Gedanken der U-Bahn-Linie in die Ebene hinein fortsetzen; dies ergibt das *U-Bahn-Netz*, in dem die Linien in einer zweidimensionalen Anordnung miteinander gekoppelt sind (auch das zeigt bereits Bild 2.1). Dazu muss man Zustandsgrößen in der Fläche definieren (beispielsweise Personendichten, das geht ohne weiteres) und für diese eine Haushaltsgleichung der Form (1.1) angeben.
- Eine wichtige Form von Flächenhaushalten erfordert *Randbedingungen*. Das sind Forderungen für den Gesamtfluss durch eine Fläche, der entweder null oder stetig sein muss. Solche Haushalte werden in der Klimaliteratur vielfach *Bilanzgleichungen* genannt.
- Man kann die weiter unten eingeführten 3D-Haushalte integrieren, insbesondere in vertikaler Richtung, und dabei mittlere Haushalte schaffen, die man als Weltkarte plottet. Das hat Sinn angesichts der geringen vertikalen Mächtigkeit und gleichzeitigen horizontalen Ausdehnung des Klimasystems. Die Vertikalströme im Klimasystem (z. B. Strahlung, Niederschlag) werden wir in den folgenden Kapiteln auf diese Weise gewinnen. Ein solcher Flächenhaushalt repräsentiert aber in Wahrheit an jeder Stelle in der Horizontalen ein vertikales Integral, also einen echten 3D-Haushalt.

Volumen-(3D-)Haushalte

Diese Kategorie erübrigt sich eigentlich, denn schon die Beispiele in Abschnitt 2.1.1 sind in Wahrheit 3D-Haushalte, und jede U-Bahn-Haltestelle ist ein 3D-Haushalt. Am ehesten würde man unter einem 3D-Haushalt eine dreidimensionale Verallgemeinerung des U-Bahn-Netzes von Bild 2.1 verstehen.

Die Betrachtung eines endlichen 3D-Haushalts führt durch Grenzübergang zum Haushalt eines sozusagen ausdehnungslosen Volumens: dem klassischen Punkthaushalt. Der Ortsvektor eines Punktes, dessen Komponenten reelle Zahlen sind, erfüllt den Raum dicht: das ist das Kontinuum.

2.2 Die fluiddynamische Kontinuitätsgleichung

Wir machen jetzt Ernst mit dem Vorhaben, den Übergang zu vollziehen von diskreten Verteilungen hin zu stetigen Verteilungen. In der Denkweise des Haushalts spricht man auch von globalen im Unterschied zu lokalen Haushalten. In der Analysis entspricht dies dem Übergang von den rationalen zu den reellen Zahlen, im landläufigen Sprachgebrauch dem von digital zu analog. Was soll daran vorteilhaft sein? Landläufig wird analog heute als Rückschritt empfunden, während die digitale Denkweise die Zukunft für sich zu haben scheint.

Diese Frage lassen wir für den Augenblick auf sich beruhen, denn das Gegensatzpaar digital/analog ist noch nicht identisch mit dem Gegensatzpaar global/lokal. Gerade das letztere Gegensatzpaar aber ist der Ansatzpunkt zur Untersuchung, wie

man aus dem Haushalt für ein endlich ausgedehntes Volumen zum Haushalt für einen ausdehnungslosen Punkt gelangt. Das hier zugrunde liegende Problem ist die Frage nach der *Identität der Fluidpartikel*. Die fluiddynamische Kontinuitätsgleichung (FKG) ist dabei die angestrebte Aussage.

Die Grundannahme der FKG betrifft den Zusammenhang zwischen dem Bewegungszustand der Fluidpartikel und ihrer räumlichen Lage im Kontinuum. Dabei ist die Identität der Fluidpartikel für endlich große Teilchen unproblematisch. Ein räumlich ausgedehntes, wenn auch sehr kleines, Fluidpartikel kann man sich ohne weiteres als unverwechselbar während des Bewegungsvorgangs vorstellen. Wenn man jedoch in der Definition von Geschwindigkeit und Dichte den Grenzübergang zu reellen Werten der Teilchenkoordinaten vollzieht, kommt man nicht umhin, die beliebige Teilbarkeit der Materie zu unterstellen. Die darin eingeschlossene Forderung nach Existenz eines *unendlich Kleinen* führt uns zu den Haushaltsgleichungen der Kontinuumsmechanik.

2.2.1 Die FKG in einer Dimension – diskrete Formulierung

Den wesentlichen Gedanken der fluiddynamischen Kontinuitätsgleichung kann man bereits im eindimensionalen Spezialfall illustrieren. Wir beginnen mit einer *diskreten* Konfiguration, d. h. wir stellen uns die Fluidpartikel zunächst weit getrennt vor. Dazu betrachten wir eine Autoschlange gemäß Bild 2.2 zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 . Wir nehmen an, dass die vier gezeichneten Autos ihren Abstand verändern können, sich aber nicht überholen dürfen; das passt zur Dimension eins – erst im Zweidimensionalen ist Überholen möglich. Zum Zeitpunkt t_1 haben die Autos einen gewissen Abstand voneinander. Zum Zeitpunkt t_2 ist die Schlange weiter in x -Richtung vorgekommen, und gleichzeitig hat sich ihr Abstand verändert. Jeder kennt solche Situationen, und wir wollen unsere Vertrautheit damit nutzen, um gedanklich ins Kontinuum vorzustoßen.

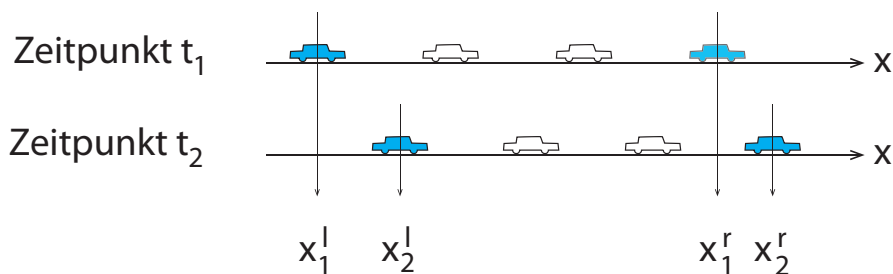


Bild 2.2 Illustration der Kontinuitätsgleichung anhand einer Autoschlange. Fahrtrichtung von links nach rechts, Straßenkoordinate x . Dargestellt ist die Schlange zu zwei Zeitpunkten t_1, t_2 . Die unausgefüllt gezeichneten Autos nehmen an der Betrachtung nicht teil, sie bleiben jedoch stets zwischen den ausgefüllt gezeichneten Autos. Weitere Erläuterung im Text.

Den einzelnen Autos geben wir ein Kennzeichen a und machen sie damit eindeutig identifizierbar. Ihre Position x längs der Straßenkoordinate ist dann als Funktion von a und der Zeit t zu verstehen:

$$x = x(a, t) \quad (2.1)$$

Dies ist die eindimensionale Kummerform der weiter unten definierten allgemeinen Koordinatentransformation (2.22) oder (2.36).

Wir fassen jetzt zwei bestimmte Autos ins Auge, die wir mit dem oberen Index „l“ (links) und „r“ (rechts) unterscheiden. Ihre gleichbleibenden Kennzeichen sind also a^l, a^r , und ihre Koordinaten längs der Straße

$$x(a^l, t) = x^l(t) \quad x(a^r, t) = x^r(t) \quad (2.2)$$

sind Funktionen der Zeit. Umgekehrt ist die Koordinate eines und desselben Autos zum oberen und zum unteren Zeitpunkt gegeben durch:

$$x(a, t_1) = x_1(a) \quad x(a, t_2) = x_2(a) \quad (2.3)$$

d. h. zu einem bestimmten Zeitpunkt ist die Autoposition eine Funktion des Kennzeichens a . Diese beiden Beschreibungsmöglichkeiten fassen wir in einer Kurzschreibweise zusammen:

$$x_1^l \quad x_2^l \quad x_1^r \quad x_2^r \quad (2.4)$$

Die Zeitindizes stehen unten, die Kennzeichenindizes oben. Diese vier speziellen räumlichen Koordinaten entsprechen den Positionen der vier blau gezeichneten Autos in Bild 2.2. Die beiden Autos links sind gleich, sie haben das Kennzeichen a^l ; ebenso sind die beiden Autos rechts mit dem Kennzeichen a^r gleich. Die beiden oberen Autos sind verschieden, es sind Momentaufnahmen zweier Autos zum gleichen Zeitpunkt t_1 ; ebenso entsprechen die beiden unteren Autos einer Momentaufnahme derselben beiden Autos zu einem anderen Zeitpunkt t_2 .

Nun verschaffen wir uns den Zusammenhang zwischen den Positionen der Autos und der Zeit. Dabei geht es um den *zeitlichen Unterschied verschiedener Positionen des gleichen Autos*. Dazu betrachten wir beispielsweise das linke Auto zu den beiden Zeitpunkten und bilden:

$$u^l = \frac{x_2^l - x_1^l}{t_2 - t_1} \quad (2.5)$$

Dieser *Differenzenquotient* ist die mittlere *Geschwindigkeit* des linken Autos (Kennzeichen a^l) im Zeitraum zwischen t_1 und t_2 . Formel (2.5) ist die gleiche Definition wie (1.18) oben bei den Wolkentropfen.

Das Konzept der Geschwindigkeit ist uns allen aus dem täglichen Umgang vertraut. Beispielsweise Autofahrer, die in Wien im Tunnel unter der UNO-City unterwegs sind, kennen die Warnung *Section Control*. Damit wird angezeigt, mit welcher Methode dort die Geschwindigkeit der Autos gemessen wird: es ist die Methode gemäß Formel (2.5).

Das geht so: der Computer identifiziert das Auto bei der Einfahrt in den Tunnel, d. h. er misst (in diesem Fall für das linke Auto) den Zeitpunkt t_1 ; ebenso misst er für das gleiche Auto bei der Ausfahrt aus dem Tunnel den Zeitpunkt t_2 . Die Positionen x_1^l (Einfahrt in den Tunnel) und x_2^l (Ausfahrt) brauchen nicht gemessen zu werden, denn sie sind für alle Autos gleich. Dann ist der Quotient (2.5) die mittlere Geschwindigkeit des linken Autos (Kennzeichen a^l) im Tunnel. Das Verfahren ist sehr genau, und die Verkehrsteilnehmer sind aus durchsichtigen Gründen bemüht, die erlaubte Höchstgeschwindigkeit im Tunnel nicht zu überschreiten.

Der Differenzenquotient für das rechte Auto lautet entsprechend:

$$u^r = \frac{x_2^r - x_1^r}{t_2 - t_1} \quad (2.6)$$

Das ist die mittlere Geschwindigkeit des Autos mit dem Kennzeichen a^r im Zeitraum zwischen t_1 und t_2 .

Im Unterschied zu Bild 2.2 ist bei der Wiener *Section Control* die Einfahrt in den Tunnel stets an der gleichen Stelle und die Ausfahrt ebenfalls. Gemessen wird lediglich der Nenner in den beiden Formeln (2.5) und (2.6). Wesentlich für diese Messmethode ist die technische Zuverlässigkeit, mit der das Kennzeichen erkannt und damit die Identität des Fahrzeugs eindeutig festgestellt wird, sowie die Genauigkeit, mit der $t_2 - t_1$ gemessen wird.

In Bild 2.2 kommt ein neuer Gedanke ins Spiel: nicht nur die *Position* der Autos ändere sich von t_1 bis t_2 , sondern auch ihr *Abstand*:

$$\Delta x = x^r - x^l \quad (2.7)$$

So wie wir uns für die Geschwindigkeit der Autos interessiert haben, können wir uns auch für die zeitliche Änderung ihres Abstands interessieren. Und zwar bilden wir sogleich die relative zeitliche Abstandsänderung:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\Delta x} \frac{(x_2^r - x_2^l) - (x_1^r - x_1^l)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{\Delta x} \left(\underbrace{\frac{x_2^r - x_1^r}{t_2 - t_1}}_{=u^r} - \underbrace{\frac{x_2^l - x_1^l}{t_2 - t_1}}_{=u^l} \right) \quad (2.8)$$

Beim Übergang vom mittleren zum rechten Ausdruck haben wir nur die beiden mittleren Positionen x_2^l und x_1^r miteinander vertauscht. Dadurch ist im letzten Ausdruck dieser Gleichung die Differenz der Geschwindigkeiten rechts minus links in Bild 2.2 entstanden, und wir haben das Ergebnis:

$$\boxed{\frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{t_2 - t_1} = \frac{u^r - u^l}{x^r - x^l}} \quad (2.9)$$

Diese Beziehung verknüpft die *zeitliche Abstandsänderung* der Autos mit ihrer *räumlichen Geschwindigkeitsänderung*. Es ist die diskrete Version der *fluiddyna-*

mischen Kontinuitätsgleichung (FKG) für zunächst eine räumliche Dimension. Wie vorher bei den Wolkentropfen bemerken Sie, dass wir es hier mit der *Divergenz* des Geschwindigkeitsvektors zu tun bekommen; vorläufig jedoch steht rechts nur der Differenzenquotient der Divergenz.

2.2.2 Der Weg ins Kontinuum

Formeln (2.5) und (2.6) geben übereinstimmend die Abhängigkeit $u(a, t_1, t_2)$. Sie gelten für ein bestimmtes Auto (Kennzeichen a) zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_1, t_2 . Im Wiener Tunnel ist dies zweckmäßig, denn da braucht man einen Mittelwert zwischen den beiden Zeitpunkten. Aber gibt es nicht die Geschwindigkeit in jedem einzelnen Zeitpunkt? Die zeigt doch der Tacho schließlich an, und die lässt sich auch mit Radar messen, oder? Wir fragen also: Wie kommen wir zur einfacheren Abhängigkeit $u(a, t)$? Das wäre die Geschwindigkeit für ein gegebenes Auto a zum gegebenen Zeitpunkt t .

Dieses Problem haben die Mathematiker ab dem 17. Jahrhundert auch gehabt, und sie haben es durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung gelöst. Der fruchtbare Gedanke besteht hier darin, dass man beispielsweise in Formel (2.5) fragt: Was tut u^1 , wenn man die Zeitpunkte t_1 und t_2 näher und näher zusammenrückt. Wird u^1 dann größer oder kleiner oder bleibt es am Ende gleich? Die Mathematiker zeigten, dass der Differenzenquotient einem (und auch *nur* einem) *Grenzwert* zustrebt. Um den dazu notwendigen zeitlichen *Grenzübergang* zu vollziehen, muss man t_1 allmählich an t_2 heranrücken. Dazu nutzen wir die Schreibweise (2.3) und finden für beide Formeln (2.5) und (2.6) gemeinsam:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_2} \frac{x_2(a) - x_1(a)}{t_2 - t_1} = \frac{\partial x(a, t)}{\partial t} = u(a, t) \quad (2.10)$$

Die (eindeutige) Existenz dieses Grenzwerts mittels der vorstehenden Limesbildung ist die Grundlage der Differenzialrechnung. Im Unterschied zum Differenzenquotienten bezeichnet man Ausdrücke des Typs $\partial x(a, t) / \partial t$ als *Differenzialquotienten*. Wir benutzen hier zunächst stets *partielle* Differenzialquotienten, um anzudeuten, dass der jeweils andere Parameter in der Argumentliste konstant gehalten wird. Der Operator $\partial / \partial t$ ist die partielle *Ableitung nach der Zeit*.

Das Besondere der Limesbildung besteht bekanntlich darin, dass man die Zeitpunkte t_1 und t_2 nicht einfach gleichsetzen darf – dann kommt Unsinn heraus. Man muss zeigen, dass man den Unterschied kleiner und kleiner machen kann, ohne dass er je null wird, sowie, dass sich dabei der Differenzenquotient immer weniger verändert, bis er auf der Stelle tritt. Wenn dieser Grenzwert existiert, bezeichnet man die Funktion $u(a, t)$, die das mit sich machen lässt, als *differenzierbar nach t* .

Anschaulich lässt sich das so interpretieren: der Grenzübergang $t_1 \rightarrow t_2$ führt in Bild 2.2 das obere Teilbild zum Zeitpunkt t_1 an das untere Teilbild zum Zeitpunkt t_2 heran, bis beide nicht mehr unterscheidbar sind. Dadurch verschmilzt am Ende das linke obere mit dem linken unteren Auto und ebenso das rechte obere mit dem

rechten unteren. Das liefert, hier durch Spezialisierung von (2.10), die Geschwindigkeiten $u(a^l, t)$, $u(a^r, t)$ beider Autos. Dieser Verschmelzungsprozess ist beim Grenzübergang $t_1 \rightarrow t_2$ kein Problem, denn das linke Auto behält ja dabei seine Identität, ebenso wie das rechte.

Beim Grenzübergang $x^l \rightarrow x^r$ dagegen gibt es ein Problem. Wenn wir nämlich die Augenblicksgeschwindigkeit (2.10) für u^l, u^r in (2.9) einsetzen, so ist der Wunsch naheliegend, den Limes $x^l \rightarrow x^r$ zu bilden, so wie wir gerade den Limes $t_1 \rightarrow t_2$ gebildet haben. Aber das würde bedeuten, dass der Abstand der Autos auf null zusammenschrumpfen, also das linke mit dem rechten Auto verschmelzen müsste, und das ist das Problem. Dagegen sträubt sich unsere Vorstellung, denn das würde nur gehen, wenn gleichzeitig die Autos selbst immer kleiner würden und jedenfalls kleiner als ihr Abstand; denn an derselben Stelle können beide Autos unmöglich sein, wenn sie verschieden und unterscheidbar bleiben sollen, was wir auf jeden Fall zu garantieren haben.

Diese begriffliche Schwierigkeit hängt mit einer anderen Schwierigkeit zusammen, die womöglich noch größer ist. Wir fragen nämlich: Welchen Nutzen hat eigentlich der für Autos geltende Zusammenhang (2.10) für unser Verständnis des Strömungsfeldes? Hier meldet sich der Fluidforscher zu Wort, für den wir diese ganze Betrachtung schließlich machen, und sagt: (2.10) hat keinen Nutzen, weil $u = u(a, t)$ ja für das einzelne Auto (d. h. für das einzelne Fluidpartikel) formuliert ist. Das bringt ihm nichts, denn er kann an seinem Strömungsmessgerät nicht die einzelnen vorbeischwimmenden Partikel identifizieren. Diese entsprechen ja den Autos; die mögen die Spezialisten der Autobahnagentur im Wiener Tunnel identifizieren, aber der Fluidphysiker kann das nicht und es interessiert ihn auch nicht. Was er kann, und was er routinemäßig tut, ist etwas anderes: er misst die aktuelle Geschwindigkeit der Partikel, gleichgültig, welches Partikel das gerade ist. Das bedeutet: er hat es nicht mit $u(a, t)$ zu tun, sondern mit $u(x, t)$. Die Frage ist also: Wie kommt man von a , dem Autokennzeichen, auf x , den aktuellen Standort des Autos?

Diese Frage haben wir bereits oben durch die *Transformation* (2.1) beantwortet. Hier schreiben wir umständlich:

$$u(x, t) = u[x(a, t), t] = u(a, t) \quad (2.11)$$

Zum Zeitpunkt t legen wir uns also (rechte Seite) zuerst auf das Auto – nein, ab jetzt auf das Fluidpartikel – fest (d. h. wir wählen a). Dann wissen wir wegen (2.1), dass a zu diesem Zeitpunkt gerade an der Position $x(a, t)$ sein muss (Mittelteil der vorstehenden Gleichung). Wenn wir also von vornherein x gewählt hätten (linke Seite), dann würden wir zum Zeitpunkt t gerade dort das Partikel a mit der Geschwindigkeit u antreffen; andere Partikel als nur a gibt es zu diesem Zeitpunkt an der Position x nicht. Anschaulich: (2.11) enthält in sich versteckt die Transformation (2.1).

Damit gewinnen wir die Geschwindigkeit u , welche die ganze vorbeiziehende Partikelkolonne an der Stelle x hat, ohne einen Bezug auf das Einzelpartikel, und unser Fluidforscher bekommt seine gewünschte Abhängigkeit. Die Information, welches Partikel gerade an der Stelle x ist, geht dabei nicht verloren, sondern es wird eben nur vom Partikelkennzeichen a auf die Raumkoordinate x transformiert; bei

Bedarf können wir jederzeit wieder zurück. $u(x, t)$ ist die geforderte Abhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes von Raum und Zeit, wobei die Identität des Fluidpartikels erhalten geblieben ist.

Wenn wir nun die Transformation von a auf x gemäß (2.11) zusammen mit der zeitlichen Limesbildung gemäß (2.10) in Formel (2.9) einbringen, so finden wir:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Delta x}{\partial t} = \frac{u(x^r, t) - u(x^l, t)}{x^r - x^l} \quad (2.12)$$

Der Unterschied zwischen (2.9) und (2.12) liegt darin, dass u^l, u^r in (2.9) Differenzenquotienten sind, in (2.12) jedoch Differenzialquotienten. Mit diesem Übergang haben die Fluidphysiker kein Problem, denn die beliebige Teilbarkeit der Zeitkoordinate wird als unkritisch empfunden; die *Augenblicksgeschwindigkeit* ist ein allgemein etablierter Begriff.

In (2.12) fehlt jetzt auf beiden Seiten noch die räumliche Limesbildung, die wir genauso machen wie bei der Zeit:

$$\lim_{x^l \rightarrow x^r} \left(\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Delta x}{\partial t} \right) = \lim_{x^l \rightarrow x^r} \frac{u(x^r, t) - u(x^l, t)}{x^r - x^l} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (2.13)$$

Hier haben wir die beiden u sowie Δx gemäß (2.11) als Funktionen von x^l, x^r und t aufgefasst. (2.13) ist die kontinuierliche Fassung der obigen diskreten Fassung (2.9) der FKG. Sie enthält zwei Limesbildungen, die nacheinander auszuführen sind: die zeitliche zuerst, danach die räumliche.

Durch die Limesbildung ist ein neues Ergebnis entstanden: rechts steht die *Divergenz der Geschwindigkeit*. Hier im 1D-Spezialfall ist das nicht sehr spektakulär. Aber später im allgemeinen 3D-Fall ist die Divergenz von Geschwindigkeits- und Transportvektoren eine der zentralen Haushaltsgrößen. Die negative Divergenz wird gerne als *Konvergenz* bezeichnet. Die Bedeutung der Divergenz wird dadurch unterstrichen, dass sie hier bereits im elementaren 1D-Fall von selbst auftaucht.

In der Fluidphysik ist die Existenz des Grenzwerts (2.13) die eigentliche *Kontinuumshypothese*. Sie löst das oben formulierte Problem nicht wirklich, sondern fegt es axiomatisch vom Tisch. (2.13) besagt, dass die Verkleinerung von $\Delta x = x^r - x^l$ bis hin zu beliebig kleinen Werten stets möglich sein soll. Darin ist die Annahme versteckt, dass die beliebige Verkleinerung des betroffenen Fluidpartikels ohne Untergrenze stets möglich sein soll.

Wir begnügen uns hier damit, diese Hypothese einfach auszusprechen. Alle Erhaltungsgleichungen der klassischen Fluidphysik sind darauf aufgebaut und wir folgen im weiteren diesem Vorgehen.

2.2.3 Die totalzeitliche Ableitung

Zu den wichtigsten Besonderheiten der theoretischen Fluidphysik gehört die Existenz zweier zeitlicher Ableitungen: der *partiellen Zeitableitung* und der *totalen Zeit-*

ableitung. Dieser Unterschied entsteht durch die Situation unseres Fluidforschers, der nicht die Geschwindigkeit von Fluidpartikeln (ursprünglich der Autos) misst, sondern die Geschwindigkeit der vorbeiziehenden Partikelkolonne, wobei das Geschwindigkeitsfeld laufend von anderen Partikeln repräsentiert wird.

Bis hin zur Definition (2.11) haben wir alle Größen im Fluid als Funktionen von a und t betrachtet. Das Fluidkennzeichen a und die Zeit t waren die unabhängigen Variablen, und alle anderen Größen, also $x, u, \Delta x$, die davon abhängigen Variablen. Dann aber haben wir den Standpunkt gewechselt und u als Funktion von x und t betrachtet. Da fragen Sie sich: Wovon hängt denn u nun *wirklich* ab?

Die Antwort lautet: das entscheiden Sie. Die Geschwindigkeit ist für das Partikel definiert, und von der Partikelkoordinate a hängt u daher auch zunächst auch ab (anschaulich: Wenn Sie nach der Geschwindigkeit eines Autos fragen, müssen Sie natürlich dazu sagen, welches Auto Sie meinen). Wenn Sie jetzt u als Funktion der Raumkoordinate x (anschaulich: des momentanen Ortes des Autos) betrachten wollen, so dürfen Sie das. Sie müssen nur bei Bildung der zeitlichen Ableitung von u darauf achten, die gleichzeitig auftretende zeitliche Änderung der Lage des ursprünglichen Partikels auch zu berücksichtigen.

Der Differenzialkalkül nimmt Ihnen die Beachtung dieser komplizierten Vorschrift ab. Wir betrachten einmal irgendeine Größe f im Fluid, beispielsweise die Temperatur, zuerst als Funktion $f(a, t)$ und danach als Funktion $f(x, t)$, und bilden in beiden Fällen das *totale Differenzial* nach den Rechenregeln der Differenzialrechnung:

$$df(a, t) = \frac{\partial f(a, t)}{\partial a} da + \frac{\partial f(a, t)}{\partial t} dt \quad (2.14)$$

und

$$df(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \quad (2.15)$$

Für df muss dasselbe herauskommen, unabhängig davon, ob man (2.14) oder (2.15) verwendet.

Wenn wir die erste Schreibweise speziell auf $f = x$, also auf den Ort $x = x(a, t)$ anwenden, an dem das Partikel a sich zum Zeitpunkt t aufhält, so ist für a natürlich keine Änderung zu berücksichtigen, denn das Partikel behält ja seine Identität. *Das Partikeldifferenzial da kann also nur null sein.* Aus (2.14) folgt daher für die totale Zeitableitung von x nach Division durch dt :

$$\frac{dx(a, t)}{dt} = \frac{\partial x(a, t)}{\partial t} = u \quad (2.16)$$

Wir können also in den obigen Gleichungen (2.10), (2.12), (2.13) den Operator $\partial/\partial t$ durch d/dt ersetzen. Das bedeutet: das Wegdifferenzial dx in (2.15) ist durch (2.16) gegeben. Aus (2.15) folgt also für die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion f nach Division durch dt :

$$\frac{df(x, t)}{dt} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{dx(a, t)}{dt}}_{=u} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{dt}{dt}}_{=1} \quad (2.17)$$

Dass dies stimmig ist, sehen Sie im Fall $f = x$; dafür ist $\partial x(x,t)/\partial x = 1$, $\partial x(x,t)/\partial t = 0$, d. h. der zweite Summand in (2.17) verschwindet; dies reproduziert (2.16).

Umgekehrt ist klar, dass die beiden *lokalzeitlichen Ableitungen* in (2.14), (2.15):

$$\frac{\partial f(a,t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \quad (2.18)$$

im Allgemeinen verschieden sind, obwohl es sich um die gleiche Größe f (aber eben um verschiedene Abhängigkeiten) handelt. Deswegen muss man immer genau wissen, mit welcher Argumentliste man es gerade zu tun hat. Ganz vorsichtige Leute (z. B. die Autoren dieses Buches) schreiben daher die Argumentlisten explizit in die Ableitungen hinein (oder wenigstens in die Überschrift).

Wenn man in (2.14) einfach die Funktion $f(a,t)$ weglässt, bleibt die Gleichung als *Operatorgleichung* gültig. Dasselbe gilt für (2.15) und (2.17), wenn man $f(x,t)$ weglässt. Wir schreiben also den *Operator der totalzeitlichen Ableitung*:

$$\boxed{\text{Argumentliste } (a,t): \quad \frac{d}{dt} = \quad \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2.19)$$

und

$$\boxed{\text{Argumentliste } (x,t): \quad \frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2.20)$$

Damit lautet die oben gefundene FKG (2.13) für den Zusammenhang zwischen relativer zeitlicher Änderung des Partikelabstands und der Geschwindigkeitsdivergenz:

$$\boxed{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \frac{d\Delta x}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}} \quad (2.21)$$

Hier haben wir absichtlich die Argumentlisten fortgelassen. Für Sie als Kundigen ist klar, dass Δx von x^l, x^r abhängt, sodass $\Delta x \rightarrow 0$ dasselbe bedeutet wie $x^l \rightarrow x^r$ sowie, dass u von x, t abhängt. Und falls das einmal nicht ganz klar sein sollte, schreiben Sie eben die Listen explizit dazu.

2.2.4 Verallgemeinerung auf 2D

Wir haben in der vorstehenden Diskussion jedes Auto durch drei Angaben charakterisiert:

- Durch das Kennzeichen a – das ist eine Identitäts- oder Identifizierungscoordinate (man könnte auch Namenscoordinate sagen);
- durch seine Position x auf der Straße – das ist eine Raumcoordinate; und
- durch den Zeitpunkt, zu dem wir das Auto betrachten – das ist die Zeitcoordinate.

Wir wollen diese Begriffe auf mehr als eine Dimension verallgemeinern. Betrachten Sie etwa die Kugeln, die beim Ziehen der Lottozahlen zu Beginn in der Plexiglaschale liegen. Um diese zu identifizieren, geben wir jeder Kugel zwei Zahlen a, b , so wie in Bild 2.3 skizziert (nur einige sind gezeichnet, die fehlenden denke man sich dazu). Das entspricht der Vorstellung, dass die Kugeln zu Beginn der Bewegung in einem kartesischen Koordinatensystem sitzen und dort ihre Nummern bekommen.

Diese Teilchenkennzeichen a, b sind eine Verallgemeinerung unserer bisherigen Autokennzeichen. Man nennt sie auch *Nummerierungskordinaten* oder *Anfangskordinaten*, um auszudrücken, dass die Nummern der Kugeln ihrem Startwert entsprechen; eigentlich sollte man sie *Identitätskordinaten* nennen. In der theoretischen Fluidodynamik heißen diese Nummern *Lagrange-Kordinaten*. Sie bleiben den Teilchen erhalten, auch wenn sie nach Beginn der Bewegung alle durcheinander geraten sind. Zu jedem späteren Zeitpunkt ist ein Teilchen anhand seiner Lagrange-Kordinaten eindeutig identifizierbar.

Die Lage der Teilchen wird angegeben durch ihre *räumlichen Koordinaten* x, y . Zu einem bestimmten Zeitpunkt t hat also ein Teilchen (a, b) die Koordinaten

$$x = x(a, b, t) \quad y = y(a, b, t) \quad (2.22)$$

Die Raumkoordinaten erscheinen hier als Funktion der Lagrange-Kordinaten (man könnte es auch umgekehrt machen; jedoch ist die hier gewählte Reihenfolge üblich). Wir bezeichnen Gleichung (2.22) als *Transformation der Lagrange-Kordinaten auf die Raumkoordinaten*.

Die Ableitungen nach der Zeit sind die Komponenten der Geschwindigkeit in den gewählten Koordinaten:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x(a, b, t)}{\partial t} = u(a, b, t) = \dot{x} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y(a, b, t)}{\partial t} = v(a, b, t) = \dot{y} \quad (2.23)$$

Totale und partielle Zeitableitung fallen bei diesen Argumentlisten zusammen. Hier haben wir noch eine weitere Abkürzung eingeführt: Wir haben den Operator d/dt durch einen darüber gesetzten Punkt ersetzt. Das ist eine praktische und in der theoretischen Physik beliebte Kurzschreibweise für die totale Zeitableitung.

Um nun die fluiddynamische Kontinuitätsgleichung FKG (2.21) auf zwei Dimensionen zu verallgemeinern, betrachten wir die Fläche, welche die blauen Lottokugeln in Bild 2.3 einschließen:

$$\Delta A = (x^r - x^l) \cdot (y^h - y^v) \quad (2.24)$$

Die Fläche ΔA ist die 2D-Verallgemeinerung der Größe Δx , die wir in Bild 2.2 als Abstand der blauen Autos eingeführt hatten. Die zur Änderung von Δx in (2.21) äquivalente Größe ist die relative zeitliche Änderung von ΔA :

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta A} \frac{d\Delta A}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \quad (2.25)$$

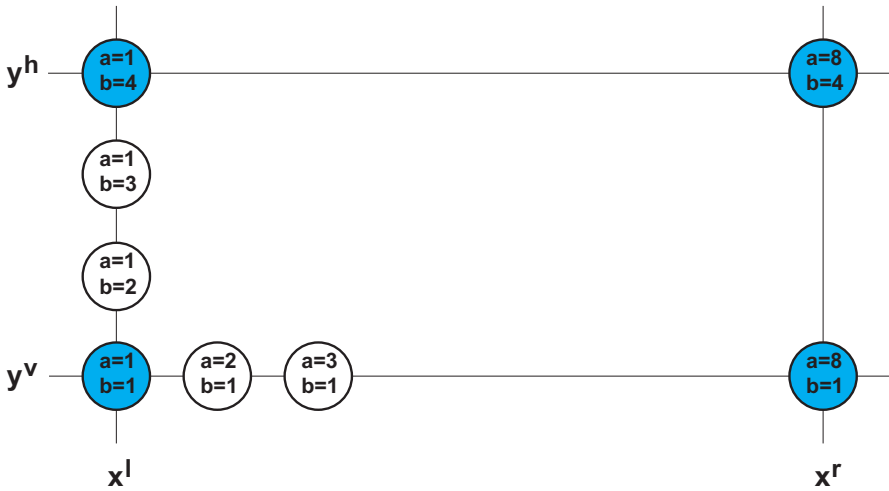


Bild 2.3 Nummerierung von Lottokugeln mit zwei Zahlen (a, b) , sog. *Lagrange-Koordinaten*; a wächst von links nach rechts, b von vorn nach hinten. Die Lagrange-Koordinaten sind für jede Kugel unveränderlich. Die zeitlich veränderlichen Raumkoordinaten (x, y) der Kugeln (nur für die blauen gezeichnet) sind am linken und rechten Rand x^l, x^r und am vorderen und hinteren Rand y^v, y^h .

Hier bedarf es keiner neuen Grenzwertbildung mehr. Die relative Flächenänderung ist gleich der Divergenz des horizontalen Geschwindigkeitsvektors; in der rechten Version haben wir wieder die Schreibweise mit dem Punkt benutzt.

In der Ableitung von (2.25) steckt ein mathematischer Trick – haben Sie den durchschaut? Wir nehmen das zum Anlass für eine weitere

Übungsaufgabe 2.2.1

Man beweise Formel (2.25) unter Verwendung von Formel (2.21) mit den Bezeichnungen von Bild 2.3.

Lösung

Wenn man den 1D-Spezialfall (2.21) nicht auf die x -Richtung (mit $\Delta x = x^r - x^l$) anwendet, sondern auf die y -Richtung, so ergibt sich auf äquivalente Weise:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta y} \frac{d\Delta y}{dt} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{mit} \quad \Delta y = y^h - y^v \quad (2.26)$$

Nun ist $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$. Dann gilt:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta A} \frac{d\Delta A}{dt} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \frac{d\Delta x}{dt} \right) + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta y} \frac{d\Delta y}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.27)$$

Was haben wir da gemacht? Wir haben die *relative Ableitung* (auch: *logarithmische Ableitung*) genutzt. Das ist eine effiziente Version der Produktregel. Das relative Differenzial einer beliebigen Größe f ist gleich dem Differenzial des Logarithmus:

$$\frac{df}{f} = d(\log f) \quad (2.28)$$

Wenn nun $f = F \cdot G$ das Produkt zweier anderer Größen ist, so folgt wegen $\log f = \log F + \log G$:

$$\frac{d(F \cdot G)}{F \cdot G} = \frac{dF}{F} + \frac{dG}{G} \quad (2.29)$$

Damit wurde die Umrechnung in (2.27) vollzogen und (2.25) gewonnen.

2.2.5 Die allgemeine FKG

Wir machen nun in drei Dimensionen Dasselbe: Wir schreiben in Verallgemeinerung der Operatorformeln (2.19), (2.20):

$$\text{Argumentliste } (a, b, c, t): \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.30)$$

und

$$\text{Argumentliste } (x, y, z, t): \quad \frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.31)$$

Die Bildung der totalzeitlichen Ableitung ist eine reine Fleißarbeit im Differenzieren mithilfe der Kettenregel (vgl. [38], dort Abschnitt *Formeln für Differentiale*). In Verallgemeinerung der Fläche (2.24) führen wir das Volumen

$$\Delta V = (x^r - x^l) \cdot (y^v - y^h) \cdot (z^o - z^u) \quad (2.32)$$

ein und geben den beiden Argumentlisten die allgemein üblichen Bezeichnungen:

$$\text{Argumentliste } (a, b, c, t): \quad \text{Lagrange-Koordinaten} \quad (2.33)$$

$$\text{Argumentliste } (x, y, z, t): \quad \text{Euler-Koordinaten} \quad (2.34)$$

Das Ergebnis lautet:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \quad (2.35)$$

Hier haben wir nur noch die Punktschreibweise benutzt. Für Sie als Kundigen ist klar, dass ΔV von $x^r, x^l, y^v, y^h, z^o, z^u$ abhängt, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ dagegen von x, y, z, t .

Die räumlichen Euler-Koordinaten (x, y, z) brauchen im übrigen nicht orthogonale kartesische Koordinaten zu sein. Es können Funktionen kartesischer Koordinaten sein oder auch physikalische Größen wie Druck oder Temperatur. Auch wir werden sogleich spezielle *generalisierte Koordinaten* benutzen. Alles, was man von den Euler-Koordinaten verlangt, ist ihre stetige Differenzierbarkeit nach den Lagrange-Koordinaten und nach der Zeit.

Formal ist die FKG (2.35) nichts als eine kompakte Feststellung von Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktionen x, y, z . Die FKG ist daher von großer Allgemeinheit, weil sie mit diesem Minimum an Voraussetzungen auskommt. Die Eigenschaft, deren Erhaltung sie garantiert, ist die Identität der Fluidpartikel. Sonst macht sie keine Erhaltungsaussagen, insbesondere nicht über die Masse. Die Gültigkeit der FKG würde nicht im Widerspruch stehen zu der (absurden) Situation, dass die Materie aus identifizierbaren Teilchen bestünde, die aber masselos wären.

Mit der Ableitung der Formeln (2.21), (2.25), (2.35) haben wir das oben formulierte Programm durchgeführt: die Verwertung der Kontinuumshypothese und ihre Umsetzung in Gleichungen, mit denen man rechnen kann. Die nicht mehr hinterfragte Annahme, im Kontinuum mit Fluidteilchen in beliebiger räumlicher und zeitlicher Auflösung rechnen zu können, erweist sich so als praktisches Instrument der Klimatheorie.

2.3 Geofluidkoordinaten

Rechtwinklige kartesische Koordinaten empfinden wir als das natürlich vorgegebene System, in dem man sich räumliche Strukturen vorstellt. Denn das Verständnis der Dimensionen gemäß Bild 2.4 gehört zur Schulbildung. Dieses orthogonale kartesische Denken unserer Kultur ist beispielsweise tief im Gehirn des praktischen Handwerkers verwurzelt. In diesen Koordinaten vermisst er Parzellen und Grundstücke, orthogonal berechnet man am Bau die Fläche von Fußböden und Wänden, rechtwinklig zur Erdoberfläche steigen die Jahrhunderte alten Dome ebenso in die Höhe wie heute die Hochhäuser. Ein ordentliches Haus wird rechtwinklig gebaut. Wenn man am Bau von der Orthogonalität abweicht (wie es die Bienen mit ihren Waben, wie es aber auch manche moderne Architekten tun), hat man nachher Schwierigkeiten, einen gewöhnlichen rechtwinklig gefertigten Kleiderschrank im Zimmer aufzustellen.

Dabei ist das kartesische mit seinen geraden Koordinatenlinien keineswegs das einzige als natürlich empfundene Bezugssystem. Wer auf den sieben Meeren unterwegs ist, navigiert nicht mit Abständen, die in Kilometern gemessen werden, sondern mit geographischer Länge und Breite, und das sind Winkel, und die Ko-

**Dreifach ist des Raumes Maß:
Rastlos fort ohn Unterlaß
Strebt die Länge, fort ins Weite
Endlos gießet sich die Breite,
Grundlos senkt die Tiefe sich.**

Bild 2.4 Aus *Spruch des Konfuzius* von Friedrich von Schiller (1759-1805).

ordinatenlinien sind zusätzlich gekrümmt. Und der Segelflieger, der die Höhe über Grund wissen will, bekommt sie aus dem Variometer, und das misst nicht die Höhe, sondern den Luftdruck.

Der Theoretiker steht also vor der Aufgabe, andere Koordinaten als die gewohnten kartesischen bereitzustellen.

2.3.1 Generalisierte Koordinaten

Nun sind ja andere Koordinaten für uns nichts Neues – oben haben wir bereits in Formel (2.22) die Lagrange-Koordinaten auf die kartesischen Raumkoordinaten transformiert. Allgemein lautet diese Transformation

$$x = x(a, b, c, t) \quad y = y(a, b, c, t) \quad z = z(a, b, c, t) \quad (2.36)$$

Um andere Koordinaten einzuführen, machen wir uns die Unwissenheit der kartesischen Koordinaten zunutze. Unwissenheit? Die Komponenten des Ortsvektors *wissen* ja sozusagen nichts von ihrer Eigenschaft, gerade *kartesisch* zu sein. Wir wollen uns zwar x, y, z auch weiter als kartesisch vorstellen. Aber die Formel (2.35) bleibt gültig, wenn wir diese Koordinaten als irgendwelche, eben als *generalisierte Koordinaten*, interpretieren, die wir dann einfach nur anders nennen.

Also: Wir ersetzen x, y, z durch λ, μ, p . Mit der Bezeichnung

$$\boxed{\Delta V^* = \Delta \lambda \cdot \Delta \mu \cdot \Delta p} \quad (2.37)$$

lautet Gleichung (2.35) entsprechend:

$$\lim_{\Delta V^* \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta V^*} \frac{d\Delta V^*}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \quad (2.38)$$

Das *generalisierte Volumen* ΔV^* hat die Eigenschaft, dass die in ihm befindlichen Teilchen nicht herauskönnen. Sie können sich frei bewegen, aber das Volumen folgt ihnen überall hin und verformt sich dabei. Man nennt daher ΔV^* auch ein *flüssiges Volumen*.

Weiter haben wir gesagt: die Koordinaten x, y, z und λ, μ, p *wissen nicht*, was sie bedeuten. Aber wir müssen das natürlich wissen: Wir müssen die formale Umbenennung von x, y, z in λ, μ, p mit Inhalt füllen. Das machen wir sogleich (zunächst nur für die rechte Seite, die *generalisierte Divergenz*; diese bezeichnen wir mit *DIV*).

2.3.2 Sphärische Polar- plus Druckkoordinaten

Die horizontalen Komponenten λ, μ unserer generalisierten Koordinaten sind eng verwandt mit den sphärischen Polarkoordinaten oder einfach *geographischen Koordinaten* Länge λ und Breite φ . Die zugehörigen Koordinatenlinien auf der Kugel-

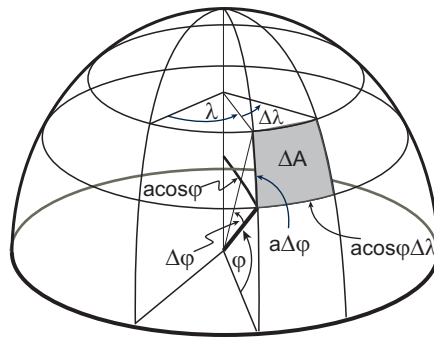


Bild 2.5 Flächendifferenzial auf der Kugeloberfläche (Radius a).

oberfläche sind zwar gekrümmt, aber λ und φ stehen überall senkrecht aufeinander, also auch λ und μ , d. h. die Orthogonalität bleibt erhalten. Die Verwandtschaft ist gegeben durch:

$$\mu = \sin \varphi \quad \text{mit} \quad d\mu = (d\mu/d\varphi)d\varphi = \cos \varphi d\varphi \quad (2.39)$$

Daraus ergibt sich für die generalisierte Divergenz rechts in (2.38):

$$DIV = \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial (\cos \varphi \dot{\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}. \quad (2.40)$$

Der Umstand, dass hier der Cosinus der Breite auftaucht, der zum Pol hin auf null abnimmt, repräsentiert die sogenannte *Meridiankonvergenz*. Die geographischen Koordinaten haben also nicht ganz die bestechende Einfachheit des Divergenzausdrucks (2.38) der generalisierten Koordinaten. In diesen ist die Meridiankonvergenz natürlich auch vorhanden, aber nicht sichtbar; sie ist im Sinus der Koordinate μ versteckt. Die mittlere Schreibweise von DIV nennen wir die *exakte*, die rechte die *geographische* Schreibweise der generalisierten Divergenz (exakt sind beide).

Als Nächstes fragen wir, wie die Grundfläche eines Quaders auf der Kugel aussieht; man nennt dies das *Oberflächenelement* auf der Kugel. Nach Bild 2.5 greifen wir ein kleines Rechteck auf der Kugeloberfläche heraus, das durch zwei Längengradbögen (in meridionaler Richtung) mit dem Längenabstand $\Delta \lambda$ und zwei Breitenkreisbögen (in zonaler Richtung) mit dem Breitenabstand $\Delta \varphi$ gekennzeichnet sei. a sei der Erdradius; dann ist $a \cos \varphi$ der Radius des Breitenkreises in der geographischen Breite φ , und dann haben die Seiten dieses Rechtecks

- auf dem Breitenkreis die geometrische Gesamtlänge $a \cos \varphi \Delta \lambda$;

- auf dem Längengrad die geometrische Gesamtlänge $a\Delta\varphi$.

Der geometrische Flächeninhalt des im Bild grauen Rechtecks ist also

$$\Delta A = a \cos \varphi \Delta \lambda \cdot a \Delta \varphi = a^2 \Delta \lambda \underbrace{\cos \varphi \Delta \varphi}_{=\Delta \mu} \quad (2.41)$$

Wenn man $\Delta\lambda, \Delta\varphi$ beliebig klein macht, so kann man das Differenzensymbol Δ hier überall durch das Differenzialsymbol d ersetzen. Die entsprechend modifizierte Formel (2.41) bezeichnen wir als das *Flächendifferenzial* auf der Kugeloberfläche.

$$dA = a^2 d\lambda \underbrace{\cos \varphi d\varphi}_{=d\mu} = a^2 d\lambda d(\sin \varphi) = a^2 d\lambda d\mu. \quad (2.42)$$

Also: in den Koordinaten λ, μ hängt das Flächendifferenzial nicht von $\cos \varphi$ ab, d. h. es ist in jeder geographischen Breite gleich. Das ist übrigens der Grund, weshalb wir alle globalen Karten in diesem Buch in eben diesen Koordinaten darstellen.

Die Kombination λ, φ, p der horizontalen geographischen Koordinaten mit p als vertikaler Koordinate wollen wir ebenso wie λ, μ, p , einheitlich als *Geofluidkoordinaten* bezeichnen; ab jetzt denken wir nur noch in Geofluidkoordinaten.

Eine Eigenschaft der Geofluidkoordinaten liebt aber der Theoretiker so wenig wie der Praktiker, und am wenigsten jemand, der mit Datenauswertung befasst ist: $\dot{\lambda}$ und $\dot{\mu}$ bzw. $\dot{\lambda}$ und $\dot{\varphi}$ sind Winkelgeschwindigkeiten. Man will lieber „ehrliche“ Geschwindigkeiten haben, denn lokal wird der Windvektor als $\mathbf{V} = (u, v)$ gemessen und in der Einheit m/s in den Archiven gespeichert.

Wie kommen wir zu Windkomponenten? Durch Erweitern mit dem (als konstant angenommenen) Erdradius a und mit $\cos \varphi$ wird (2.40) zu

$$DIV = \frac{\partial (a \cos \varphi \dot{\lambda})}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial (\cos \varphi a \dot{\varphi})}{\cos \varphi a \partial \varphi} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \quad (2.43)$$

Man führt nun weiter für die Geschwindigkeiten die Abkürzungen ein:

$$a \cos \varphi \dot{\lambda} = u \quad a \dot{\varphi} = v \quad \dot{p} = \omega \quad (2.44)$$

Mit den zusätzlichen Abkürzungen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \lambda} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{a \partial \varphi} \quad (2.45)$$

nimmt (2.43) die Form an:

$$\boxed{DIV = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial (\cos \varphi v)}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p}} \quad (2.46)$$

Der horizontale Strömungsvektor $\mathbf{V} = (u, v)$ repräsentiert die angestrebten „ehrlichen“ Geschwindigkeitskomponenten in den *lokal kartesischen* Koordinaten x, y .

Der Zusatz „lokal“ ist hier wichtig, denn x und y sind zwar weiterhin orthogonal und bleiben dies auch auf der ganzen Erde. Aber sie sind völlig verschieden von den ursprünglichen kartesischen Koordinaten x und y aus Formel (2.36). Und: die Koordinatenlinien, also die Breiten- und Längengrade, sind gekrümmt und wegen dieser Eigenschaft sozusagen nur halbe kartesische Koordinaten. Insbesondere ist x , obwohl man damit gut rechnen kann, keine „ehrliche“ Koordinate, sondern eine *Pseudokoordinate*, Pseudo wegen $dx/dt \neq u$. Das zeigt sich u. a. daran, dass man nicht die Koordinaten x, y selbst definiert, sondern nur mittels (2.45) die Operatoren der mit ihnen definierten Ableitungen.

Trotz dieser Einschränkungen arbeitet man in der Praxis dennoch gern mit diesen lokal kartesischen Pseudokoordinaten. Zu allem Überfluss schreibt man die horizontale Divergenz auf der Kugeloberfläche auch noch in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \cos \varphi v}{\cos \varphi \partial y} = \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \text{d. h.} \quad DIV = \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (2.47)$$

Der Ausdruck $\nabla \cdot \mathbf{V}$ ist eine pseudo-horizontale Divergenz für den horizontalen Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{V} = (u, v)$; in ihr ist die Meridiankonvergenz implizit enthalten. Wenn man peinlich genau den Knigge für den Umgang mit dieser pseudo-horizontalen Divergenz beachtet, kann man damit zuverlässig rechnen.

In Geofluidkoordinaten gibt es also für die 3D-Divergenz vier äquivalente Schreibweisen: (2.40), (2.46) und (2.47). Alle vier liefern dasselbe Ergebnis (und alle vier sind gleichermaßen exakt). Die zugehörigen Operatoren der zeitlichen Ableitung lauten:

$$\text{Argumente } t, \lambda, \mu, p \text{ (exakt):} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.48)$$

$$\text{Argumente } t, \lambda, \varphi, p \text{ (geogr.):} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.49)$$

$$\text{Argumente } t, x, y, p \text{ (lokal kart.):} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{p} \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.50)$$

$$\text{Argumente } t, x, y, p \text{ (Kurzform):} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad (2.51)$$

Trotz ihrer unterschiedlichen Bedeutung sind sie formal identisch (und ebenfalls alle exakt).

Hier fragen Sie vielleicht: Wo ist denn plötzlich die Meridiankonvergenz geblieben? Wenn t, x, y, p Pseudokoordinaten sind, muss diese doch sichtbar sein, oder? Die Antwort lautet: die Meridiankonvergenz ist im Operator der Zeitableitung gar nicht enthalten. Sie ist nur in der Divergenz enthalten. Bei der totalen Zeitableitung darf es keine Meridiankonvergenz geben. Dem Operator d/dt ist der physikalische Gehalt der Koordinaten gleichgültig, er kennt nur die Argumentliste.

Das akzeptieren Sie gerade noch, aber Sie lassen nicht locker: Wenn t, x, y, p irgendwelche Koordinaten sind, die nun einmal so heißen, dann mögen zwar (2.50)

und (2.51) in Ordnung sein. Aber dann ist auch unbedingt $\dot{x} = u$. So, sagen Sie, und jetzt haben wir den Widerspruch, denn oben bei der Definition der Pseudokoordinaten war ja ausdrücklich $dx/dt \neq u$ gefordert worden.

Das trifft zu, aber das ist kein Widerspruch, denn wir müssen eben mit der Definition der Pseudokoordinaten Ernst machen. Wenn wir in (2.50) und (2.51) die allgemeine Koordinate x als Pseudokoordinate interpretieren wollen, dann dürfen wir das. Aber: dann müssen wir die Definitionen (2.44) und (2.45) auch ordnungsgemäß einsetzen. Machen wir das mal nur für die beiden horizontalen Richtungen¹, angewandt auf eine beliebige Größe f (denken Sie etwa an die Temperatur):

$$\mathbf{V} \cdot \nabla f = u \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = a \cos \varphi \dot{\lambda} \frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{a \cos \varphi \partial \lambda} + a \dot{\varphi} \frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{a \partial \varphi} \quad (2.52)$$

Im ersten Term rechts kann man durch $a \cos \varphi$ kürzen und im zweiten Term durch a . Ergebnis:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla f = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \dot{\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (2.53)$$

Links ist f Funktion von x, y , rechts von λ, φ . Damit wäre der scheinbare Widerspruch beseitigt: Pseudokoordinaten und geographische Koordinaten sind miteinander konsistent – einverstanden?

Mit Ihrem meteorologischen Vorwissen werden Sie instinktiv die Vertikalkoordinate p mit dem Druck identifizieren. Aber dazu besteht vorläufig kein Grund. An dieser Stelle könnte p auch noch beispielsweise die potentielle Temperatur bedeuten. Dass (und warum) p gerade der Druck sein muss, wird sich im nächsten Abschnitt herausstellen.

2.4 Massenerhaltung der Geofluide

Jetzt fehlt uns noch die linke Seite von (2.38), und sie führt uns zur eigentlichen Erhaltungsaussage dieses Kapitels: jene für die Masse der Geofluide. Für die globale Atmosphäre gilt, dass die Masse der Luft mit hoher Genauigkeit langfristig erhalten bleibt; das Gleiche gilt im Ozean. Die geringfügigen Verluste durch den Abfluss zum Weltraum oder den Gaszufluss durch vulkanische Tätigkeit sowie die Schwankungen in der Masse der Spurengase (Wasserdampf, Kohlenstoffdioxid, Methan) befinden sich unter der Messgenauigkeit und spielen für die Klimatologie keine Rolle. Hier haben wir es nur mit der Luft zu tun, deren Massengehalt wir als strikt konservativ behandeln.

Aber mit dieser Aussage lässt sich nicht viel anfangen. Vor allem lässt sich die *globale* Massenerhaltung nicht für *lokale* Massenhaushalte nutzen. Was heißt „lokal“? Damit ist hier kein Punkthaushalt gemeint, sondern der Massenhaushalt in einer bestimmten atmosphärischen Säule, beispielsweise über einer Stadt in China

¹ Weil wir den Erdradius a als konstant annehmen, tritt das Pseudokoordinatenproblem in Wirklichkeit nur bei x auf, jedoch nicht bei y (und schon gar nicht bei t oder p).

im Unterschied zu einer in Europa. Was wollen wir von einem solchen lokalen Massenhaushalt wissen? Wir wollen wissen, wieviel Luft in die Säule hinein und aus ihr herausfließt; daraus soll sich dann ergeben, wie stark die Luftmasse in der Säule sich zeitlich ändert. In Freiburg im Breisgau gibt es ein tagesperiodisches Windsystem, den *Höllentäler*, der regelmäßig für eine nächtliche Auffrischung der Stadtluft sorgt. Hier studiert man hochauflösende Profile der Haushalte von Masse und Strömungsfeld, um die Durchlüftung des Volumens zu modellieren (und vorherzusagen).

Um hier zu einer Gleichung zu kommen, sprechen wir die Massenerhaltung für ein endliches Volumen mit undurchlässigen beweglichen Wänden aus. Das ist nun gerade das in (2.37) definierte generalisierte Volumen ΔV^* ; wir haben es auch als flüssiges Volumen bezeichnet. Da alle Teilchen darin bleiben müssen, kann auch deren Masse sich nicht ändern.

Die Erhaltungseigenschaften, die man im Kontinuum formuliert, beruhen also auf der Erhaltung der Identität der Teilchen, und damit an der FKG in der Form (2.38). Für die erste Anwendung zeigen wir jetzt die Rolle von ΔV^* bei der Massenerhaltung.

2.4.1 Die hydrostatische Näherung

Die Rolle der Horizontalkoordinaten im Verständnis von (2.37) haben wir soeben besprochen. Was fehlt, ist die vertikale Koordinate. Da erinnern wir uns an das hydrostatische Gesetz (das mit sehr guter Näherung in allen Geofluiden gilt): die vertikale Druckänderung Δp ist der Masse ΔM proportional, wenn man diese auf die horizontale Grundfläche bezieht. Mit der (als konstant angenommenen) Schwerebeschleunigung g gilt:

$$\Delta p = \frac{g \cdot \Delta M}{\Delta A} \quad (2.54)$$

Das ist die hydrostatische Druckzunahme zwischen dem Oberrand und dem Untergrund eines Würfels mit dem Flächendifferenzial ΔA gemäß (2.41) als Grundfläche (Bild 2.6). Dieser Würfel ist ein flüssiges Volumen.

Damit können wir Δp und ΔA aus ΔV^* eliminieren. Mit (2.41) und (2.54) lautet (2.37):

$$\Delta V^* = \Delta \lambda \cdot \Delta \mu \cdot \Delta p = \frac{g}{a^2} \Delta M \quad (2.55)$$

Das Flächendifferenzial kürzt sich heraus! Die unscheinbare Gleichung (2.55) besagt: ΔV^* ist von selbst ein Maß für die Masse. Bei anderen Koordinaten ist das im Allgemeinen nicht so. Aber für hydrostatische Kugelkoordinaten gilt: *das generalisierte Volumen ist zur darin befindlichen Masse proportional*; der Proportionalitätsfaktor ist eine Konstante. Das ist der Grund, weshalb wir gerade diese Koordinaten gewählt haben.

Bei der allgemeinen Ableitung der Massenkontinuitätsgleichung MKG kann man dieser Abkürzung nicht folgen. Da kann man zwar für die in ΔV enthaltene Masse in Gleichung (2.35) deren Erhaltung ebenfalls fordern, denn auch $\Delta V = \Delta M/\rho$

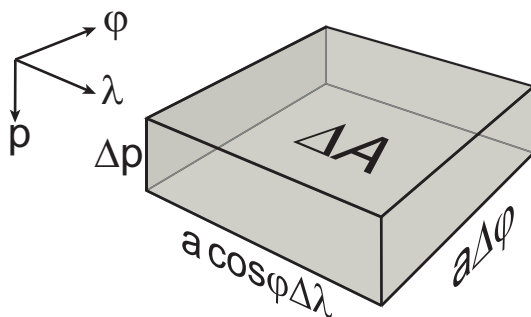


Bild 2.6 „Flüssiges Volumen“ in hydrostatischen Druckkoordinaten. Grundfläche gleich Flächen-differenzial $\Delta A = a^2 \cos \varphi \Delta \lambda \Delta \varphi$.

ist ein flüssiges Volumen. Aber die Dichte ist keine Konstante. So verbleibt man mit der allgemeinen MKG als Vektorgleichung in kartesischen Koordinaten, in der die Dichte explizit auftritt. Anschließend (oder auch vorher, in jedem Fall aber als unabhängigen Schritt) muss man von kartesischen auf generalisierte Koordinaten transformieren. So wird das in Lehrbüchern gemacht (vgl. z. B. [38]). Hier dagegen haben wir es vorgezogen, sogleich die FKG für unsere Geofluidkoordinaten auszusprechen – andere wollen wir sowieso nicht verwenden. Dabei kommen wir über die hydrostatische Gleichung ohne Umweg über die Dichte sofort zur Masse, eben weil der Druck in Wahrheit eine Massenkoordinate ist.

Die hydrostatische Näherung wird meist nicht in der Form (2.54) verwendet, sondern man schreibt mit der Vertikalkoordinate z :

$$\Delta p = -g \cdot \frac{\Delta M}{\Delta V} \cdot \Delta z \quad (2.56)$$

Das Minuszeichen drückt aus, dass p und z entgegengesetzt gerichtet sind. Wenn man hier nun den Grenzübergang vollzieht, wird (2.56) zu:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha} \quad (2.57)$$

Dies sind vielgebrauchte äquivalente Formen der hydrostatischen Näherung.

2.4.2 Die Massenkontinuitätsgleichung (MKG) der Geofluidе

Warum sind wir so sicher, dass das generalisierte Volumen ΔV^* in Geofluidkoordinaten ein flüssiges Volumen ist? Das sind wir deshalb, weil wir in der FKG (2.38) total nach der Zeit ableiten. Dabei bleiben alle Fluidelemente, die sich einmal in dem Volumen befunden haben, auch weiterhin darin.

Dann ist aber klar, dass auch die Masse ΔM in diesem Volumen bleibt und dass diese also zeitlich konstant ist. Das flüssige Volumen wandert gewissermaßen mit der Bewegung der Fluidteilchen mit, und es gehen keine Fluidteilchen über seine Grenzen. Wir erinnern hier an die Sorgfalt, mit der wir bei der Diskussion von Bild 2.2 darauf geachtet haben, dass das linke und das rechte blaue Auto die Autoschleife begrenzen und keine Autos dazwischen heraus können. Das ist hier in drei Dimensionen ebenso gemeint. Also:

$$\boxed{\frac{d\Delta M}{dt} = 0, \quad \text{und daher wegen (2.55):} \quad \frac{d\Delta V^*}{dt} = 0.} \quad (2.58)$$

Beide Aussagen sind bei hydrostatischen Geofluidkoordinaten λ, μ, p äquivalente Formulierungen der Massenerhaltung. Voraussetzung dafür ist das Konzept des flüssigen Volumens, das Grundlage der fluiddynamischen Kontinuitätsgleichung ist. Ohne die FKG kann man die Aussagen von (2.58) nicht machen.

Das Prinzip (2.58) der Massenerhaltung macht keine lokale, sondern eine globale Aussage. Sie gilt für jede (egal, ob kleine oder große) endliche Masse ΔM , die in dem endlichen Volumen ΔV^* enthalten ist. Ein Grenzübergang wie bei der FKG ist hier gar nicht notwendig.

Wenn wir das in die FKG (2.38) einsetzen, verschwindet die linke Seite immer, und zwar gleichgültig, wie groß ΔV^* ist. Dadurch wird der Grenzübergang von selbst erfüllt und liefert ebenfalls den Wert null. Dadurch verschwindet auch die rechte Seite. Das heißt, die oben in den vier verschiedenen Versionen formulierte generalisierte Divergenz DIV ist an jeder Stelle im Geofluid gleich null. Wir erhalten damit die *Massenkontinuitätsgleichung* MKG, hier für die Kurzfassung (2.47):

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0} \quad (2.59)$$

Das ist ein starkes Ergebnis, denn die MKG wird dadurch überhaupt unabhängig von der Masse (oder auch der Massendichte) des Fluids.

Die Massenerhaltung des Fluids in einem beliebig kleinen oder großen flüssigen Volumen hat somit zur Folge, dass die Masse in der MKG überhaupt nicht mehr vorkommt. Weil die Masse schon für jedes endliche Partialvolumen (2.37) konstant ist, wird dadurch in hydrostatischen Druckkoordinaten die Strömung dreidimensional divergenzfrei. Keine anderen Koordinaten haben diese Eigenschaft.

Bevor wir weitergehen: natürlich darf kein Zweifel daran bestehen, dass in (2.59) kein *Differenzenquotient* mehr steht, sondern ein *Differenzialquotient* – der Grenzübergang in der Divergenz ist in dieser Gleichung vollzogen; (2.59) gilt an jedem Punkt im Kontinuum. Das schließt insbesondere ein, dass damit auch gleichzeitig die Größen

$$\text{Massendichte } \rho = \frac{dM}{dV} \quad \text{und} \quad \text{spezifisches Volumen } \alpha = \frac{dV}{dM} \quad (2.60)$$

durch den gleichen Grenzübergang definiert sind. Wir haben also die für einen Punkt im Kontinuum definierte Massendichte automatisch mit eingeführt.

Die MKG (2.59) in Geofluidkoordinaten wird uns durch den Rest dieses Buches begleiten. Sie wird in jeder der noch zu besprechenden Erhaltungsgleichungen implizit enthalten sein.

2.4.3 Flussform der Zeitableitung

Für das praktische Arbeiten mit der MKG haben wir die Geofluidkoordinaten in vier verschiedenen äquivalenten Fassungen bereitgestellt:

- **Exakte Fassung:** λ, μ, p . Damit haben wir die MKG theoretisch begründet; in diesen Koordinaten plotten wir unsere flächentreuen Karten.
- **Geographische Fassung:** λ, φ, p . Diese braucht man auf der Erdoberfläche als geographische Länge und Breite.
- **Lokal kartesische Fassung:** $x = a \cos \varphi \lambda, y = a \varphi, p$, dazu die Ableitungen und die Geschwindigkeitskomponenten $u = a \cos \varphi \dot{\lambda}, v = a \dot{\varphi}, \omega = \dot{p}$. Diese Pseudokoordinaten sind am zweckmäßigsten in Erhaltungsgleichungen.
- **Kurzfassung:** hier ist $\mathbf{V} = (u, v)$ und $\nabla \cdot \mathbf{V}$ die 2D-Divergenz.

Die Zweckmäßigkeit der lokal kartesischen Pseudokoordinaten kommt deutlich in der Flussform der totalzeitlichen Ableitung zum Ausdruck. Diese kombiniert die jeweilige Ableitungsformel mit der MKG in der Form (2.59).

Um das zu durchschauen, betrachten wir eine beliebige Zustandsgröße f im Geofluid (denken Sie an die Temperatur oder an die spezifische Feuchte). Von der Argumentliste von f hängt die Schreibweise der totalzeitlichen Ableitung ab. Wenn f beispielsweise in der Form $f(t, \lambda, \mu, p)$ vorliegt, so ist df/dt durch (2.48) gegeben. Dazu addieren wir $f \cdot DIV = 0$ mit DIV gemäß Formel (2.40):

$$f \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + f \frac{\partial \dot{\mu}}{\partial \mu} + f \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = 0 \quad (2.61)$$

Die Summe lautet unter Beachtung der Produktregel in den exakten Koordinaten:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial f \dot{\mu}}{\partial \mu} + \frac{\partial f \dot{p}}{\partial p}. \quad (2.62)$$

Das nennt man die *Flussform der totalen Zeitableitung* von f .

Entsprechend geht das in der geographischen Schreibweise (2.49) oder in der x -Schreibweise (2.50) – bitte überzeugen Sie sich selbst. In der Kurzfassung gemäß (2.51) lautet (2.62):

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot f\mathbf{V} + \frac{\partial f \omega}{\partial p}} \quad (2.63)$$

Jede dieser vier äquivalenten Schreibweisen heißt Flussform von df/dt . Der zugehörige Knigge lautet

$$\nabla \cdot f\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.64)$$

Das ist die gewöhnliche Vektorformel für die Divergenz eines Vektors, der selbst das Produkt aus einem Skalar (f) und einem Vektor (\mathbf{V}) ist. Wenn man also die Definition (2.47) für die Divergenz unseres Vektors in den Geofluidkoordinaten beachtet, verhalten sich diese Pseudokoordinaten so, dass die normale Vektorrechnung ihre Gültigkeit behält. Die anschauliche Bedeutung von $f\mathbf{V}$ besteht darin, dass dieser Vektor der Horizontalstrom der Eigenschaft f ist; die zugehörige Vertikalkomponente dieses Stromes ist $f\omega$.

Wenn Ihnen die Konstruktion der Pseudokoordinaten inexact oder sogar überflüssig erscheinen sollte, so können Sie jederzeit zu der exakten Schreibweise (2.62) zurückkehren. Wir geben uns hier zufrieden mit dem Ergebnis, dass alle Schreibweisen äquivalent und exakt sind und das gleiche Ergebnis erbringen. Daher bevorzugen wir im folgenden die kürzeste, und das ist (2.63) mit der Rechenregel (2.64).

2.5 Prototyp der Klimahaushaltsgleichung

Die Erhaltungsaussagen der Geofluidformuliert man mit der Kontinuumshypothese; dabei wird die jeweilige Erhaltungseigenschaft mit der *fluidodynamischen Kontinuitätsgleichung (FKG)* kombiniert (vgl. z. B. [34]). Diese liefert den Zusammenhang zwischen dem Fluidvolumen, der Fundamentaldeterminante der Transformation von Identitätskoordinaten auf die gewählten Raumkoordinaten, den Geschwindigkeiten im jeweiligen Koordinatensystem und der zugehörigen Divergenz. Die FKG ist unabhängig von anderen Erhaltungsaussagen, insbesondere von der Massenerhaltung (vgl. [38]).

Wir haben oben die FKG in verkürzter Form für *Geofluidkoordinaten* abgeleitet. Das hat uns gestattet, sogleich zur hydrostatischen *Massenkontinuitätsgleichung (MKG)* in Geofluidkoordinaten überzugehen. Dadurch haben wir die Standard-MKG (2.59) für Klimadiagnosen und Klimamodelle gewonnen; mit ihr wollen wir in den folgenden Kapiteln die weiteren Erhaltungsgleichungen (Impuls, Energie etc.) ausdrücken. In diesem Abschnitt verschaffen wir uns dazu den Prototyp der Klimahaushaltsgleichung.

2.5.1 Das globale Transporttheorem

Inbegriff eines diskreten Haushalts ist die globale Transportgleichung, wie sie in den Lehrbüchern eingeführt wird ([39, 40, 38]). Der Gedanke setzt inhaltlich auf den drei Termen der Klimaformel auf (ohne deswegen exakt die Terminologie von (1.1) zu verwenden). Wir stellen das kurz wie folgt dar.

Die Transportgleichung wird für eine massenspezifische Zustandsgröße a ausgedrückt:

$$a = \frac{\text{Eigenschaft}}{\text{Masse}} \quad \text{z. B.} \quad \text{Eigenschaft} = \text{Energie, d. h. } [a] = \frac{\text{J}}{\text{kg}} \quad (2.65)$$

Die zugrunde liegende Eigenschaft ist eine mengenartige Größe, etwa die Energie, oder die Masse (auch die Menge selbst), der Impuls oder noch andere Größen. Als Bezugsgröße in (2.65) haben wir für a die Masse gewählt; man kann aber auch das Volumen oder die Menge wählen. Gleichzeitig ist in der Definition von a bereits die Kontinuumshypothese untergebracht; diese wird in vielen Darstellungen der Transportgleichung nicht in Frage gestellt, sondern gleich zu Beginn als Selbstverständlichkeit vorausgesetzt.

Nun fragt man nach dem Schicksal, das die Zustandsgröße a erfährt. Die gesamte in einem vorgegeben Volumen (dem *System*) enthaltene Eigenschaft ist

$$\int_M a \, dM \quad (2.66)$$

Die Integration ist *über die Masse* zu erstrecken. Die Gesamteigenschaft ist jetzt eine Funktion der Zeit, und ihre zeitliche Änderung ist die

$$\text{Speicherung} \quad S = \frac{d}{dt} \int_M a \, dM \quad (2.67)$$

Die Zustandsgröße kann sich auch räumlich ändern, und zwar dadurch, dass etwas davon über den Rand des Volumen *abfließt* (das kann keine Masse sein, denn das Volumen ist ein flüssiges Volumen). Dieser (vorläufig unspezifizierte) Stromvektor sei \mathbf{J} . Der so entstehende Herausfluss aus dem Volumen heiße

$$\text{Abfluss} \quad A = \int_O \mathbf{J} \cdot d\mathbf{O} \quad (2.68)$$

Die Integration ist *über die Oberfläche* O des Systems zu erstrecken. Die Länge des Vektors $d\mathbf{O}$ ist gleich dem Oberflächenelement; seine Richtung ist an jeder Stelle senkrecht zur Oberfläche von innen nach außen (dadurch wird gleichzeitig das Vorzeichen von A definiert).

Schließlich kann sich die Zustandsgröße stofflich dadurch ändern, dass im Inneren des Volumens etwas von diesem Stoff in einen anderen *umgewandelt* wird. Diese (ebenfalls zunächst unspezifizierte) Größe wird vielfach Quelle Q genannt und von den Einheiten her passend gewählt. Die so entstehende Größe heißt in unserer Terminologie

$$\text{Umwandlung} \quad U = \int_V (-\rho Q) \, dV \quad (2.69)$$

Die Integration ist *über das Volumen* zu erstrecken. ρ ist die Massendichte, die man meist nicht in die Definition von Q hereinnimmt. Das Vorzeichen kommt dadurch zustande, dass wir in unserer Darstellung den neutralen Begriff der Umwandlung bevorzugen; das ließe sich (ohne Minuszeichen) auch dadurch erreichen, dass man Q mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert und diese Größe „Senke“ nennt.

Andere Möglichkeiten der Änderung der Gesamteigenschaft in einem System sieht die Wissenschaft offenbar nicht. Daraus folgt, dass die drei eben definierten Größen zusammen gleich null sein müssen:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_M a \, dM + \int_O \mathbf{J} \cdot d\mathbf{O} + \int_V (-\rho Q) \, dV = 0} \quad (2.70)$$

Das ist das *allgemeine Transporttheorem* in einer seiner vielen Formulierungen [33, 34], hier in globaler Schreibweise. Konzeptionell ist es mit unserer Klimaformel (1.1) identisch.

2.5.2 Das lokale Transporttheorem

Warum haben wir das globale Transporttheorem nicht überhaupt an den Anfang gestellt anstatt Formel (1.1)? Ist das nicht eine unnötige Wiederholung desselben Konzepts? Der Unterschied liegt darin, dass in (1.1) so gut wie keine konkreten Eigenschaften des Haushalts genannt sind, während (2.70) bereits nähere, bisweilen gar nicht hinterfragte, Spezifizierungen von Zustandsgröße und Umwandlungsraten enthält.

Die wichtigste nicht hinterfragte Zutat von (2.70) ist die gleich zu Anfang implizit benutzte Kontinuumshypothese; sie besteht darin, dass ohne Begründung die spezifischen Größen a und ρ eingeführt werden, deren Existenz für jeden ausdehnungslosen Punkt im Raum angenommen wird. Sie sollen das beim Lesen gar nicht merken, sondern diese wichtige Hypothese kritiklos hinnehmen.

Wenn wir diese Größen, ausgestattet mit der Kontinuumshypothese, jetzt ebenfalls hinnehmen, lässt sich feststellen: (2.70) verknüpft drei verschiedene Integrale: eines über die Masse, eines über die Oberfläche und eines über das Volumen. Um diese vergleichbar zu machen, muss man sie umformen.

Beim Massenintegral geht das wie folgt: man zieht den Operator d/dt in das Integral hinein und beachtet dabei, dass er nur auf a wirkt, nicht jedoch auf dM (weil es ein flüssiges Volumen ist). Anschließend wandelt man mit $dM = \rho \, dv$ gemäß (2.60) das Massenintegral in ein Volumenintegral um.

Das Oberflächenintegral in (2.70) lässt sich mit dem Gaußschen Integralsatz für einen beliebigen Vektor \mathbf{J}

$$\int_O \mathbf{J} \cdot d\mathbf{O} = \int_V \nabla_3 \cdot \mathbf{J} \, dV \quad (2.71)$$

ebenfalls in ein Volumenintegral umwandeln².

Dadurch wird (2.70) zur Summe dreier Volumenintegrale. Da das Volumen aber nicht spezifiziert (d. h. willkürlich) ist, kann man das Verschwinden sogleich für den Integranden fordern:

² In (2.71) und (2.72) hat ∇_3 (mit Index 3) die Bedeutung des dreidimensionalen Nabla-Operators; sonst in diesem Buch bezeichnet ∇ stets den horizontalen Nabla-Operator auf der Druckfläche.

$$\rho \frac{da}{dt} + \nabla_3 \cdot \mathbf{J} - \rho Q = 0 \tag{2.72}$$

Das ist das *allgemeine Transporttheorem* in lokaler Schreibweise (vgl. z. B. Formel (24.9) in [38]). Es gilt, ebenso wie die obige MKG, an jedem ausdehnungslosen Punkt im Kontinuum.

In der allgemeinen Form von (2.72) ist das Transporttheorem noch nicht als Prototyp einer Klimahaushaltsgleichung geeignet. Unsere nächste Aufgabe ist daher:

- die Zustandsgröße a zu spezifizieren (Beispiel Feuchtehaushalt: $a = q = \rho_D / \rho =$ spezifische Feuchte; $\rho_D =$ Dichte des Wasserdampfs in der Luft);
- den Stromvektor \mathbf{J} zu spezifizieren (Beispiel Feuchtehaushalt: $\mathbf{J} = 0$);
- die Umwandlungsrate $-Q$ (oder die Quelle Q) zu spezifizieren (Beispiel Feuchtehaushalt: $Q = Q^q =$ Verdampfungsrate in der Luft).

Warum gibt es beim Wasserdampf keinen Stromvektor? Diesen gibt es in der Tat nicht in der Form von \mathbf{J} , sehr wohl aber in Form des advektiven Stromes (der in da/dt versteckt ist).

Für diesen einfachsten Spezialfall notieren wir das Transporttheorem in hydrostatischen Druckkoordinaten:

$$\frac{dq}{dt} = Q^q \quad \text{oder} \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot q\mathbf{V} + \frac{\partial q\omega}{\partial p} - Q^q = 0. \tag{2.73}$$

Hier ist $q\mathbf{V}$ der Strom von q in horizontaler und $q\omega$ der in vertikaler Richtung.

2.6 Die Moden der Klimaformel

Unsere allgemeine Klimaformel (1.1) kann man in unterschiedlicher Weise nutzen; dabei kommt es darauf an, welche der drei Größen als bekannt angesehen werden.

	vorgegeben	mit (1.1) folgt
DIAGNOSTISCHER MODUS		
Idealer diagnostischer Modus	S, A, U	Fehler
Residuenmethode	S, A	U
Residuenmethode	S, U	A
PROGNOSTISCHER MODUS	A, U	S

Nach dieser Tabelle wollen wir zwei charakteristische Moden unterscheiden: den *diagnostischen* und den *prognostischen* Modus.

2.6.1 *Der diagnostische Modus*

Im diagnostischen Modus gelten S sowie zusätzlich A oder U (oder beide) als bekannt. Im Idealfall sind alle drei bekannt; sonst verwendet man die Residuenmethode. Wir betrachten kurz diese beiden Unterformen.

2.6.1.1 Residuenmethode

Was machen Sie, wenn Sie nicht alle Terme von (1.1) kennen? Was denken Sie beispielsweise, wenn Sie morgens an der Wand zum Badezimmer im Haus einen feuchten Fleck sehen? Dann kennen Sie, haushaltsmäßig betrachtet, nur die Größe S , denn Sie sehen ja an dem Fleck, dass der Wassergehalt der Wand seit gestern zugenommen hat, S also positiv sein *muss*. Dann *muss* A negativ sein, es *muss* also einen Zufluss von Wasser in die Wand hinein geben. Jeder vernünftige Mensch argumentiert so, auch ganz ohne Kenntnis von (1.1). Das Wort *muss*, das wir hier instinktiv gebraucht haben, ist verräterisch: Wir haben, ohne lange nachzudenken, die Klimaformel angewendet (die sich offenbar im Hinterkopf befindet).

Wir können mit der Analyse des feuchten Flecks noch einen Schritt weiter gehen: zunächst einmal haben wir ja soeben, auch instinktiv, den Umwandlungsterm U weggelassen, weil ja Wasser nicht erzeugt und nicht vernichtet werden kann. Das heißt, wir haben als Klimagleichung die Version

$$S + A = 0 \quad (2.74)$$

benutzt. Aus der Beobachtung der Zunahme von Wasser in der Wand (positives S) haben wir auf die notwendige Existenz der Zuflussrate (negatives A) geschlossen. D. h. wir haben A aus (2.74) als Residuum bestimmt.

Aber jetzt gehen Sie doch als vernünftiger Hausbesitzer hin und stellen erst einmal den Haupthahn im Keller ab, damit die Wand nicht total durchlässt wird. Dann gibt es keinen Zufluss mehr, A in (2.74) wird null, und S daher ebenfalls.

Wirklich? Am nächsten Morgen sehen Sie, dass der feuchte Fleck kleiner geworden ist. Also war S offenbar doch nicht null, sondern negativ. Das ist natürlich wünschenswert, aber: der Haupthahn war geschlossen, daher muss A null gewesen sein – offenbar ist die Klimagleichung doch falsch?

Nein: was falsch war, ist die Vernachlässigung von U . Denn die Wand trocknet ganz einfach, d. h. das Wasser wandelt sich in unsichtbaren Dampf um, und damit lautet unsere Klimagleichung nach dem Abdrehen des Haupthahns richtig:

$$S + U = 0 \quad (2.75)$$

Wie vorher: wir haben U aus (2.75) als Residuum bestimmt. Was ist das Gemeinsame von beiden Methoden? In beiden Fällen wird die fehlende Größe (im ersten Fall A , im zweiten Fall U) aus einem Spezialfall von (1.1) als Residuum erschlossen.

Hier werden Sie schmunzeln und sagen, das ist eigentlich eine überflüssige wissenschaftliche Analyse des feuchten Flecks an der Wand. Richtig – dafür braucht

kein Praktiker die Klimagleichung. Es ist aber das Modell für tiefer liegende Analysen von verwickelteren Zusammenhängen. Der Umstand, dass wir das Problem des feuchten Flecks mit instinktiver Selbstverständlichkeit behandeln, zeigt nur, wie tief das Haushaltsprinzip in unserem alltäglichen Denken verankert ist.

Der Gedanke der Residuenmethode besteht darin, *nicht beobachtbare* Glieder im Haushalt durch *beobachtete* Glieder *plus Formel* (1.1) abzuschätzen; die gesuchte Größe stammt nicht direkt aus Beobachtungen, sondern wird indirekt aus dem Haushalt erschlossen. Damit wird aber die Gültigkeit der Klimaformel erzwungen, d. h. (1.1) *steht zur Kontrolle nicht mehr zur Verfügung*. Mit diesem Ansatz haben Klimatologie, Hydrologie, Agrarmeteorologie und überhaupt viele Anwendungsgebiete unserer Wissenschaft seit jeher die nicht messbaren Größen gewonnen. Das werden sie auch weiterhin tun, aber auch hier streben wir weitere Fortschritte an.

2.6.1.2 Idealer diagnostischer Modus: Überbestimmung

Als Idealfall wollen wir die Forderung bezeichnen, dass alle Größen in der Klimaformel unabhängig voneinander aus Beobachtungen bestimmt werden müssen und dann alle zusammen null ergeben.

Dies ist praktisch nie erreichbar. Jede Messung, das lernt man im physikalischen Anfängerpraktikum, hat einen *Messfehler*. Keiner der drei unabhängig bestimmten Komponenten von (1.1) ist je exakt bekannt und daher kann (1.1) auch für keine einzige Konstellation jemals mathematisch exakt erfüllt sein. Wenn die mathematische Exaktheit eine unabdingbare Forderung wäre, müsste man am Konzept der Klimaformel und überhaupt am Gesetz der Haushaltsgleichung verzweifeln.

Aber gerade diese *scheinbare Unexaktheit* ist ein Vorzug der diagnostischen Arbeitsweise: Sie gestattet die Beurteilung der *Gesamtgenauigkeit* unseres Haushalts. Die Abweichung von null, die sich beim Einsetzen der drei Komponenten S , A und U in (1.1) ergibt, ist eine wesentliche Zusatzinformation beim Aufstellen eines diagnostischen Haushalts. Das Gewinnen dieser Zusatzinformation ist bei jeder praktisch durchgeführten Diagnose anzustreben.

2.6.2 Der prognostische Modus

Hier wird die Klimaformel nach der Speicherung S aufgelöst und als *Vorhersagegleichung* verwendet: durch Vorgabe von A und U wird die zeitliche Änderung S der zugehörigen Zustandsgröße bestimmt und so aus dem jetzt gegebenen und beobachteten Zustand in die Zukunft hinein vorhergesagt. Wir betrachten diesen Ansatz kurz etwas näher.

Dazu gehen wir zurück zu Bild 1.9 und zu Formel (1.13). Der Speicherterm S ist die Differenz der Zustandsgröße (die wir jetzt Z nennen wollen) zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 (die Differenz nennen wir Δt), also:

$$\frac{Z(t_2) - Z(t_1)}{t_2 - t_1} = -(A + U) \quad \text{oder} \quad Z(t_2) = Z(t_1) - \Delta t \cdot (A + U) \quad (2.76)$$

Wir nehmen an, dass wir A und U zum Zeitpunkt t_1 kennen; dann ist die rechte Seite von (2.76) zum Zeitpunkt t_1 bekannt und die linke Seite liefert die Vorhersage der Zustandsgröße Z zum Zeitpunkt t_2 . Der prognostische Modus ist also im Grunde ein weiterer Spezialfall der Residuenmethode. Aus der Perspektive des Diagnostikers ist das eigentlich ein Rückschritt.

Als Modellierer sehen Sie dies naturgemäß anders. Sie verweisen darauf, dass die Möglichkeit, eine Haushaltsgleichung als Vorhersagegleichung einzusetzen und damit Prognosen zu machen, den konzeptionellen Ansatz der Klimamodelle liefert. Klimamodelle sind mathematische Beschreibungen von Zustandsgrößen des Klimasystems im prognostischen Modus (siehe z. B. [17, 41]). Die großen Klimamodelle sind letzten Endes ein Satz von endlich vielen gekoppelten Gleichungen des Typs (2.76) für Zustandsgrößen der wichtigsten Stoffe des Klimasystems an diskreten Zeit- und Raumpunkten; die Vorhersage besteht darin, dass man diese algebraischen Gleichungen iterativ löst.

In diesem Buch betreiben wir keine Klimavorhersage. Das Problem der Klimaschwankungen und die Frage nach dem in der Zukunft zu erwartenden Klima führt über die Themen dieses Buches hinaus. Wir widmen uns im *Grundkurs Klima* zuerst der diagnostischen Aufgabe: das beobachtete Klima, repräsentiert durch seine Zustandsgrößen, zu erheben und auf Grundlage vollständiger Haushalte zu beschreiben.

2.6.3 *Der Modus der modernen Datenanalyse*

Den reinen diagnostischen Modus in der oben beschriebenen Form wird man so nicht verwenden. Das liegt daran, dass der prognostische Modus, in dem Klimamodelle betrieben werden, zunehmend auf die Methoden des diagnostischen Modus zurückgreift, d. h. die beiden Moden nähern sich zunehmend einander an. Dies ist bedingt durch die Fortschritte der numerischen Wettervorhersage der letzten Jahrzehnte, die entscheidend durch die Fortschritte der Diagnose bedingt wurde.

Einfach gesagt: je genauer die rechte Seite von (2.76) bestimmt ist, desto besser wird die Vorhersage sein. Die rechte Seite von (2.76) ist aber rein diagnostisch. Ihre Qualität kann man verbessern, wenn man die in der Vergangenheit gemachten Vorhersagen mit dem später eingetretenen Wetter vergleicht und den so beobachteten Fehler zur Verbesserung der ursprünglichen Diagnose nutzt. Das ist der fruchtbare Gedanke der „*background-Information*“, der in der modernen Datenanalyse umfassend eingesetzt wird. Diese Verbesserung der Diagnose, die eine natürliche Voraussetzung für eine Verbesserung der Prognose ist, hat ihrerseits stark auf die Qualität der „*rein*“ diagnostischen Verfahren zurückgewirkt. Man spricht heute nicht mehr von Diagnose, sondern von *Datenassimilation*.

Damit stehen wir an der Stelle, wo wir nach den Methoden dieser modernen Datenanalyse fragen müssen. Wir haben zu spezifizieren, wie der Klimazustand aus den Beobachtungen gewonnen und wie er durch die Haushaltsgleichungen überprüfbar gemacht wird. Dem ist das folgende Kapitel 3 gewidmet. In den anschließenden Kapiteln werden wir diese Verfahren auf ausgewählte Klimagrößen anwenden.



<http://www.springer.com/978-3-662-48192-9>

Grundkurs Klima

Hantel, M.; Haimberger, L.

2016, XVII, 404 S. 139 Abb., 111 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-48192-9