2 Die Maxwell'schen Gleichungen

2.1 Vier Gleichungen für die Felderzeugung

Die Maxwell'sche Theorie ist eine *Nahfeldtheorie*. Das heißt: Jeder Ladungsträger beeinflusst seine unmittelbare Umgebung; diese wiederum beeinflusst ihre unmittelbare Umgebung,... und so weiter. Aus der Kette unmittelbarer Nachbarschaftsbeeinflussungen entsteht das makroskopisch zu beobachtende Verhalten.

Das mathematische Gebiet der Analysis bietet den geeigneten Rahmen für die Beschreibungen von Nahfeldtheorien. Die vier Maxwell-Gleichungen sind daher Differenzialgleichungen. Sie beschreiben sowohl die Struktur als auch Erzeugung der elektrischen und magnetischen Felder. Ausgedrückt durch die Felder **E** und **B** können sie in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &\mathbf{div}\ \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho & &\mathbf{div}\ \mathbf{B} = 0 \\ &\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} & &\mathbf{rot}\ (\mu_0^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Eine Alternative ist die Darstellung mit Hilfe des Nabla-Operators:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} = \rho & &\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ &\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} & &\nabla \times (\mu_0^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die oberen beiden Gleichungen bestimmen die *Quellenstruktur* der Felder, so wie in Abb. 2.1 skizziert. Das elektrische Feld hat Quellen, das heißt: Wo immer sich

M. Poppe, *Die Maxwell´sche Theorie,* essentials,
DOI 10.1007/978-3-662-45593-7_2

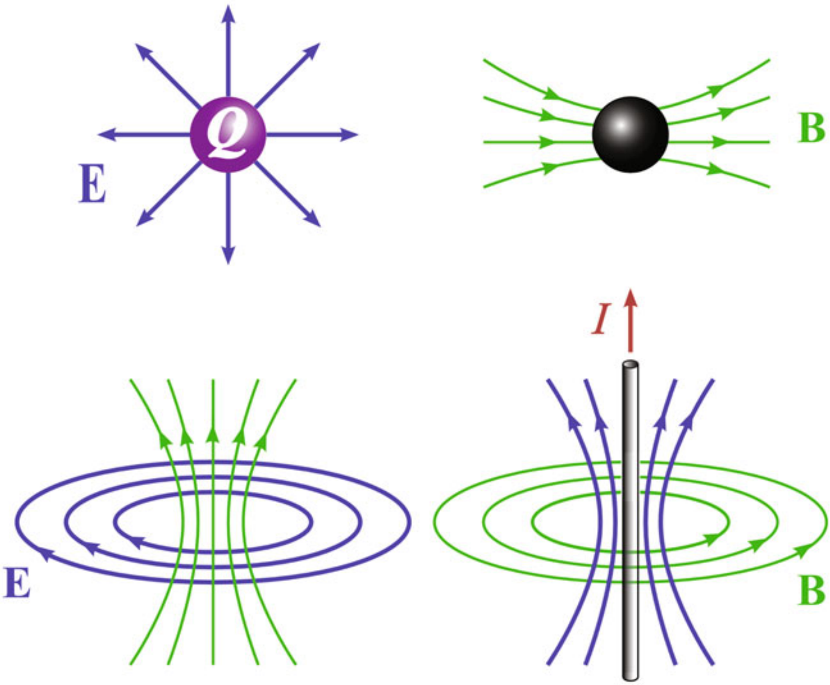

Abb. 2.1 Veranschaulichung der Maxwell-Gleichungen, dargestellt in der gleichen Reihenfolge wie in Gl. (2.1)

Ladungen befinden, gehen elektrische Feldlinien von ihnen aus. Im Infinitesimalen wird dies durch die Ladungsdichte ρ berücksichtigt. Das magnetische Feld hat keine Quellen, das heißt: In jedes beliebig geformte und beliebig große Volumen treten genau so viele magnetische Feldlinien ein wie aus.

Die unteren beiden Gleichungen beschreiben den Anteil der Felder, welcher sich durch geschlossene Linien darstellen lässt. Man nennt ihn auch den *Wirbel-* oder *Rotationsanteil* der Felder. Elektrische Wirbelfelder werden durch die Änderung von Magnetfeldern verursacht. Magnetische Wirbelfelder werden sowohl durch die Änderung elektrischer Felder als auch durch Ströme verursacht. Im Infinitesimalen werden die Ströme durch die Stromdichten $\mathbf{j}$ berücksichtigt.

Die durch Ladungen erzeugten elektrischen Felder haben Quellen und Senken. Diesen Felder können elektrische Wirbelfelder überlagert werden, welche durch Änderungen von Magnetfeldern entstehen. Die Magnetfelder selbst sind immer reine Wirbel- bzw. Rotationsfelder.

2.2 Elektromagnetische Wellen

Eine höchst bemerkenswerte Eigenschaft der Maxwell'schen Gleichungen ist, dass sich im dynamischen Falle die elektrischen und magnetischen Kraftfelder gegenseitig erzeugen. In der Abwesenheit von Strömen und Ladungen hat man

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \qquad \text{und} \qquad \nabla \times (\mathbf{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E},$$

also zwei (Vektor-) Gleichungen mit zwei (Vektor-) Unbekannten. Daher kann jeweils einen Feldgröße durch Einsetzen eliminiert werden. Man erhält zwei Gleichungen, die sich sehr ähnlich sehen:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\nabla \times \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen können drastisch vereinfacht werden, so dass sich Gl. (2.3) so schreiben lässt:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{E} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} \\ \Delta \mathbf{B} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathbf{B} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind Wellen mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}. \tag{2.5}$$

Diese Beziehung wird heute als so fundamental angesehen, dass ε_0 durch Messungen der Lichtgeschwindigkeit bestimmt wird. Die bekannteste Lösung der Gl. (2.4) beschreibt eine *ebene Welle*. In komplexer Notation wird sie durch

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}_0} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{j\varphi} e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{2.6}$$

mit der komplexen Amplitude $\underline{\mathbf{E}_0}$ beschrieben. Der Phasenwinkel φ ist $\varphi = 0$, wenn die Welle ab dem Ort $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ sinusförmig verläuft und das messbare Feld als Imaginärteil des komplexen Feldes genommen wird. Verschiedene Autoren benutzen jedoch die komplementäre Konvention,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\text{gemessen}) &= \Im \underline{E} \quad (\text{sinusförmiger Verlauf}) \\ \mathbf{E}(\text{gemessen}) &= \Re \underline{E} \quad (\text{cosinusförmiger Verlauf}) . \end{aligned} \tag{2.7}$$

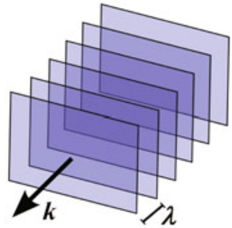

Abb. 2.2 Die Flächen gleicher Phase einer ebenen Welle im Vakuum: $\mathbf{k}$ ist der Wellenvektor, λ die Wellenlänge

Nimmt man den Imaginärteil, ist man mit der komplexen Wechselstromlehre konsistent, nimmt man den Realteil, so ist bei $\varphi = 0, t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ gerade $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. Auf jeden Fall gilt

$$|\mathbf{E}_0|_{\max} = \sqrt{\underline{\mathbf{E}}^* \cdot \underline{\mathbf{E}}}\,.$$

Flächen konstanter Phase ergeben bei ebenen Wellen parallele Ebenen im Abstand einer Wellenlänge λ. Damit folgt, wie Abb. 2.2 zeigt, die Bedeutung des *Wellenvektors* $\mathbf{k}$. Er ist ein Vektor, welcher in die Richtung der Ausbreitung zeigt und der den Wert $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ hat.

2.3 Felder in Materie

Auch elektrisch neutrale, nicht leitende Materialien haben nicht-triviale elektrische und magnetische Eigenschaften, denn Atome und Moleküle bestehen aus geladen Atomkernen und Elektronen. Im Folgenden soll nur der Fall betrachtet werden, in dem sehr viele Moleküle von Feldern durchdrungen werden, das Feld im Material also ohne Kenntnis der atomaren Details gemittelt werden kann.

Werden Moleküle durch mechanische Belastung oder durch den Einfluss eines äußeren Feldes verformt, so kann dies zu einer lokalen Ladungstrennung führen. Diesen Vorgang nennt man *Polarisation.* Er führt dazu, dass das elektrische Feld innerhalb des Festkörpers aus zwei Komponenten zusammengesetzt ist, dem Feld $\mathbf{E}_{\text{frei}}$, welches von den Ladungen außerhalb des Festkörpers erzeugt wird, und dem meist entgegengesetzten Polarisationsfeld des Festkörpers $\mathbf{E}_{\text{P}}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{frei}} + \mathbf{E}_{\text{P}}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit ε_0 und differenziert nach dem Ort, so ergibt sich mit Hilfe der nicht gebundenen Ladung $\rho_{\text{frei}} = \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{frei}}$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{frei}} &&= \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E} - \nabla \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{P}} \\ \rightarrow \quad & \rho_{\text{frei}} &&= \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{P}}) \\ \rightarrow \quad & \rho_{\text{frei}} &&= \nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Gleichung (2.8) beschreibt, wie das elektrische Kraftfeld **E** mit der Dichte der freien Ladung ρ_{frei} zusammenhängt. Sie ist gleichzeitig die Definitionsgleichung der *relativen Dielektrizität* ε_r. Bei Festkörpern, deren Moleküle bzw. Kristall sich nicht entgegengesetzt zum äußeren Feld verformen können, ist ε_r ein Tensor, denn diese Materialien verändern auch die Richtung des elektrischen Feldes. Man nennt sie *elektrisch anisotrop*. Meist ist ε_r einfache ein Konstante, die *relative Dielektrizitätskonstante*. Für lineare, isotrope Dielektrika gibt ε_r an, um welchen Faktor das durch die freien Ladungen verursachte Feld *abgeschwächt* wird.

In der Literatur wird Gl. (2.8) oft in der Form

$$\begin{aligned} \rho_{\text{frei}} &= (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \tag{2.9}$$

angegeben. Gleichung (2.9) ist gleichzeitig die Definitionsgleichung für **P** und **D**. **P** wird *Polarisation* oder besser *elektrische Dipoldichte* genannt. Die zweite Option macht auch das Vorzeichen verständlich: $\mathbf{P} = -\varepsilon_0 \mathbf{E}_P$. Genau so, wie beim elektrischen Dipol das elektrische Feld antiparallel zu dessen Dipolmoment ist, ist auch die durch den Vorgang der Polarisation hervorgerufene Dipoldichte **P** deren elektrischem Feld entgegengesetzt.

D wird nach dem von Maxwell eingeführten Begriff *electrical Displacement elektrische Verschiebung* oder auch *elektrische Erregung* genannt. Dieser Begrifflichkeit liegt die im 19. Jahrhundert populäre Idee zugrunde, dass die Ladungsdichte ρ zunächst ein von Raum und Materie unabhängiges Feld **D** erzeugt, welches entweder durch die Eigenschaften des Raumes (Äther) alleine oder durch die Materie im Raume (inklusive **P**) in das messbare Feld **E** verwandelt wird. Heute ist bekannt, dass es keinen Äther gibt, und dass die Definition von **D** als Differenz zweier Größen, von denen eine materieabhängig ist, mit der Idee eines reinen Erzeugerfeldes unvereinbar ist. Als Konsequenz kann man sich das Leben dadurch vereinfachen, dass man sich an die Notation in Gl. (2.8) hält und Gl. (2.9) ignoriert.

Auch Magnetfelder werden durch Stoffe verändert. In diesem Fall wird dem durch freie, also nicht im magnetisierten Material gebundenen Ströme erzeugten Feld $\mathbf{B}_{\text{frei}}$ ein durch die Magnetisierung des Materials verursachtes Feld $\mathbf{B}_{\text{M}}$ überlagert. Es wird also

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{frei}} + \mathbf{B}_{\text{M}}$$

gesetzt. Um der nächsten Maxwell-Gleichung näher zu kommen, nehmen wir die Rotation und nutzen die Tatsache, dass die Maxwell'schen Gleichungen auch in der Anwesenheit von Festkörpern gültig sind: Die Gleichung $\nabla \times (\mu_0^{-1}\mathbf{B}_{\text{frei}}) = \mathbf{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{frei}}$ ist dann die Konsequenz für die durch freie Ladungen erzeugten Felder. So findet man eine Gleichung für Magnetfelder in Materie.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{frei}} &= \mathbf{B} - \mathbf{B}_{\text{M}} \\
\rightarrow \nabla \times \left(\mu_0^{-1}\mathbf{B}_{\text{frei}}\right) &= \nabla \times \left(\mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mu_0^{-1}\mathbf{B}_{\text{M}}\right) \\
\rightarrow \mathbf{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial(\varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{frei}})}{\partial t} &= \nabla \times \left(\mu_0^{-1}\mu_r^{-1}\mathbf{B}\right) \\
\rightarrow \mathbf{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}) &= \nabla \times \left(\mu_0^{-1}\mu_r^{-1}\mathbf{B}\right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Gleichung (2.10) beschreibt, wie das magnetische Kraftfeld $\mathbf{B}$ mit der nicht an den Stoff gebundenen Stromdichte $\mathbf{j}_{\text{frei}}$ zusammenhängt. Sie ist gleichzeitig die Definitionsgleichung der *relativen Permeabilität* μ_r. Bei Festkörpern, deren Moleküle sich nicht entgegengesetzt zum äußeren Feld verformen können, ist μ_r, ein Tensor, denn diese Materialien verändern auch die Richtung des magnetischen Feldes. Man nennt sie *magnetisch anisotrop*. Für lineare, isotrope Materialien ist μ_r einfach eine Zahl, die angibt um welchen Faktor das von den freien Strömen erzeugte Magnetfeld *verstärkt* wird.

In der Literatur wird die Gl. (2.10) oft in einer der folgenden Formen angegeben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial(\mathbf{D})}{\partial t} &= \nabla \times (\mu_0^{-1}\mu_r^{-1}\mathbf{B}) \\
&= \nabla \times (\mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{M}) \\
&= \nabla \times \mathbf{H}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Dabei werden $\mathbf{H}$ *magnetische Erregung* oder auch *Magnetfeld* und $\mathbf{M}$ *Magnetisierung* oder besser *magnetische Dipoldichte* genannt. Die Vorzeichenwahl von $\mathbf{M}$ ist genau umgekehrt wie die von $\mathbf{P}$: $\mathbf{M} = +\mu_0^{-1}\mathbf{B}_{\text{M}}$.

Gleichung (2.11) ist die am häufigsten missverstandene Gleichung der Elektrotechnik überhaupt. Denn sie scheint erstens nahezulegen, dass das Feld $\mathbf{H}$ ein von

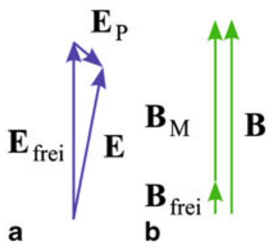

Abb. 2.3 Felder in Materie und ihre Komponenten: **a** zeigt das elektrische Feld in einem anisotropen Dielektrikum. **b** zeigt das magnetische Kraftfeld in einem Ferromagneten. Beide Fälle sind nicht maßstabsgerecht gezeichnet

Stoffeigenschaften unabhängiges, nur durch die freien Ströme und Feldänderungen bestimmtes sei. Auf einer makroskopischen Skala ist dies aber schlicht falsch. In Abschn. 3.2 wird gezeigt werden, dass magnetische Feldlinien in Stoffen mit großem μ_r eingeschlossen werden. Aus diesem Grunde wird der Verlauf und die Länge der Feldlinien für **B**, **M** und **H** ganz wesentlich von der Materieverteilung beeinflusst. Wenn sich aber die Länge einer Feldlinie ändert, muss sich auch die Feldstärke ändern, uns zwar für alle drei Feldgrößen.

Sehr hartnäckig hält sich auch die Annahme, **H** sei ein messbares Feld. Richtig ist: die Lorentz-Kraft ist die einzige bekannte auf Magnetfeldern fußende Kraft. Damit ist **B** die einzige messbare und damit im naturwissenschaftlichen Sinne existierende Feldgröße. Praktikumsversuche, in denen Studierende scheinbar den Unterschied zwischen dem **B** und dem **H** Feld messen können, basieren auf Fehlinterpretationen der Maxwell'schen Theorie. Hersteller, die behaupten Messgeräte für das **H** Feld zu verkaufen, verkaufen in Wirklichkeit umgeeichte **B** Messgeräte. Und wenn in einer Sicherheitsnorm der Betrag $|\mathbf{H}|$ als Grenzwert angegeben wird, so hat dies deshalb bisher keinerlei Gesundheitsschäden nach sich gezogen, weil der grundsätzliche Fehler durch glückliche Umstände ($\mu_r \approx 1$) nur mit einem numerischen Fehler im Ein-Prozentbereich einhergeht.

Abbildung (2.3) zeigt die Verhältnisse exemplarisch für ein anisotropes Dielektrikum und für ein ferromagnetisches Material. Beim anisotropen Dielektrikum ist $\mathbf{E}_\mathrm{P}$ nicht parallel zu $\mathbf{E}_\mathrm{frei}$. Das von den freien Ladungen erzeugte elektrische Kraftfeld wird abgeschwächt und erhält eine neue Richtung. Ferromagnetische Stoffe zeichnen sich dadurch aus, dass das Magnetisierungsfeld sehr viel stärker ist als das in die gleiche Richtung zeigende Magnetfeld der freien Ströme: $\mathbf{B}_\mathrm{frei} \ll \mathbf{B}_\mathrm{M}$.

Die Gln. (2.9) und (2.11) werden oft auch als *Maxwellsche Gleichungen für Materie* bezeichnet. Sie bilden jedoch keine eigene Theorie, sondern sind schlicht Konsequenzen einer Anwendung der Maxwell'schen Gleichungen auf polarisierbare bzw. magnetisierbare Medien. Das Gleichungssystem (2.2) gilt ohne Einschränkungen sowohl im Vakuum wie auch in Materie.

Auch in den in Gl. (2.11) verwendeten Größen schwingt die alte Hoffnung auf eine Trennung zwischen einem reinen, von Raum und Materie unbeeinflussten Feld **H** und seinem durch Äther und Materie in Messgrößen verwandeltes Wirkfeld **B** wieder. Heute ist bekannt, dass eine rechnerische Trennung zwischen Felderzeugung und Feldwirkung nur in trivialen Spezialfällen funktioniert.

Vergleicht man Gln. (2.8) und (2.10) mit den dazugehörigen Maxwell-Gleichungen, so ergibt sich eine einfache Regel, um auf die die Materie berücksichtigenden Gleichungen zu kommen:

$$\begin{aligned} &\text{immer} && \rightarrow \text{in Materie} \\ &(\varepsilon_0 \mathbf{E}) && \rightarrow (\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}) \\ &(\mu_0^{-1} \mathbf{B}) && \rightarrow (\mu_0^{-1} \mu_r^{-1} \mathbf{B}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Bei anisotropen Materialien ist es wichtig, dass die Substitution genau in dieser Reihenfolge und Klammerung geschieht. Ihr Geltungsbereich ist durch die Quantenmechanik begrenzt: Wenn atomare Distanzen betrachtet werden, funktioniert das Verfahren nicht mehr. Eine andere Grenze setzt der in EPROM Transistoren genutzte Tunneleffekt, denn er löst die Grenze zwischen freien und gebundenen Ladungsträgern auf.

Springer
http://www.springer.com/978-3-662-45592-0

Die Maxwell´sche Theorie
Für Ingenieure und Master-Studenten
Poppe, M.
2015, XIII, 29 S. 12 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-45592-0