2 Funktionen

Lernziele

Dieses Kapitel vermittelt:

- wie die Abhängigkeit quantitativer Größen mit Funktionen beschrieben wird
- die erforderlichen Grundkenntnisse elementarer Funktionen
- grundlegende Eigenschaften von Funktionen
- die Anwendung von Funktionen im Rahmen ökonomischer Fragestellungen
- die Einführung des Grenzwertbegriffes

2.1 Definition und Darstellung von Funktionen

Sowohl in der Mathematik als auch in vielen Bereichen des täglichen Lebens werden oftmals Zahlen oder quantitativ erfassbare Größen zueinander in Beziehung gesetzt, so dass eine Abhängigkeit zwischen solchen Größen entsteht. Solche Zusammenhänge werden auf unterschiedlicher Weise hergestellt:

- durch experimentelle oder heuristische Methoden
- durch theoretische Modelle
- oder einfach durch willkürliche Festlegung.

Die folgenden Beispiele dienen einerseits der Illustration dieser Überlegungen, andererseits motivieren sie die Einführung des Konzeptes der Funktion.

Beispiele:

1. Die Abbildung einer Menge von Studenten auf ihre Mathematiknoten. Betrachten wir in einem bestimmten Kurs mit n Studenten die Liste der Noten der Mathematikklausur. Die Studenten bezeichnen wir mit $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Jeder Student kann eine Note zwischen 1,0 und 5,0 erzielen, wobei Zehntelnoten üblich sind. Es ergibt sich beispielsweise folgendes Klausurergebnis:

T. Holey, A. Wiedemann, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,* BA KOMPAKT,
DOI 10.1007/978-3-662-48143-1_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

Student	S_1	S_2	S_3	...	S_{n-1}	S_n
Note	2,2	2,7	3,5	...	2,2	1,6

Die Zuordnung Student $\longrightarrow$ Note kann als Menge geordneter Paare dargestellt werden:

$$(S_1; 2,2), (S_2; 2,7), (S_3; 3,5), \ldots (S_{n-1}; 2,2), (S_n; 1,6).$$

An dieser Zuordnung erkennt man folgende Sachverhalte, die für den Begriff Funktion charakteristisch sind:

- *Jeder* Student erhält *genau* eine Note zugeordnet.
- Im Allgemeinen kann der Fall auftreten, dass es mehrere Studenten gibt, die die gleiche Note haben (z.B. 2,2).
- Es müssen nicht sämtliche Noten des möglichen Notenspektrums erzielt werden. Das heißt, bei einem Klausurergebnis kann es vorkommen, dass die Noten 4,5 und 5,0 nicht vergeben werden.

2. Das Volumen einer Kugel als Funktion des Radius.
   Wie aus der Geometrie bekannt ist, berechnet sich das Volumen einer Kugel V_k in Abhängigkeit des Radius r zu

$$V_k = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

   Hier wird jedem Wert $r \geq 0$ genau ein Wert V_k zugeordnet.

Mit diesen Vorüberlegungen betrachten wir die Definition einer Funktion.

Definition **Funktion**

Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Ordnet man jedem Element der Menge M_1 eindeutig genau ein Element der Menge M_2 zu, so nennt man die dadurch gegebene Zuordnung eine **Funktion**.

Es darf nach dieser Definition bei einer Funktion kein Element in M_1 'übrig bleiben' und die Abbildung muss *eindeutig* sein. Dies bedeutet *nicht*, dass jedem Element aus M_1 ein anderes Element aus M_2 zugeordnet ist, sondern dass einem Element aus M_1 nicht zwei oder mehrere Elemente aus M_2 zugeordnet sind. Die Abbildung 2.1 zeigt die Zuordnung Student $\longrightarrow$ Note in

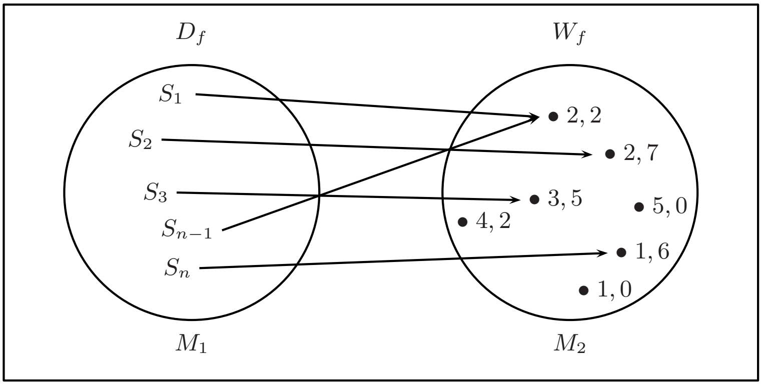

Abbildung 2.1. Darstellung der Funktion Student $\longrightarrow$ Note in Form eines Venn-Diagramms. Hierbei ist die Menge der Studenten eines Kurses $M_1 = D_f$ und die Menge der Noten ist $W_f \subset M_2$

Form eines Venn-Diagramms. Die Menge M_1 wird von den Studenten gebildet, d.h.:

$$M_1 = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n\}$$

und die Menge M_2 sind die erzielbaren Noten:

$$M_2 = \{1,0; 1,1; 1,2; \ldots; 4,9; 5,0\}.$$

Folgende Bezeichnungen sind im Zusammenhang mit der Definition einer Funktion von Bedeutung:

- Die 'linke' Menge M_1 aus der Abbildung 2.1, von der aus die Zuordnungspfeile ausgehen, nennt man **Urbildmenge** oder **Definitionsbereich** D_f der Funktion f.
- Die 'rechte' Menge M_2, in der die Zuordnungspfeile enden, wird als **Zielmenge** oder **Bildmenge** bezeichnet.
- Die Teilmenge von M_2, deren Elemente tatsächlich einem Urbild zugeordnet werden, nennt man **Wertebereich** W_f der Funktion f.

Funktionen können in verschiedenen Formen dargestellt werden:

1. In Form eines Venn–Diagramms, wie in Abbildung 2.1.
2. Als Menge von geordneten Paaren:

$$f = \{(S_1; 2,2), (S_2; 2,7), (S_3; 3,5), \ldots (S_{n-1}; 2,2), (S_n; 1,6)\}$$

   wie im Beispiel 1.

3. Funktionen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden häufig in Form einer Abbildungsvorschrift dargestellt:

$$\begin{aligned} f\ : D_f &\longrightarrow W_f, \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

   Der *maximal zulässige Definitionsbereich* umfasst alle möglichen Werte x, für die $f(x)$ definiert ist.

4. Als Darstellung im Koordinatensystem:

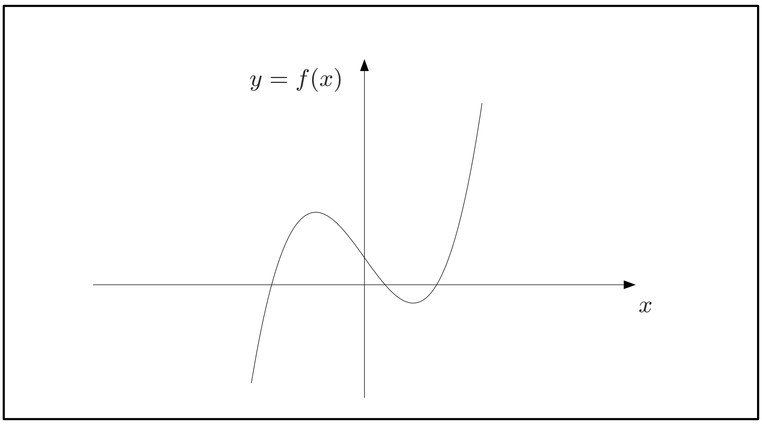

Abbildung 2.2. Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem

   Die unabhängige Variable wird auf der x–Achse (Abszisse) dargestellt, die abhängige Variable auf der y–Achse (Ordinate).

2.2 Einige elementare Funktionen

In diesem Abschnitt sehen wir uns eine Reihe elementarer Funktionen etwas näher an und rekapitulieren die wesentlichen Eigenschaften.

2.2.1 Lineare Funktion

Die lineare Funktion ist eine Abbildung der Form

$$f\ :\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f\ :x \longmapsto f(x) = ax + b$$

mit den beiden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$, die die Form der Geraden bestimmen. a legt die Steigung der Geraden fest, der Parameter b den Abstand zur x–Achse bei $x = 0$. Der Graph dieser Funktion ist also eine Gerade durch den Punkt $x = 0, y = b$, die im Fall $a \neq 0$ auch noch durch den Punkt $x = -\frac{b}{a}, y = 0$ geht. Im Fall $a = 0$ verläuft die Gerade parallel zur x–Achse. Für $a \neq 0$ erhält man das Steigungsdreieck der Geraden, indem man von einem beliebigen Punkt der Geraden um eine Einheit nach rechts geht und um a Einheiten in y–Richtung.

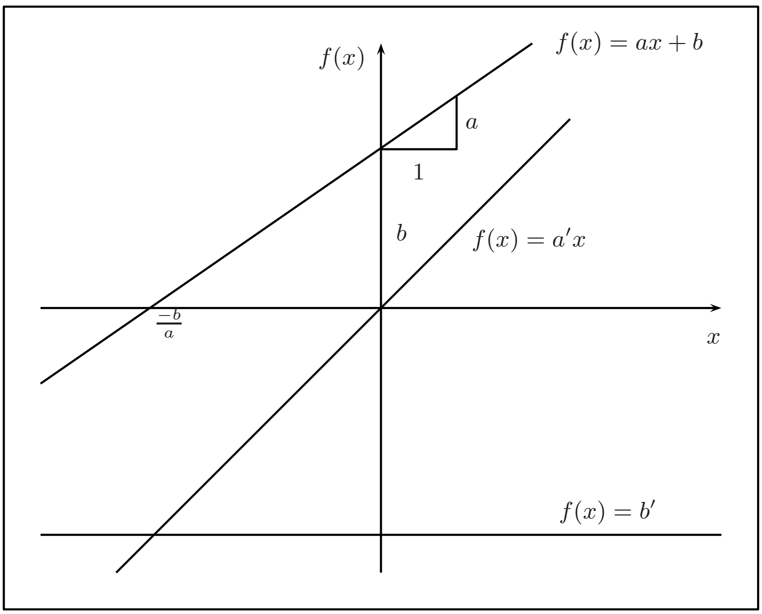

Abbildung 2.3. Darstellung linearer Funktionen im Koordinatensystem

Im Fall $b = 0$ erhält man eine Gerade, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems verläuft. In diesem Fall sagt man, dass y *proportional* zu x ist.

Im Fall $a = 0$ erhält man die Funktion:

$$f(x) = b.$$

Sie wird auch als die *konstante Funktion* bezeichnet.

Anmerkungen:

1. Geraden der Form $x = c = const.$ sind nicht durch die Geradengleichung
$$y = ax + b$$
darstellbar. Sie charakterisieren Parallelen zur y–Achse und stellen keine Funktionen dar, da die Eindeutigkeit der Zuordnung nicht gegeben ist.

2. Ist eine Gerade durch die Angabe der Steigung m und einem Punkt $P = (x_1, y_1)$ festgelegt, so ist es zweckmäßig die **Punkt–Steigungsform der Geradengleichung** zu verwenden:
$$y = m \cdot (x - x_1) + y_1. \tag{2.1}$$

3. Ist eine Gerade durch zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ festgelegt, dann verwendet man die **Zwei–Punkte–Form der Geradengleichung**
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.2}$$

2.2.2 Quadratische Funktion

Die quadratische Funktion wird auch *Parabel* genannt. Die allgemeinste Form dieser Funktion lautet:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f &: x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

mit drei reellen Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$, die die Form der Parabel festlegen. Der Graph dieser Funktion ist in der Abbildung 2.4 dargestellt.

Die Nullstellen dieser Funktion — das sind die Punkte, an denen der Graph die x-Achse schneidet — sind durch

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

gegeben. Hieraus erkennt man folgenden Sachverhalt:

- Wenn $b^2 > 4ac$, dann existieren zwei reelle Lösungen, das bedeutet, der Graph hat zwei Schnittstellen mit der x–Achse.
- Wenn $b^2 = 4ac$, dann hat die Parabel genau eine Nullstelle, der Graph der Funktion schneidet in diesem Fall die x–Achse genau einmal.
- Wenn $b^2 < 4ac$, dann hat die Funktion keine reellen Nullstellen, der Graph schneidet die x–Achse nicht.

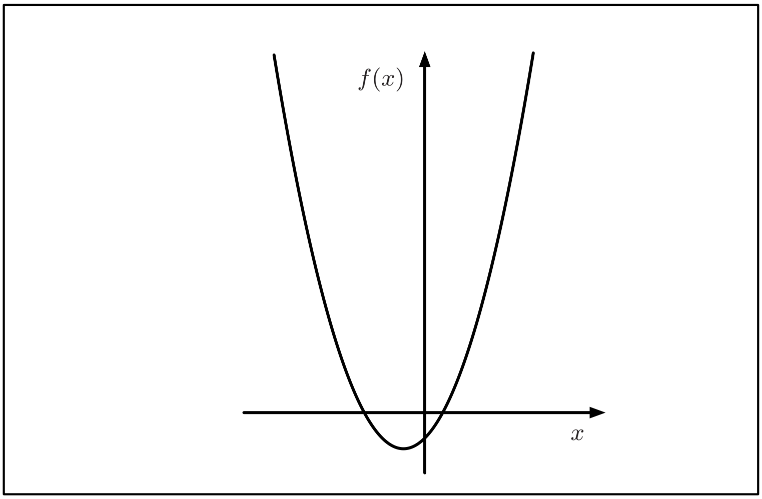

Abbildung 2.4. Graph der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$

2.2.3 Ganze rationale Funktionen oder Polynome

Die oben bereits vorgestellten linearen und quadratischen Funktionen sind Spezialfälle einer weitaus größeren Klasse von Funktionen, den sogenannten *ganzen rationalen Funktionen*. Diese haben allgemein die Form:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \end{aligned}$$

Die festen Parameter $a_0, a_1, \ldots a_n$ heißen Koeffizienten und sind reelle Zahlen. In Abbildung 2.5 ist der Graph einer ganzen rationalen Funktion für $a_3 = 1, a_1 = -1, a_2 = a_0 = 0$ dargestellt.

Eine ganze rationale Funktion, deren Koeffizienten a_n der höchsten Potenz x^n ungleich Null ist, nennt man auch **Polynom vom Grad** n.

2.2.4 Potenzfunktion

Potenzfunktionen sind ganze rationale Funktionen mit

$$f(x) = x^n; \; n \in \mathbb{N}.$$

Sie werden auch als **Parabeln** n–**ter Ordnung** bezeichnet.

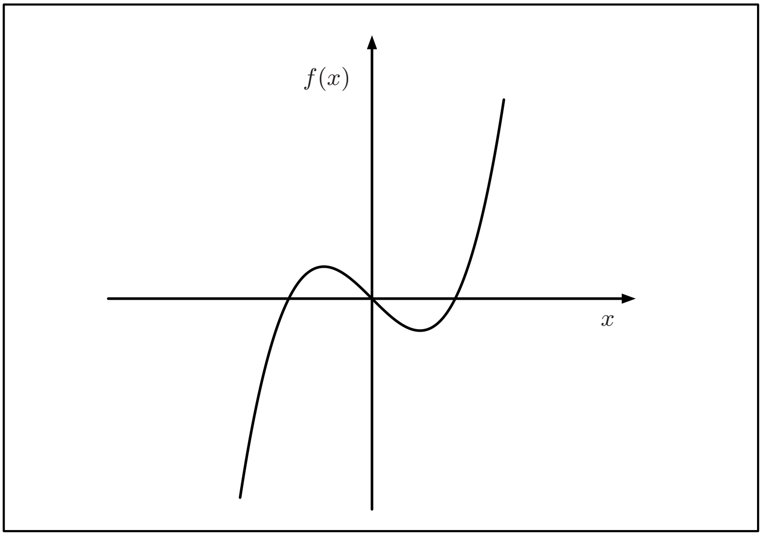

Abbildung 2.5. Der Graph der ganzen rationalen Funktion 3. Grades $f(x) = x^3 - x$

2.2.5 Gebrochen rationale Funktionen

Bildet man den Quotienten zweier Polynom–Funktionen, erhält man die allgemeine Form der *gebrochen rationalen Funktionen*:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0} \tag{2.3}$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$. Diese Funktionen sind überall dort definiert, wo der Nenner ungleich Null ist.

Für manche Untersuchungen ist eine Darstellung einer gebrochen rationalen Funktion als Summe hilfreich.[1] Dies wird durch die sogenannte Polynomdivision erreicht. Dazu wird die gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei $P(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grad n und $Q(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grad n ist, für den Fall $n > m$ dargestellt in der Form

$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}.$$

Hierbei sind $P_1(x)$ und P_2 ganze rationale Funktionen, wobei P_2 einen kleineren Grad hat als $Q(x)$. Die Durchführung der Polynomdivision entspricht der schriftlichen Division und wird exemplarisch leicht deutlich.

[1] Siehe dazu zum Beispiel Abschnitt 2.7.5

Beispiel:

Betrachte

$$f(x) = \frac{6x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{3x - 2} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

wobei der Grad von $P(x)$ den Wert $n = 3$ hat und der von $Q(x)$ den Wert $m = 1$. Die Polynomdivision ist dann:

$$\begin{array}{l}
(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + \dfrac{3}{3x-2} \\
\underline{6x^3 - 4x^2} \\
\qquad 9x^2 - 3x + 1 \\
\qquad \underline{9x^2 - 6x} \\
\qquad\qquad 3x + 1 \\
\qquad\qquad \underline{3x - 2} \\
\qquad\qquad\quad 3
\end{array}$$

Daher folgt:

$$f(x) = \frac{6x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{3x - 2} = 2x^2 + 3x + 1 + \frac{3}{3x - 2}$$

mit den ganzen rationalen Funktionen

$$P_1(x) = 2x^2 + 3x + 1, \quad P_2(x) = 3, \quad Q(x) = 3x - 2.$$

Die Polynomdivision kommt weiterhin zur Anwendung bei der Bestimmung von Nullstellen von Polynomen mit Grad > 2, wenn wenigsten eine Nullstelle bereits bekannt ist.[2]

2.2.6 Hyperbelfunktion

Die einfachste gebrochen rationale Funktion ist die Hyperbelfunktion, sie ist eine Abbildung der Form:

$$\begin{aligned}
f\ &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \\
f\ &: x \longmapsto f(x) = \frac{a}{x}; \quad a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Über die Erstellung einer Wertetabelle für diese Funktion kann man den folgenden Sachverhalt feststellen: Wenn die x Werte für positive reelle Zahlen

[2] Siehe dazu Abschnitt 3.6.2.

gegen 0 gehen, wachsen die Funktionswerte a/x über alle (positiven) Grenzen. Gehen die x Werte für negative reelle Zahlen gegen Null, dann wachsen die Funktionswerte über alle (negativen) Grenzen.

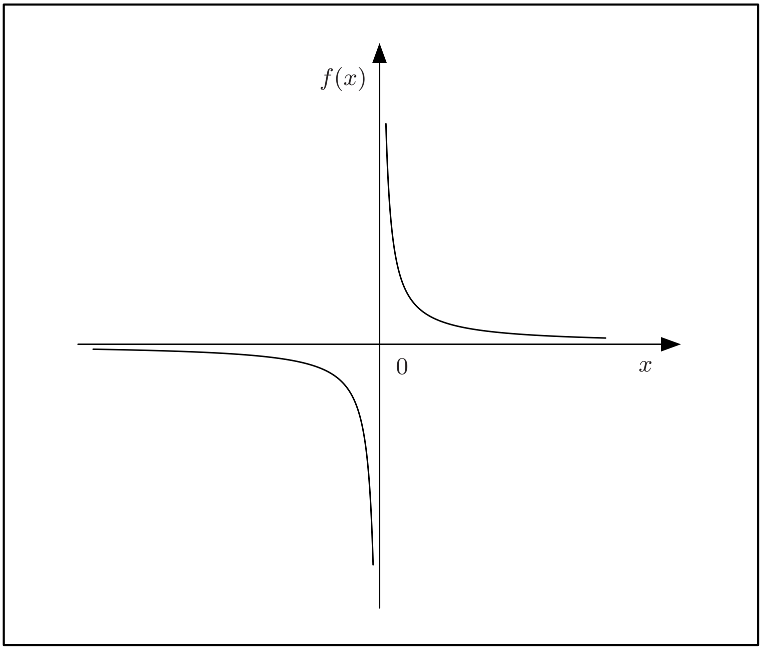

Abbildung 2.6. Die Funktion $f(x) = 1/x$

Das Bild dieser Funktion (siehe Abbildung 2.6) ist eine zu den Winkelhalbierenden der Achsen symmetrisch liegende Kurve, eine Hyperbel. Diese Funktion ist für den Punkt $x = 0$ nicht definiert, da die Division durch Null nicht definiert ist.

Der Zusammenhang zwischen $f(x)$ und x wird auch als umgekehrt proportional bezeichnet.

2.2.7 Wurzelfunktion

Die **Wurzelfunktion** ist die Umkehrfunktion (vgl. Kap. 2.3) der Potenzfunktion. Sie ist definiert durch:

$$\begin{aligned} f\ &: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \\ f\ &: x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}; \quad x \in \mathbb{R}_0^+. \end{aligned}$$

http://www.springer.com/978-3-662-48142-4

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Holey, Th.; Wiedemann, A.
2016, XIII, 277 S., Softcover
ISBN: 978-3-662-48142-4