

Der zu betrachtende Gletscherbereich wird mit Ω , seine geschlossene Berandung mit $\partial\Omega$ bezeichnet.¹ Die Balancebedingungen besagen, dass jeder Teilbereich ω dieses Gletscherbereiches beschleunigungsfrei ist und folglich als starrer Körper angesehen werden kann, der sich in statischer Balance befindet [4, S. 258]. Somit heben sich die auf diesen Teilbereich ω wirkenden Kräfte und Drehmomente insgesamt auf.² Diese Kräfte und Drehmomente lassen sich durch Integrale über die differentiellen Kräfte und Drehmomente darstellen, welche auf die differentiellen Eismassen im Inneren des Teilbereiches ω und welche von außen auf die orientierten differentiellen Flächenelemente³ seiner Berandung $\partial\omega$ wirken.

Die differentielle Kraft, welche unter der Erdbeschleunigung \mathbf{g} auf eine differentielle Eismasse mit differentiellem Volumen dV und Eisdichte ρ wirkt, ist gleich ihrem differentiellen Gewicht^(2.1). Die auf ein orientiertes Flächenelement mit der differentielle Fläche dA wirkende differentielle Kraft^(2.2) wird durch den Spannungsvektor $\mathbf{S}\mathbf{n}$ definiert, wobei

¹ Es wird vorausgesetzt, dass der Modellgletscherbereich Ω die einfache topologische Struktur einer Kugel hat. Ω und die Kugel können also durch eine stetige und umkehrbare Abbildung ineinander übergeführt werden, wobei die geschlossene Berandung $\partial\Omega$ und die Kugeloberfläche ineinander übergehen.

² In der klassischen Mechanik ist Beschleunigungsfreiheit eines Systems punktförmiger Teilchen, welche dem zweiten und dritten Bewegungsgesetz von Newton folgen, gleichbedeutend damit, dass für jedes Teilsystem die äußeren Kräfte und Drehmomente insgesamt verschwinden [1, S. 5–7]. Diese charakteristische Eigenschaft beschleunigungsfreier Systeme wird auf die für Gletscher relevante Kontinuumsmechanik übertragen, da diese nur eine phänomenologische Variante der klassischen Mechanik punktförmiger Teilchen ist, welche dem zweiten und dritten Bewegungsgesetz von Newton folgen.

³ Die Orientierung eines Flächenelementes wird durch die Richtung seiner Normale festgelegt. Diese orientierte Normale ist der zur entsprechenden Seite zeigende und zum Flächenelement senkrechte Einheitsvektor. Ein orientiertes Flächenelement besteht aus dem Flächenelement selbst und seiner orientierten Normale. Hier weist die Normale nach außen.

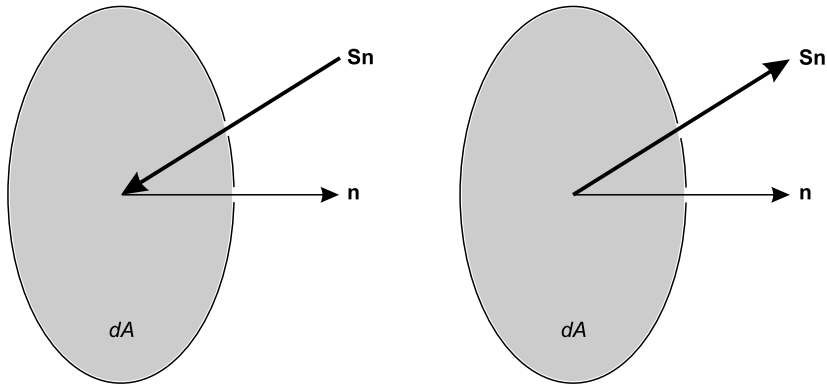


Abb. 2.1 Orientierte differentielle Flächenelemente dA mit ihren orientierten Flächennormalen \mathbf{n} und mit Spannungsvektoren $\mathbf{S}\mathbf{n}$

\mathbf{S} den Spannungstensor und \mathbf{n} die orientierte Flächennormale bezeichnen⁴. Es handelt sich um eine Flächenkraft zwischen den Eismassen, die von beiden Seiten an die differentielle Fläche stoßen. Diese Flächenkraft kommt jeweils von der Eismasse auf einer Seite der differentielle Fläche und wirkt durch diese differentielle Fläche auf die Eismasse auf der anderen Seite. Bei der jeweiligen Berechnung^(2.2) dieser beiden Flächenkräfte weist die Flächennormale \mathbf{n} zu der Eismasse, von der die Kraft kommt. Diese beiden Flächenkräfte sind wegen Richtungsumkehr der Flächennormale \mathbf{n} zueinander entgegengesetzt und erfüllen somit das Prinzip „Actio gleich Reactio“. In Abb. 2.1 ist der Spannungsvektor $\mathbf{S}\mathbf{n}$ jeweils auf der Seite der Fläche eingezeichnet, von der die Kraft und damit die Spannung kommt. Stößt der Spannungsvektor auf die Fläche, ist seine Normalkomponente eine durch diese Fläche auf die andere Seite wirkende Druckspannung, andernfalls eine Zugspannung. Aus den differentiellen Kräften erhält man die differentiellen Drehmomente, indem man die Vektorprodukte mit den Ortsvektoren \mathbf{r} bildet^{(2.3), (2.4)}.

Die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment, welche auf einen beliebigen Teilbereich ω wirken, ergeben sich durch Integration über alle differentiellen Kräfte^{(2.1), (2.2)} und Drehmomente^{(2.3), (2.4)} sowohl im Inneren des Teilbereiches ω als auch auf seiner geschlossenen Berandung $\partial\omega$. Diese resultierenden Größen sollen gemäß den Balancebedingungen^{(2.8), (2.9)} verschwinden. In diesen Balancebedingungen sind die Flächenintegrale über die geschlossene Berandung $\partial\omega$ gleich der Kraft bzw. dem Drehmoment, welche auf diese Berandung wirken. Die Volumenintegrale über den Teilbereich ω sind gleich der Kraft bzw. dem Drehmoment, welche durch die Gewichtverteilung in diesem Teilbereich verursacht werden. Diese Volumenintegrale lassen sich durch die Masse m_ω ^(2.5) bzw. das Moment \mathbf{M}_ω ^(2.6) der Massenverteilung im Teilbereich ω ausdrücken

⁴ Zur Begründung, dass der Spannungsvektor die Form $\mathbf{S}\mathbf{n}$ hat, s. [5, S. 134–135].

und sind gleich dem Gewicht dieser Masse m_ω bzw. gleich dem Drehmoment der fiktiv in ihrem Schwerpunkt \mathbf{c}_ω (2.7) konzentrierten Masse⁵.

Um die Balancebedingungen von den integralen Formen (2.8), (2.9) in lokale Formen umzuwandeln, rechnet man die Integrale über die geschlossene Berandung $\partial\omega$ des Bereiches ω mit dem Satz von Gauß in Volumenintegrale (2.10), (2.11) über den Bereich ω um⁶. Damit lassen sich die integralen Balancebedingungen durch reine Volumenintegrale ausdrücken, die für beliebige Teilbereiche ω des betrachteten Gletscherbereiches Ω verschwinden müssen (2.12), (2.13). Deshalb sind diese integralen Balancebedingungen äquivalent zu den lokalen Balancebedingungen, welche aus einer Differentialgleichung (2.14) und der Symmetriebedingung (2.15) für den Spannungstensor \mathbf{S} bestehen.

Für die Randbedingungen (2.16) werden nur zuverlässig bekannte Daten berücksichtigt, nämlich die Randspannungen \mathbf{s} auf der Randfläche Σ des Gletschers, welche aus seiner freien Oberfläche und seiner Grenzfläche in stehenden Gewässern besteht. Die Randspannungen an der freien Oberfläche verschwinden und die Randspannungen in stehenden Gewässern sind durch den hydrostatischen Druck \tilde{p} gegeben, der entgegengesetzt zum nach außen gerichteten Normalenvektor \mathbf{n} der Fläche Σ wirkt (2.17). Der Luftdruck wird vernachlässigt⁷.

Die allgemeine Lösung \mathbf{S} der Balance- und Randbedingungen (2.14)–(2.16) kann durch Subtraktion irgend einer speziellen Lösung \mathbf{S}_{bal} ⁸ der Balancebedingungen (2.18), (2.19) in die allgemeine gewichtslose Lösung \mathbf{T} (2.20) der einfacheren Balance- und Randbedingungen (2.21)–(2.23) für gewichtslose Spannungstensorfelder transformiert werden. Die Spannungstensorfelder \mathbf{T} werden als „gewichtslos“ bezeichnet, weil in der entsprechenden Balancebedingung (2.21) für \mathbf{T} das spezifische Eisgewicht $\rho\mathbf{g}$ nicht auftritt, im Gegensatz zur entsprechenden Balancebedingung (2.14) für \mathbf{S} ⁹. Die Randspannungen \mathbf{t} der gewichtslosen Spannungstensorfelder \mathbf{T} auf der Randfläche Σ sind die Differenz (2.24) aus den bekannten Randspannungen \mathbf{s} sowie den Randspannungen des

⁵ Statt der Momente \mathbf{M}_ω (2.6) in den Bereichen ω könnte man auch die Vektoren \mathbf{c}_ω (2.7) vom Koordinatenursprung zu den Massenschwerpunkten verwenden. Es ist jedoch einfacher, mit diesen Momenten zu arbeiten, da sie sich bei Gebietserweiterungen addieren, die Schwerpunktsvektoren dagegen nicht. Diese Momente \mathbf{M}_ω (2.6) und auch die Schwerpunktsvektoren \mathbf{c}_ω (2.7) hängen von der Position des Koordinatenursprungs ab.

⁶ Es bezeichnen $\text{div } \mathbf{S}$ (13.8) die zeilenweise gebildete Divergenz des Tensorfeldes \mathbf{S} , \mathcal{S} (12.11) das zum schiefsymmetrischen Anteil von \mathbf{S} gehörende Vektorfeld. Bei der Balancebedingung für die Drehmomente schreibt man $\mathbf{r} \times \mathbf{S}\mathbf{n}$ als $\mathcal{S}\mathbf{n}$ und formt die Divergenz von \mathcal{S} gemäß (13.21) um.

⁷ Der Luftdruck bewirkt gemäß Archimedischem Prinzip eine Gewichtsverminderung des Eises durch Auftrieb, die dadurch berücksichtigt werden kann, dass die Größe ρ in den Berechnungen nicht als Eisdichte interpretiert wird, sondern als Differenz aus Eisdichte und Luftdichte. Diese Änderung liegt jedoch im Promillebereich und wird daher vernachlässigt.

⁸ Für die Darlegungen in diesem Kapitel genügt die Information, dass \mathbf{S}_{bal} die Balancebedingungen (2.18), (2.19) erfüllt, die Lösung selbst braucht nicht bekannt zu sein. In Kap. 5 wird eine solche Lösung konstruiert.

⁹ Es handelt sich bei \mathbf{T} genauer gesagt um Spannungstensorfelder in fiktiven, gewichtslosen Medien. Die gewählte Bezeichnung „gewichtslose Spannungstensorfelder“ ist etwas ungenau, aber nicht so umständlich.

Tensorfeldes \mathbf{S}_{bal} und sind damit ebenfalls bekannt. Durch Umwandlung der lokalen Balancebedingungen $(2.21), (2.22)$ für gewichtslose Spannungstensorfelder \mathbf{T} in ihre integralen Formen $(2.25), (2.26)$ wird deutlich, dass gewichtslose Spannungstensorfelder \mathbf{T} auf orientierten, geschlossenen Flächen keine resultierenden Kräfte und Drehmomente erzeugen, da die Bereiche, welche von diesen Flächen eingeschlossen werden, gewichtslos sind und somit keine Beiträge liefern.

$$\rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV \quad (2.1)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA \quad (2.2)$$

$$\mathbf{r} \times \rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA \quad (2.4)$$

$$m_\omega \stackrel{\text{def.}}{=} \int_\omega \rho \cdot dV \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M}_\omega \stackrel{\text{def.}}{=} \int_\omega \mathbf{r}\rho \cdot dV \quad (2.6)$$

$$\mathbf{c}_\omega \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\mathbf{M}_\omega}{m_\omega} \quad (2.7)$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA + \underbrace{\int_\omega \rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV}_{m_\omega \mathbf{g}} = 0; \quad \omega \stackrel{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \quad (2.8)$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{r} \times \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA + \underbrace{\int_\omega \rho \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{g} \cdot dV}_{\mathbf{M}_\omega \times \mathbf{g} = \mathbf{c}_\omega \times m_\omega \mathbf{g}} = 0; \quad \omega \stackrel{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \quad (2.9)$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA \stackrel{\text{id.}}{=} \int_{\omega} \text{div } \mathbf{S} \cdot dV \quad (2.10)$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{r} \times \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot dA \stackrel{\text{id.}}{=} \int_{\omega} [\mathbf{r} \times \text{div } \mathbf{S} + 2 \cdot \mathfrak{S}] \cdot dV \quad (2.11)$$

$$\int_{\omega} (\text{div } \mathbf{S} + \rho\mathbf{g}) \cdot dV = \mathbf{0}; \quad \omega \stackrel{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \quad (2.12)$$

$$\int_{\omega} [\mathbf{r} \times (\text{div } \mathbf{S} + \rho\mathbf{g}) + 2 \cdot \mathfrak{S}] \cdot dV = \mathbf{0}; \quad \omega \stackrel{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \quad (2.13)$$

$$\text{div } \mathbf{S} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad (2.15)$$

$$\mathbf{S}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{s} \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \mathbf{0} & \text{an freien Oberflächen} \\ -\tilde{p} \cdot \mathbf{n} & \text{in stehenden Gewässern} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\text{div } \mathbf{S}_{\text{bal}} + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{S}_{\text{bal}} = \mathbf{S}_{\text{bal}}^T \quad (2.19)$$

$$\mathbf{T} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{S} - \mathbf{S}_{\text{bal}} \quad (2.20)$$

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.22)$$

$$\mathbf{T}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{t} \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbf{s} - \mathbf{S}_{\text{bal}}|_{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{Tn} \cdot dA = \mathbf{0}; \quad \omega \stackrel{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \quad (2.25)$$

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{r} \times \mathbf{Tn} \cdot dA = \mathbf{0}; \quad \omega \stackrel{\text{vor.}}{\subseteq} \Omega \quad (2.26)$$



<http://www.springer.com/978-3-662-48021-2>

Spannungen in Gletschern

Verfahren zur Berechnung

Halfar, P.

2016, XIV, 223 S. 7 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-48021-2