Elementare Begriffe

1

In diesem Kapitel werden Mengen, reelle Zahlen und Funktionen eingeführt, die als Grundlage für die späteren Themen gebraucht werden.

1.1 Mengen

Definition 1.1 Eine Menge ist die Zusammenfassung von gewissen Objekten, *Elemente* genannt, zu einer Einheit.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Mengen zu beschreiben:

a) aufzählende Form:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad \text{(endliche Menge)}$$
$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \qquad \text{(unendliche Menge)}$$

b) durch Eigenschaften:

$$M = \{x \mid x \text{ besitzt verschiedene Eigenschaften}\} \quad \text{„|“ bedeutet „sodass“.}$$

Beispiele

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2\}, \\ M &= \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \text{ die natürlichen Zahlen}, \\ M &= \mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\} \text{ die ganzen Zahlen}, \\ M &= \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } 1 < x \leq 5\} \\ &= \{2, 3, 4, 5\}, \end{aligned}$$

M. Chipot, *Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaften*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-47088-6_1

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl mit } x^2 + 4 = 0\} \\ &= \emptyset \quad \text{die } \textit{leere Menge.} \end{aligned}$$

Falls a ein Element von M ist, schreibt man $a \in M$ (a gehört zu M). Falls a kein Element von M ist, schreibt man $a \notin M$ (a gehört nicht zu M).

Beispiele

$$\begin{aligned} -1 &\in \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}, \\ 2 &\notin \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Abkürzungen Die folgenden Abkürzungen werden verwendet, um Aussagen prägnanter und kürzer aufzuschreiben:

$$\begin{aligned} \forall &: \text{für alle,} \\ \exists &: \text{es existiert,} \\ \exists! &: \text{es existiert genau ein.} \end{aligned}$$

Beispiele

$$\begin{array}{llll} \forall\, x \in \{-1, 1\} & \text{gilt} & x^2 = 1, & \\ \exists\, x \in \mathbb{N} & \text{mit} & x^2 = 1 & (\text{nämlich } x = 1), \\ \exists\, !\, x \in \mathbb{N} & \text{mit} & x^2 = 1 & (\text{es existiert ein einziges Element } x \in \mathbb{N}, \text{ sodass} \\ & & & x^2 = 1). \end{array}$$

Definition 1.2 A ist eine Teilmenge von B, wenn jedes Element von A zur Menge B gehört. Die symbolische Schreibweise lautet $A \subset B$ (A ist in B enthalten):

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \quad \Rightarrow \quad a \in B)$$

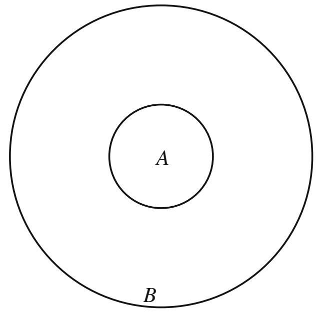
($\Leftrightarrow$ bedeutet „genau dann, wenn", $\Rightarrow$ bedeutet „impliziert").

Man kann die Menge mit einem Diagramm darstellen (siehe Abb. 1.1):

Beispiele $A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{3, 4\}$

$$\begin{aligned} &A \subset B, \\ &C \not\subset B, \quad \text{da} \quad 4 \notin B \quad (C \text{ ist nicht in } B \text{ enthalten}). \end{aligned}$$

Abb. 1.1 Euler-Venn-Diagramm



Definition 1.3 Zwei Mengen A, B heißen gleich, wenn jedes Element von A ein Element von B ist und umgekehrt:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ und } B \subset A \quad (A \text{ gleich } B).$$

Beispiele

$$\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\}$$

(siehe Paragraf 1.3 für die Definition von $|\cdot|$)

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}.$$

1.2 Mengenoperationen

In diesem Abschnitt beschreiben wir kurz, wie man mit Mengen rechnen kann. Wir führen Schnittmenge, Vereinigungsmenge und Differenzmenge ein.

Definition 1.4 Die Schnittmenge $A \cap B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\} \text{ (gelesen: } A \text{ geschnitten mit } B\text{)},$$
$$A \cap B \text{ ist der Durchschnitt der Mengen } A, B \text{ (siehe Abb. 1.2)}.$$

Beispiele $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6\}$,

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x \leq 6\} = \{5, 6\}.$$

Definition 1.5 Die $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die zu A oder zu B oder zu beiden Mengen gehören:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \text{ (gelesen: } A \text{ vereinigt zu } B\text{)}.$$

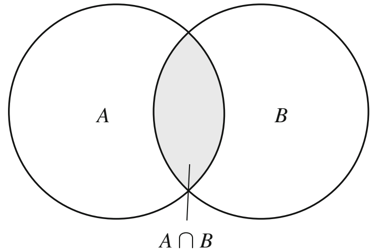


Abb. 1.2 Durchschnitt der Mengen A, B

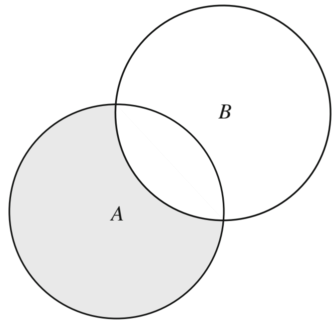


Abb. 1.3 Differenzmenge $A \setminus B$

Beispiele

$$\begin{aligned}
&A = \{1\}, \quad B = \{0, 2, 3\}, && A \cup B = \{0, 1, 2, 3\},\\
&A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\}, && A \cup B = \{1, 2\},\\
&A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 4\}, &&\\
&B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 6\}, && A \cup B = \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Definition 1.6 Die Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören (siehe Abb. 1.3). ($A \setminus B$ wird A ohne B gelesen.)

Beispiele

$$\begin{aligned}
&A = \{-1, 1, 2\}, \quad B = \{-1, 2\}, \quad A \setminus B = \{1\},\\
&A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 4\},\\
&B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 7\} \quad A \setminus B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 7\},\\
&\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}, \quad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

1.3 Die Menge der reellen Zahlen

In diesem Abschnitt führen wir die Zahlen ein, mit denen wir rechnen. Dies sind die reellen Zahlen.

Definition 1.7 Eine reelle Zahl ist ein *Dezimalbruch*

$$\pm a_1 a_2 a_3 \ldots a_p, b_1 b_2 \ldots \quad \text{mit } a_i, b_i \in \{0, \ldots, 9\}.$$

Beispiele

$$\begin{aligned}
0{,}1 &= \frac{1}{10}, \\
0{,}12 &= \frac{1}{10} + \frac{2}{100} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2}, \\
10{,}12 &= 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}, \\
a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3 b_4 &= a_1 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_3 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} \\
&\quad + b_4 \cdot 10^{-4} \\
&\ldots \text{ und so weiter.}
\end{aligned}$$

Es kann sein, dass die Entwicklung unendlich ist:

$$\begin{aligned}
\pi &= 3{,}14116\ldots, \\
\frac{1}{3} &= 0{,}333\ldots
\end{aligned}$$

Bezeichnung: Die Menge der reellen Zahlen ist mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Beispiele $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} \text{ ist die Menge der rationalen Zahlen,} \\
&\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \\
&\frac{1}{2} = 0{,}5, \\
&\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots,
\end{aligned}$$

Man kann $\mathbb{R}$ als die Punkte einer Geraden darstellen. Rechts von null sind die positiven Zahlen, links die negativen Zahlen (siehe Abb. 1.4).

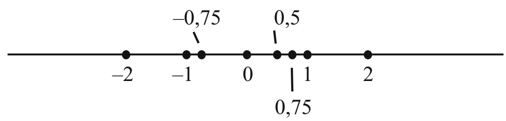


Abb. 1.4 Zahlengerade

Auf $\mathbb{R}$ sind vier Operationen definiert:

$+$ eine Addition,
$-$ eine Subtraktion (Umkehrung der Addition),
$\cdot$ eine Multiplikation,
$:$ eine Division (Umkehrung der Multiplikation).

Wir nehmen das Beispiel der Addition: $1{,}14 + 1{,}17 = 2{,}31$.

$$\begin{aligned}1{,}14 + 1{,}17 &= (1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}) + (1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}) \\ &= (1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^0) + (1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-1}) + (4 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-2}).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass:

$$\begin{aligned}&4 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-2} = 11 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} \\ &\Rightarrow \quad 1{,}14 + 1{,}17 = 2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} \\ &\qquad = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} = 2{,}31.\end{aligned}$$

Deshalb kann man eine Addition für reelle Zahlen mit endlicher Entwicklung definieren. Bei Zahlen mit einer unendlichen Entwicklung geht das nicht – aber es gilt

$$a_1 a_2 \dots a_p, b_1 b_2 \dots b_q b_{q+1} \dots = a_1 a_2 \dots a_p, b_1 \dots b_q + 0{,}0 \dots 0 b_{q+1} b_{q+2} \dots,$$

und die Zahl

$$0{,}0 \dots 0 b_{q+1} b_{q+2} \dots \leq \frac{1}{10^q}$$

wird sehr klein für große q. Man kann dann

$$a_1 a_2 \dots a_p, b_1 b_2 \dots b_q \dots \text{ mit } a_1 a_2 \dots a_p, b_1 b_2 \dots b_q$$

näherungsweise identifizieren. So geht beispielsweise ein Computer vor.

Eigenschaften dieser Operationen

- $a + b, a - b, a \cdot b, a : b \in \mathbb{R} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad (b \neq 0$ für die Division),

- Addition und Multiplikation sind *kommutative* Operationen:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a & \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \\ a \cdot b &= b \cdot a & \forall\, a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Addition und Multiplikation sind *assoziative* Operationen:

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c & \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c & \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- $0, 1$ sind *neutrale Elemente* von Additionen und Multiplikationen:

$$0 + a = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad 1 \cdot a = a \quad \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

- Existenz von inversen Elementen:

$$\begin{aligned} a + (-a) &= 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \\ a \cdot \frac{1}{a} &= 1 \quad \forall\, a \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}, \\ -a, \frac{1}{a} & \quad \text{sind die } \textit{inversen Elemente} \text{ von } a. \end{aligned}$$

- Distributivität: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Eine Menge mit zwei Operationen, bezeichnet mit $+, \cdot$, die diese Eigenschaften erfüllen, ist ein *Körper*. Wir werden $a \cdot b$ als ab schreiben.

Beispiel Weshalb gilt $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$?

$$\begin{aligned} 0{,}333\ldots &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots, \\ &= \frac{3}{10}\Big(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\Big). \end{aligned}$$

Für $a < 1$ gilt

$$\begin{aligned} (1 - a)(1 + a + \cdots + \cdots) &= 1 - a + a - a^2 + a^2 \cdots = 1, \\ 1 + a + a^2 + \cdots &= \frac{1}{1 - a} \end{aligned}$$

und dann

$$0{,}33\ldots = \frac{3}{10}\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\Big) = \frac{3}{10}.\frac{10}{9} = \frac{1}{3}.$$

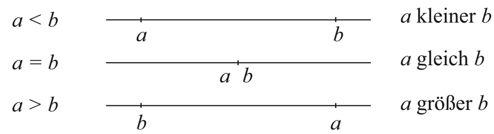


Abb. 1.5 Anordnung der Zahlengeraden

Anordnung
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann stehen diese Zahlen in einer der folgenden Relationen:

$$a \leq b, \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ kleiner oder gleich } b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \text{ oder } a = b,$$
$$a \geq b, \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ größer oder gleich } b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \text{ oder } a = b.$$

Auf der Zahlengeraden (siehe Abb. 1.5).

Rechenregeln der Anordnung

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \qquad a < b \qquad \Rightarrow \qquad a + c < b + c,$$
$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \qquad c > 0, a < b \qquad \Rightarrow \qquad ac < bc.$$

Achtung! $\quad 1 < 2 \quad \not\Rightarrow \quad (-1)1 < (-1)2 \;\text{ d. h. }\; -1 < -2.$

Absolutbetrag einer Zahl

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a > 0, \\ -a & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

Beispiel $|-1| = -(-1) = 1$

Satz 1.1

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R},$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \forall\, a.b \in \mathbb{R}.$$

Beweis Es gilt $a \leq |a|\ \forall\, a \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\left.\begin{array}{r} a + b \leq |a| + |b| \\ -(a + b) = -a + -b \leq |-a| + |-b| = |a| + |b| \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad |a + b| \leq |a| + |b|.$$

□

Teilmengen von $\mathbb{R}$
Hier werden einige wichtige Teilmengen der reellen Zahlen erläutert:

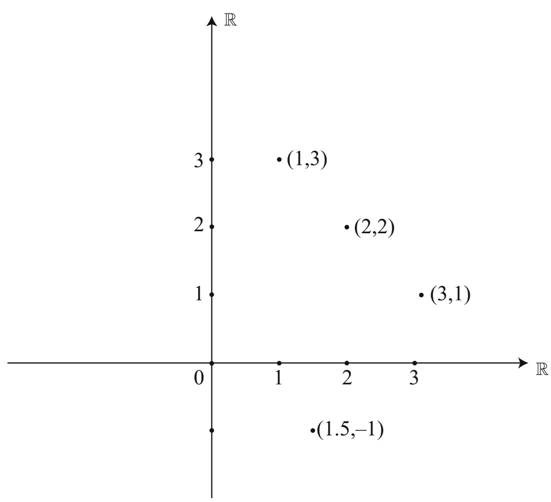
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- *Intervalle*
  - *endliche Intervalle* $(a < b)$

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \mid a \le x \le b\} && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\ [a,b) &= \{x \mid a \le x < b\} && \text{halbabgeschlossenes Intervall,} \\ (a,b] &= \{x \mid a < x \le b\} && \text{halbabgeschlossenes Intervall,} \\ (a,b) &= \{x \mid a < x < b\} && \text{offenes Intervall.} \end{aligned}$$

  - *unendliche Intervalle*

$$\begin{aligned} [a,+\infty) &= \{x \mid a \le x\}, \\ (a,+\infty) &= \{x \mid a < x\}, \\ (-\infty,b) &= \{x \mid x < b\}, \\ (-\infty,b] &= \{x \mid x \le b\}, \\ (-\infty,0) &= \mathbb{R}^-, \\ (0,+\infty) &= \mathbb{R}^+, \\ (-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Abb. 1.6 Zahlenebene



Zahlenebene
Die Zahlenebene ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times \mathbb{R} &= \text{ kartesisches Produkt von } \mathbb{R} \text{ mit } \mathbb{R} \\ &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{ Menge der Paare von Elementen von } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Darstellung
In Abb. 1.6 werden die Elemente der Zahlenebene grafisch dargestellt (siehe Abb. 1.6). $(1{,}3) \neq (3{,}1)$, $(a, b) \neq (b, a)$.

1.4 Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir Funktionen. Dies sind Abbildungen, die sehr wichtig für die späteren Kapitel sind.

Einführung

Definition 1.8 A, B seien Mengen. Eine Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem $a \in A$ ein eindeutiges Element $b \in B$ zuordnet, das dann mit $f(a)$ bezeichnet wird.

$$\text{Schreibweise:} \qquad f: \begin{array}{l} A \to B \\ a \mapsto f(a). \end{array}$$

Beispiele
1. $A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.
   $f(a_1) = b_1, \quad f(a_2) = b_1, \quad f(a_3) = b_2$, (siehe Abb. 1.7).
2. $A = \mathbb{R}, \quad B = [0, +\infty) \quad f(a) = a^2$.

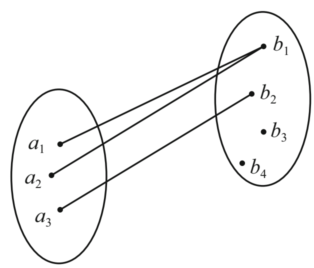


Abb. 1.7 Abstrakte Abbildung oder Funktion

http://www.springer.com/978-3-662-47087-9

Mathematische Grundlagen der Naturwissenschaften
Chipot, M.
2016, IX, 336 S. 113 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-47087-9