2 Ein nulldimensionales Energiebilanzmodell

Wir formulieren hier das denkbar einfachste Klimamodell, das die Erde als Punkt im Weltraum modelliert. Das Modell basiert auf der Strahlungsbilanz eines „nulldimensionalen“ Körpers. Es wird z. B. in [2, 3, 5] behandelt. Es ist eher von akademischen Interesse, zeigt aber bereits die Vorgehensweise bei der Aufstellung von Bilanzgleichungen, die Bedeutung von Modellparametern und Methoden zu ihrer Bestimmung aus Messdaten. Wir betrachten zuerst den stationären Gleichgewichtszustand und anschließend ein zeitabhängiges Modell, mit dem man Temperaturänderungen simulieren kann. Dieses wird sowohl für endliche, diskrete Zeitschritte als auch in einer kontinuierlichen Zeit hergeleitet. Es liefert das erste Beispiel für eine mathematische Modellklasse, nämlich die der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

2.1 Die Strahlungsbilanz eines Körpers im All

Im nulldimensionalen Energiebilanzmodell wird die globale Energiebilanz der Erde aufgestellt, bestehend mittleren Temperatur auf der Erde in Beziehung gesetzt wird. Die eingehende Strahlung wird von der Reflektivität der Erdoberfläche und auch der Wolken beeinflusst. Die zurückgestrahlte Energie wird durch den Treibhauseffekt vermindert.

Im stationären oder Gleichgewichtszustand befinden sich die Energie pro Zeiteinheit, die auf die Erde treffen und die von ihr abgestrahlt werden, im Gleichgewicht.

Die von der Sonne auf die Erde einstrahlende Energie pro Zeit (das ist physikalisch die Leistung, Einheit $\mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}}$), ist das Produkt aus der sog. *Solarkonstante* S multipliziert mit der Fläche der Erde, die von der Sonne bestrahlt wird. Dies ist ein Kreis mit dem Erdradius r, d. h. die Fläche ist gleich πr^2. Die Menge der eingehenden Strahlungsenergie pro Zeit ist daher

$$\pi r^2 S.$$

Für die Konstanten gilt $S = 1367\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $r = 6371\,\mathrm{km}$. Der Erdradius ist dabei gemittelt, denn die Erde ist keine Kugel. Ein Teil dieser Strahlung wird durch die Erde

T. Slawig, *Klimamodelle und Klimasimulationen*, Springer-Lehrbuch Masterclass,
DOI 10.1007/978-3-662-47064-0_2

reflektiert. Diesen Anteil $\alpha \in [0, 1]$ bezeichnet man als *Albedo*. Die Albedo hängt von der Oberfläche bzw. deren Farbe ab. Es gilt z. B. für frischen Schnee $\alpha \in [0{,}8, 0{,}9]$, für Wald $\alpha \in [0{,}02, 0{,}2]$. Der über die Erde gemittelte Wert für die Albedo ist $\alpha \approx 0{,}3$. Die auf die Erde auftreffende Strahlungsenergie pro Zeiteinheit ist damit

$$R_{\text{in}} = \pi^2 S(1-\alpha). \tag{2.1}$$

Zur Modellierung der von der Erde ausgehenden Strahlung beginnen wir mit dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* für einen *schwarzen Strahler*. Dies ist ein Körper, der die gesamte auf ihn einfallende Strahlung absorbiert. Für eine schwarzen Strahler ergibt sich die Rückstrahlung pro Fläche als Funktion der Temperatur T als

$$\sigma T^4$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}K^{-4}}.$$

Für die Rückstrahlung der gesamten Erde muss dieser Wert noch mit der Erdoberfläche $4\pi r^2$ multipliziert werden:

$$R_{\text{out}} = 4\pi r^2 \sigma T^4. \tag{2.2}$$

Gleichsetzen von R_{in} und R_{out} ergibt die Bilanzgleichung

$$\frac{(1-\alpha)S}{4} = \sigma T^4.$$

Die sich daraus ergebende Temperatur ist

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)S}{4\sigma}} \approx 255\,\mathrm{K} \approx -18\,^\circ\mathrm{C}.$$

Dieser Wert entspricht nicht der zur Zeit tatsächlich auf der Erde gemessenen mittleren Jahrestemperatur, die ca.

$$T_m \approx 287\,\mathrm{K} \approx 14\,^\circ\mathrm{C}$$

beträgt. Die Ursache dafür ist, dass die Erde eben kein schwarzer Strahler ist, sondern dass ein Teil der von der Erdoberfläche zurückgestrahlten Energie durch den Treibhauseffekt in der Atmosphäre zurückgehalten wird. Um dies zu modellieren, wird ein multiplikativer Parameter, die *Emissivität* ε, in (2.1) eingeführt. Damit ergibt sich die Bilanz

$$\frac{(1-\alpha)S}{4} = \varepsilon\sigma T^4. \tag{2.3}$$

Der Wert T_m kann zur Bestimmung von ε benutzt werden, und es ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{(1-\alpha)S}{4\sigma T_m^4} \approx 0{,}62.$$

Übung 2.1 Plotten Sie die Temperatur, die sich aus dem stationären Energiebilanzmodell

1. für Werte von $\alpha \in [0, 1]$ und festes $\varepsilon = 0{,}62$
2. und für Werte von $\alpha \in [0, 1]$ und $\varepsilon \in (0, 1]$ ergibt.

Anmerkung 2.2 Andere, insbesondere nichtlineare und temperaturabhängige Modellierungen der Albedo finden sich in [7–9].

2.2 Die instationäre Form der Strahlungsbilanz

Sind eingehende und ausgehende Energie nicht gleich, so bewirkt dies eine zeitliche Änderung der Temperatur des Körpers, in diesem Fall der Erde. Dies kann als eine Temperaturänderung in der Atmosphäre oder im Ozean interpretiert werden. Je höher das Ungleichgewicht zwischen eintreffender und abgestrahlter Energie ist, desto stärker wird die Temperatur sich pro Zeiteinheit ändern. Aus dieser Beobachtung oder Annahme kann ein zeitabhängiges oder instationäres Energiebilanzmodell hergeleitet werden. Dies kann auf zwei Arten geschehen, die wir in den nächsten Abschnitten vorstellen: Die erste betrachtet endliche, diskrete Zeitschritte, während in der zweiten die Zeit als kontinuierlich angesehen wird.

Es ist in diesem einfachen Modell mit nur einer Gleichung einleuchtend, dass bei $R_{\text{in}} > R_{\text{out}}$ die Temperatur auf der Erde steigen und im umgekehrten Fall sinken wird. Das Ausmaß der Änderung hängt weiterhin von folgenden Dingen ab:

- vom betrachteten Zeitintervall, je größer dies ist, desto größer die Temperaturänderung.
- von dem betrachteten Volumen, für das die (dann darüber räumlich gemittelte) Temperatur berechnet wird (z. B. Atmosphäre oder Ozean): Je größer das Volumen, desto geringer die Temperaturänderung. Wird die Erde wieder als Kugel angenommen, so handelt es sich um das Volumen einer Kugelschale. Dies ist $4\pi r^2 H$, wenn H die Höhe oder Dicke der betrachteten Schicht ist.
- von der Wärmeübertragung in den Stoff, dessen Temperatur beschrieben wird (Luft für die Athmosphäre, Wasser für den Ozean). Diese ergibt sich als Produkt aus Dichte ϱ des Stoffes und seiner spezifischen Wärme C. Auch hier ist der Zusammenhang umgekehrt proportional: Je größer das Produkt ϱC, desto geringer die Temperaturänderung.

Daraus kann ein zeitabhängiges Modell der Form

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \Delta t \, \frac{R_{\text{in}}(t) - R_{\text{out}}(t)}{4\pi r^2 H \varrho C}. \tag{2.4}$$

formuliert werden. Hier bezeichnet t einen Zeitpunkt und $\Delta t > 0$ das betrachtete Zeitintervall oder einen Zeitschritt. Es handelt sich um ein zeitdiskretes Modell, und eine solche Gleichung heißt auch *Differenzengleichung*.

In Klimamodellen werden oft „natürliche" Zeitschritte wie ein Tag oder ein Jahr betrachtet. Da aber die Größen R_{in} und R_{out} und auch die Parameter H, ϱ und C in bestimmten Einheiten angegeben werden, muss der Zeitschritt an diese Größen angepasst sein oder die Größen R_{in} und R_{out} und die Parameter eventuell entsprechend skaliert werden.

2.3 Grundgrößen und Einheiten nach dem SI-System

Da das Problem der Wahl der Einheiten bzw. der Skalierung von Größen und Variablen in Modellen bei Klima- und anderen Modellen eine wesentliche Rolle spielt, wurde der SI-Standard für Einheiten definiert. In ihm sind Grundgrößen mit zugehörigen Standardeinheiten für physikalische und andere Größen definiert. Wir geben in den Tab. 2.1 und 2.2 die hier benutzten Grundgrößen und Einheiten an, vgl. [10, Abschnitt 0.2].

Werden die Einheiten der Parameter in der Gleichung (2.4) in SI-Einheiten benutzt, dann muss der Zeitschritt Δt als eine Sekunde gewählt oder die eingehenden Parameter, bei denen eine Zeitabängigkeit vorhanden ist, entsprechend umgerechnet (*umskaliert*) werden.

Tab. 2.1 Liste der Grundgößen (oder Dimensionen) mit ihren symbolischen Bezeichnungen und zugehörigen Einheiten nach SI-Standard. Nach SI-Standard werden Symbole für Dimensionen serifenlos und solche für Einheiten nicht kursiv gesetzt

Grundgröße	Länge	Zeit	Masse	Temperatur	Elektrischer Strom	Lichtstärke	Substanzmenge
Symbol	L	T	M	Θ	I	J	N
Einheit	Meter	Sekunde	Kilogramm	Kelvin	Ampere	Candela	Mol
Symbol	m	s	kg	K $0\,°\mathrm{C} = 273{,}15\,\mathrm{K}$	A	cd	mol

Tab. 2.2 Liste der im Energiebilanzmodell verwendeten abgeleiteten Größen mit zugehörigen Einheiten nach SI-Standard

Abgeleitete Größe	Kraft	Arbeit bzw. Energie	Leistung
Dimensionelle Darstellung	MLT^{-2}	$\mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-2}$	$\mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-3}$
Einheit	Newton	Joule	Watt
Symbol/Umrechnung	$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$	$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \mathrm{W\,s}$	$\mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}}$

2.4 Formulierung als Differentialgleichung

Die oben angegebene Form (2.4) des Energiebilanzmodell als Differenzengleichung entspricht mit einem gewählten festen Zeitschritt Δt der Anschauung. Unabhängig von der Wahl des Zeitschritts und eventueller Umskalierungen der Parameter und universeller wird das Modell, wenn die Schrittweite als gegen Null gehend betrachtet wird. Dazu dividieren wir (2.4) nach Umstellen durch Δt, erhalten

$$\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}=\frac{R_{\text{in}}(t)-R_{\text{out}}(t)}{4\pi r^2 H\varrho C}=\frac{\pi r^2 S(1-\alpha)-4\pi r^2\varepsilon\sigma T(t)^4}{4\pi r^2 H\varrho C}, \tag{2.5}$$

und bilden auf beiden Seiten den Grenzwert $\Delta t \to 0$. Die rechte Seite ist unabhängig vom Zeitschritt, für die linke ergibt sich die Definition der ersten Ableitung von T am Zeitpunkt t:

$$T'(t) := \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

Oft wird – vor allem in der Physik – auch der Punkt ($\dot{T}$) für die Ableitung verwendet. Diese Notation wurde von Newton eingeführt.

Damit kann nun folgende Differentialgleichung für die instationäre Energiebilanz aufgestellt werden:

$$\underbrace{4\pi r^2 H\varrho C\, T'(t)}_{\substack{\text{zeitliche Änderung}\\ \text{der Wärmeenergie}}} = \underbrace{\pi r^2 S(1-\alpha)}_{\substack{\text{eingehende, nicht reflek-}\\ \text{tierte Strahlungsenergie}\\ \text{pro Zeiteinheit}}} - \underbrace{4\pi r^2\varepsilon\sigma T(t)^4}_{\substack{\text{zurückgestrahlte}\\ \text{Strahlungsenergie}\\ \text{pro Zeiteinheit}}}$$

Ein Indiz für die Korrektheit einer so hergeleiteten Modellgleichung ergibt der Vergleich der Einheiten. Für eine Größe Q wird mit $[Q]$ deren Einheit bezeichnet, also gilt z. B. für den Erdradius $[r] = \mathrm{m}$. Für die Einheiten der rechten Seite der Differentialgleichung gilt, vgl. Tab. 2.3:

$$[4\pi r^2 H\varrho C\, T'(t)] = \mathrm{m}^2\,\mathrm{m}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}.$$

Für die rechte Seite gilt dies ebenfalls, was leicht zu überprüfen ist.

Tab. 2.3 Parameter im Energiebilanzmodell, angewandt auf die Troposphäre

Variable	Wert und Einheit	Bedeutung
r	$6371\,\mathrm{km} = 6{,}371 \times 10^6\,\mathrm{m}$	Erdradius
H	$8{,}3\,\mathrm{km} = 8{,}3 \times 10^3\,\mathrm{m}$	Dicke bzw. Höhe der betrachteten Schicht der Atmosphäre, hier: Troposphäre (unterste Schicht, die den Großteil der Luft enthält)
ϱ	$1{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$	Dichte von Luft
C	$10^3\,\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	Spezifische Wärme von Luft
S	$1{,}367 \times 10^3\,\mathrm{W\,m^{-2}}$	Solarkonstante
σ	$5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$	Stefan-Boltzmann-Konstante

Durch Kürzen ergibt sich die Gleichung

$$H\varrho C\,T'(t) = \frac{S}{4}(1-\alpha) - \varepsilon\sigma T(t)^4. \tag{2.6}$$

Die geometrischen Größen wie Erdradius und auch die Konstante π treten nicht mehr auf. Diese Gleichung ist eine wesentlich prägnantere Darstellung als die Differenzengleichung (2.4). Es handelt sich um eine *nichtlineare* (wegen T^4) *gewöhnliche* Differentialgleichung (Ableitung nur nach der Zeit, keine partiellen Ableitungen) *erster Ordnung* (nur erste Ableitung).

Wird diese Gleichung auf einem Zeitintervall oder für $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$ mit einem gegebenen Anfangswert $T_0 = T(t_0)$ betrachtet, so ergibt sich ein *Anfangswertproblem (AWP)*.

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-47063-3

Klimamodelle und Klimasimulationen
Slawig, Th.
2015, IX, 250 S. 37 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-47063-3