# Mengen und Zählen 2

Das Vorgehen in der Mengenlehre besteht darin, gewisse Objekte zu *Mengen* zusammenzufassen und dann diese Mengen und ihr Verhältnis zueinander zum Gegenstand der Betrachtung zu machen. Die Eigenschaften der Objekte sind hier von sekundärem Interesse.

Dabei werden Begriffe verwendet, die so selbstverständlich für unser Denken sind, dass sich die Frage aufdrängt, wieso es nötig ist, sie zu erläutern oder zu definieren und in Symbolen auszudrücken. Bei näherer Betrachtung stellt sich aber heraus, dass die Symbole nützliche Abkürzungen sein können und eine gute Voraussetzung für exaktes Argumentieren auf der Grundlage der schon bereitgestellten Logik darstellen.

Die Mengenlehre, wie wir sie heute kennen, nahm ihren Anfang zu Beginn des 20. Jahrhunderts, als sich herausstellte, dass der *naive* Umgang mit Mengen zu Paradoxien führen kann. Das wohl berühmteste Beispiel einer solchen Widersprüchlichkeit ist die nach ihrem Entdecker benannte *Russell'sche Antinomie*,[1] die wir in Abschn. 2.3 vorstellen werden. Bestrebungen, sich solcher Paradoxien zu entledigen, führten zu einem Entwicklungsschub in Logik und Mengenlehre zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

Axiomensysteme wurden entwickelt, durch deren Analyse die Probleme zum Teil beseitigt, zum Teil wenigstens angemessen beschrieben werden konnten. Die gebräuchlichsten heutigen Axiomensysteme zur Mengenlehre basieren auf dem von Zermelo und Fraenkel[2], meist ergänzt durch das *Auswahlaxiom*, dessen Sonderrolle allerdings eher historisch als inhaltlich begründet sein dürfte (vgl. dazu auch die entsprechende Fußnote in Abschn. 4.2). Es ist bis heute nicht gelungen, das endgültige Axiomensystem zur Mengenlehre aufzustellen. Strittig ist allerdings im Wesentlichen nur, ob gewisse Axiome, die die Existenz von bzw. den Umgang mit

[1] Bertrand Arthur William Russell, 3. Earl Russell, britischer Philosoph, Mathematiker und Logiker, 1872–1970.

[2] Ernst Zermelo, deutscher Mathematiker, 1871–1953; Adolph Abraham Fraenkel, deutscher Mathematiker, 1891–1965.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015 
U. Knauer, K. Knauer, *Diskrete und algebraische Strukturen – kurz gefasst*,
DOI 10.1007/978-3-662-45177-9_2

sehr großen Mengen regeln, zu den Zermelo/Fraenkel-Axiomen hinzugefügt werden sollen oder nicht. Für die Anwendung von Mengen innerhalb wie außerhalb der Mathematik sind diese Fragen kaum von Bedeutung. Trotzdem kann es spannend sein, zum Beispiel darüber nachzudenken, ob ein zusätzliches Axiom wünschenswert ist, aufgrund dessen die reellen Zahlen die kleinste nicht abzählbare Menge bilden, oder nicht (Stichwort: *Kontinuumshypothese*, vgl. Abschn. 4.8).

Wer sich, durch erste Erfahrungen im formalen Umgang mit Mengen ermutigt und vielleicht durch Russells Antinomie neugierig geworden, einem der Bücher über Mengenlehre zuwendet, wird wahrscheinlich feststellen, dass die Ergebnisse unseres intuitiven Zugangs zur Mengenlehre für einen systematischen Aufbau nicht wesentlich modifiziert, sondern nur aus einem anderen Blickwinkel betrachtet werden müssen, um eine tragfähige Theorie zu erhalten.

**Zur Literatur:** Eine gute Mischung aus Stringenz und Verständlichkeit zum Thema Mengenlehre stellt das Buch von Hrbacek und Jech [1] dar. Dort werden unter anderem die Vor- und Nachteile verschiedener zusätzlicher Axiome erläutert. Es eignet sich zum Selbststudium und auch zum Nachschlagen. Zum Zählen, dem zweiten Thema dieses Kapitels, erwähnen wir die Bücher von Aigner [2] und Jacobs [3], die neben Einblicken in die Vielfalt kombinatorischer Fragestellungen auch Graphen- und Codierungstheorie einschließen. Aigner berücksichtigt insbesondere anwendungsbezogene Fragestellungen, Jacobs stellt im letzten Kapitel eine Liste berühmter Folgen ganzer Zahlen zusammen.

## 2.1 Mengen

Menge, definierende Eigenschaft, Element, Venn-Diagramme, Universalmenge, Gleichheit von Mengen, leere Menge, (echte) Teilmenge, Inklusion

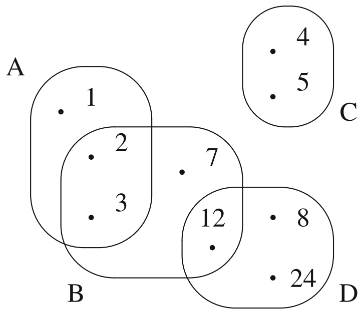
Der Begriff ***Menge*** „erscheint dem Denken so fundamental, dass wir nicht hoffen können, ihn mithilfe noch fundamentalerer Begriffe definieren zu können“, stellt Quine [4] in seinem Buch *Mengenlehre und ihre Logik* fest. – Wenn wir also *Menge* als Ansammlung, Gesamtheit bzw. Zusammenfassung irgendwelcher Objekte definieren, sind wir kein Stück weitergekommen, weil nun *Ansammlung*, *Gesamtheit* bzw. *Zusammenfassung* definiert werden müsste.

Wir verzichten deshalb darauf, eine solche „Pseudo-Definition“ anzugeben. Beispiele für Mengen kennen wir alle: die reellen Zahlen, die Konsonanten unseres Alphabets, die Seiten dieses Buches, die Planeten unseres Sonnensystems.

Wir beschreiben eine Menge, indem wir angeben, welche Elemente sie enthält und welche nicht. Dabei ist es sinnvoll, sich vorzustellen, dass die betrachteten Elemente aus einer *Universalmenge* stammen. Diese entspricht dem Individuenbereich in der Prädikatenlogik.

Wir schreiben $a \in M$, wenn $a$ Element der Menge $M$ ist und $a \notin M$, wenn $a$ nicht Element der Menge $M$ ist.

**Abb. 2.1** Venn-Diagramme der Mengen $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 3, 7, 12\}$, $C := \{4, 5\}$, $D := \{12, 24, 8\}$




Eine Menge kann im Wesentlichen auf zweierlei Weise angegeben werden: zum einen durch Aufzählen ihrer Elemente zwischen geschweiften Klammern, z. B.

$$A = \{\text{rot, gelb, grün}\},$$

zum anderen durch Auswahl aus einer schon definierten Menge mittels einer definierenden Eigenschaft, z. B.

$$M = \{x \mid x \text{ ist ein Vektor aus } \mathbb{R}^2 \text{ und } x \text{ ist Vielfaches von } (1, 1)\},$$

gelesen: „$M$ ist die Menge aller Objekte $x$ (aus der schon definierten Menge), für die gilt …“. Die Menge, aus der ausgewählt wird, kann dabei auch vor dem senkrechten Strich angegeben werden, etwa wie folgt:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists \lambda \in \mathbb{R}) : \; x = \lambda(1, 1)\}.$$

In beiden Fällen haben wir die Menge $M$ in der Form $M = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ beschrieben mittels eines Prädikats $\mathcal{P}(x)$, dessen Interpretation in der zweiten Darstellung lautet: „$(\exists \lambda \in \mathbb{R}) : \; x = \lambda(1, 1)$“. Wir nennen $\mathcal{P}(x)$ auch ***die definierende Eigenschaft*** der Menge $M$.

***Venn***[3]***-Diagramme*** eignen sich dazu, die Beziehung von Mengen zueinander graphisch darzustellen. Sie sind auch hilfreich zum Entwickeln einer Beweisidee, können aber einen formalen Beweis nicht ersetzen. In Österreich werden sie oft ***Mengenknödel*** genannt. Abbildung 2.1 enhält ein Beispiel.

## Gleichheit und Teilmengen

Zwei Mengen $M$ und $N$ heißen ***gleich***, wenn sie dieselben Elemente enthalten, d. h.:

$$M = N \;:\Leftrightarrow\; \big( (\forall x) : \; x \in M \Leftrightarrow x \in N \big).$$

[3] John Venn, englischer Mathematiker, 1834–1923.

Daraus folgt: In Beweisen der Mengengleichheit müssen wir für ein beliebiges $x$ die beiden folgenden Implikationen zeigen:

$$x \in M \Rightarrow x \in N \quad \text{und} \quad x \in N \Rightarrow x \in M.$$

**Lemma 2.1 (Gleiche Elemente)** Es gilt $\{a\} = \{a, a\}$.

**Beweis** Es gilt: $(\forall x): \;\; x \in \{a\} \Leftrightarrow x \in \{a,a\}$. □

Es gilt allgemein: Wenn wir eine Menge durch Aufzählung ihrer Elemente angeben und ein Element mehrfach vorkommt, dann ist diese Menge gleich derjenigen, die dieses Element nur einmal enthält. Für den Fall, dass in einer Menge ein Element mehrfach vorkommen soll, geben wir eine Lösung in Abschn. 2.2 an: Die einzelnen Kopien desselben Elements werden durch einen formalen Trick voneinander unterschieden. Eine andere Lösung sind sogenannte ***Multimengen***: Man schreibt die Elemente einer Menge bei Bedarf mehrfach in die geschweiften Klammern.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt ***leere Menge*** und wird mit $\emptyset$, manchmal auch mit $\{\}$ bezeichnet.

**Satz 2.2 (Eindeutigkeit der leeren Menge)** Es gibt nur eine leere Menge.

**Beweis** Es seien $A$ und $B$ leere Mengen, dann gilt: $(\forall x): \;\; x \in A \Rightarrow x \in B$, denn eine Implikation, deren linke Seite falsch ist, ist selbst wahr. Ebenso gilt $(\forall x): x \in B \Rightarrow x \in A$, also ist $A = B$. □

Eine Menge $M$ heißt ***Teilmenge*** einer Menge $N$ (Schreibweise: $M \subseteq N$), wenn jedes Element von $M$ auch in $N$ liegt:

$$M \subseteq N \;:\Leftrightarrow\; \big( (\forall x): \;\; x \in M \Rightarrow x \in N \big).$$

**Lemma 2.3 (Triviale Teilmengen)** Für Mengen $M$ gilt $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$.

**Beweis** Die Aussagen $(\forall x): x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ und $(\forall x): x \in M \Rightarrow x \in M$ sind offensichtlich wahr. □

Eine Menge $M$ heißt ***echte Teilmenge*** einer Menge $N$, wenn $M$ Teilmenge von $N$, aber ungleich $N$ ist, d. h. wenn $N$ mindestens ein Element enthält, das nicht in $M$ liegt. Wir schreiben $M \subset N$, wenn $M$ echte Teilmenge von $N$ ist. Wir weisen darauf hin, dass gelegentlich auch das Symbol $\subset$ anstelle von $\subseteq$ verwendet wird. Dann kann die Beziehung „ist echte Teilmenge von" durch das Symbol $\subsetneq$ ausgedrückt werden. Das Symbol $\not\subseteq$ bedeutet: „ist nicht Teilmenge von". Die Beziehung „ist Teilmenge von" wird auch als ***Inklusion*** bezeichnet.

Es ist wichtig, die Zeichen $\in$ und $\subseteq$ sorgsam voneinander zu unterscheiden. Die Frage, ob ein Objekt Element oder Teilmenge einer Menge ist, ist eigentlich nicht schwierig zu beantworten. Trotzdem werden dabei oft Fehler gemacht, die sich unangenehm auswirken können.

**Beispiel 2.4 (Elemente und Teilmengen)**

- $\{2, 3\} \subseteq \{4, 3, 2\}$, $3 \in \{4, 3, 2\}$,
- $\{a\} \not\subseteq \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, aber $\{\{a\}\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ und $\{a\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ und $\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{x, y\} \in \{\{x, y\}, x, y, z\}$ und $\{x, y\} \subseteq \{\{x, y\}, x, y, z\}$,
- $\emptyset \subsetneqq \{a, b, c\}$, aber $\{\emptyset\} \not\subseteq \{a, b, c\}$.

**Lemma 2.5 (Transitivität der Inklusion)** Für je drei Mengen $M_1$, $M_2$ und $M_3$ gilt: $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$ implizieren $M_1 \subseteq M_3$.

**Beweis** Für die Mengen $M_1$, $M_2$ und $M_3$ gelte $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_3$. Zu zeigen ist: $(\forall\, x) : x \in M_1 \Rightarrow x \in M_3$. Sei $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subseteq M_2$ folgt $x \in M_2$ und wegen $M_2 \subseteq M_3$ folgt daraus $x \in M_3$. $\square$

## 2.2 Verknüpfungen von Mengen

Differenzmenge, Durchschnitt, Vereinigung, symmetrische Differenz, kartesisches Produkt, Komplement, (geordnetes) Paar, erste/zweite Komponente, Potenzmenge, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, neutrales Element, de Morgans Regeln, Tripel, $r$-Tupel, Komponente, $r$-te ($I$-te) Potenz einer Menge, Familie/System von Mengen, Partition, Blöcke einer Partition, (disjunkte) Vereinigung

Wir empfehlen, die nun folgenden Definitionen mit denen über Verknüpfungen von Aussagen aus Abschn. 1.3 zu vergleichen.

Wir stellen die gängigen Verknüpfungen von jeweils zwei Mengen $A$ und $B$ in Tab. 2.1 zusammen und geben dann Beispiele an.

Gilt $A \subseteq B$, so heißt die Differenzmenge $B \setminus A$ auch das ***Komplement von*** $A$ ***in*** $B$ und wir schreiben $C_B(A)$ oder $\overline{A}^B$, manchmal auch nur $C(A)$ oder $\overline{A}$, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

**Tab. 2.1** Verknüpfungen von Mengen

| Name | Definition | Sprechweise |
|---|---|---|
| ***Differenzmenge*** | $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$ | $A$ ohne $B$ |
| ***Durchschnitt*** | $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ | $A$ geschnitten $B$ |
| ***Vereinigung*** | $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ | $A$ vereinigt $B$ |
| ***symmetrische Differenz*** | $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ | $A$ Delta $B$ |
| ***kartesisches Produkt*** | $A \times B := \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ | $A$ Kreuz $B$ |

Die Definitionen von Durchschnitt und Vereinigung liefern eine Motivation für die Ähnlichkeiten der Zeichen $\cap$ und $\wedge$ sowie $\cup$ und $\vee$.

Das kartesische[4] Produkt $A \times B$ von $A$ und $B$ ist also die Menge aller *(geordneten) Paare* $(a, b)$ mit *erster Komponente* $a \in A$ und *zweiter Komponente* $b \in B$. Ist $A = B = \mathbb{R}$, so sprechen wir auch vom *kartesischen Koordinatensystem*, vgl. Abschn. 4.1.

Für $(a, b), (x, y) \in A \times B$ definieren wir die Gleichheit wie folgt:

$$(a, b) = (x, y) \;:\Leftrightarrow\; a = x \text{ und } b = y.$$

Wenn wir das geordnete Paar $(x, y)$ als Abkürzung für die Menge $\{x, \{x, y\}\}$ auffassen, dann erübrigt sich diese Definition, weil sie dann eine Folgerung aus der Definition der Mengengleichheit ist.

Wenn für zwei Mengen $M$ und $N$ gilt, dass kein Element in beiden Mengen liegt, d. h. wenn

$$(\forall x): \quad x \in M \Rightarrow x \notin N,$$

dann heißen diese Mengen $M$ und $N$ ***disjunkt (zueinander)***. Zwei Mengen $M$ und $N$ sind disjunkt genau dann, wenn $M \cap N = \emptyset$.

In dem Venn-Diagramm in Abschn. 2.1 sind die Mengen $A$ und $D$ disjunkt, ebenso $B$ und $C$, auch $C$ und $D$, sowie $A$ und $C$. Obwohl es kein Element gibt, das in allen drei dort angegebenen Mengen $A$, $B$ und $D$ liegt, sagen wir nicht, diese drei Mengen seien disjunkt. Dieser Begriff bezieht sich immer nur auf zwei Mengen. – Wir definieren gleich allgemein: $n$ Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ $(n \in \mathbb{N})$ heißen ***paarweise disjunkt***, wenn gilt:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ mit } i \neq j)\,(\forall x): \quad x \in M_i \Rightarrow x \notin M_j.$$

Wie wir an dem Beispiel im Venn-Diagramm in Abschn. 2.1 sehen, gilt $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$. Daraus schließen wir, dass die Bildung eines gemeinsamen Durchschnitts nicht geeignet ist, um den Begriff paarweise disjunkt zu beschreiben.

**Beispiele 2.6 (Mengenoperationen)**

(1) {a, ber, witz} \ {a, ber} = {witz}, aber:
{a, ber, witz} \ {tz} = {a, ber, witz}.

(2) $\{2, 4, 6, 8, \} \cap \{3, 6, 9, 12\} = \{6\}$.

(3) {edel, hilfreich, gut} ∩ {hilfreich, edel} = {edel, hilfreich}.

(4) $\{0, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3, 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

(5) $\{\{42\}, \{7, -68\}\} \cup \{\{42\}, 7\} = \{\{42\}, \{7, -68\}, 7\}$.

(7) $\{a, b\} \times \{0, 1, 2\} = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$.

Wir haben eingangs schon bemerkt, dass die Elemente einer Menge selbst wieder Mengen sein können. Eine wichtige „Menge von Mengen" ist diese:

[4] René Descartes, französischer Philosoph und Mathematiker, 1596–1650.

**Tab. 2.2** Mengenidentitäten

**Assoziativitäten**

$$\begin{aligned} (A\cup B)\cup C &= A\cup(B\cup C)\\ (A\cap B)\cap C &= A\cap(B\cap C)\\ (A\times B)\times C &\cong A\times(B\times C) \end{aligned}$$

**Neutrale Elemente**

$$\begin{aligned} A\cap M &= A\\ A\cup\emptyset &= A \end{aligned}$$

**Komplemente**

$$\begin{aligned} A\cup\overline{A} &= M\\ A\cap\overline{A} &= \emptyset \end{aligned}$$

**Kommutativitäten**

$$\begin{aligned} A\cup B &= B\cup A\\ A\cap B &= B\cap A\\ A\Delta B &= B\Delta A \end{aligned}$$

**Distributivitäten**

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\\ A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

Die ***Potenzmenge*** einer Menge $M$ ist diejenige Menge $\wp(M)$, die als Elemente alle Teilmengen von $M$ hat.

Nach Lemma 2.3 gelten stets $\emptyset \in \wp(M)$ und $M \in \wp(M)$.

**Beispiel 2.7 (Potenzen)** Es gilt $\wp(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $\wp(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ und $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$, jedoch $\wp(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

## Mengenidentitäten

Für Teilmengen $A$, $B$ und $C$ einer jeden Menge $M$ gelten die folgenden Identitäten. Hier bedeutet Identität oder genauer Mengenidentität, dass eine Gleichungsform, etwa $A \cup B = B \cup A$, für alle Mengen $A$ und $B$ eine wahre Aussage ist. Beachte das $\cong$ in der Assoziativität des kartesischen Produkts. Das soll bedeuten: Das Assoziativgesetz für das kartesische Produkt gilt, wenn wir die Elemente $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$ und $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ als *im Wesentlichen gleich*[5] ansehen und dafür einfach $(a, b, c)$ schreiben. Siehe Tab. 2.2.

Der folgende Beweis des ersten der beiden Distributivgesetze zeigt, wie diese mit den entsprechenden Gesetzen in Kap. 1 zusammenhängen.

**Beweis (Distributivitäten)** Es seien $A$ und $B$ Teilmengen einer Menge $M$. Für jedes Element $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} & x \in A\cup(B\cap C)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad (x\in A)\vee((x\in B)\wedge(x\in C)) \quad \text{(nach Definition von } \cup \text{ und } \cap)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad ((x\in A)\vee(x\in B))\wedge((x\in A)\vee(x\in C)) \quad \text{(Distributivität)}\\ &\quad\Leftrightarrow\quad (x\in A\cup B)\wedge(x\in A\cup C) \quad \text{(nach Definition von } \cup)\\ &\quad\Leftrightarrow\quad x\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad \text{(nach Definition von } \cap). \end{aligned}$$

□

Auch die übrigen logischen Identitäten aus Abschn. 1.4 lassen sich zu wahren Aussagen über Mengen umformulieren. Siehe Tab. 2.3.

[5] Das ist ein gern benutzter Begriff, der sich in unterschiedliche Definitionen von Isomorphie auffächert, je nachdem welche Menge und Strukturen betrachtet werden.

**Tab. 2.3** Weitere Mengenidentitäten für $A, B \subseteq M$

| | |
|---|---|
| **Gleichheit** | **Komplement als Involution** |
| $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ | $A = \overline{\overline{A}}$ |
| **de Morgans Regeln** | |
| $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ <br> $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$ |

Wie in Kap. 1 können wir auch für Vereinigungen, Durchschnitte von Mengen aufgrund der Assoziativgesetze auf Klammern verzichten. Für kartesische Produkte tun wir es gemäß der weiter oben gemachten Bemerkungen. Wir schreiben $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$ und $A \times B \times C$ für Mengen $A$, $B$ und $C$, allgemeiner für Teilmengen $A_i$ einer Menge $M$:

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r \quad \text{und sogar} \quad \bigcup_{i \in I} A_i$$

für eine beliebige Indexmenge $I$. Entsprechend erhalten wir die Schreibweisen

$$\bigcap_{i=1}^{r} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

sowie

$$\prod_{i=1}^{r} A_i := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r \quad \text{und} \quad \prod_{i \in I} A_i .$$

In Analogie zur Schreibweise für Produkte von Zahlen verwenden wir außerdem, falls alle Faktoren $A_i$ gleich einer Menge $A$ sind,

$$A^r := \prod_{i=1}^{r} A_i , \quad \text{und sogar} \quad A^I := \prod_{i \in I} A_i$$

für die ***r*-te** bzw. ***I*-te Potenz der Menge** $A$. Die Elemente

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) \in \prod_{i=1}^{r} A_i$$

heißen ***(geordnete) r-Tupel*** (***Paare*** für $r = 2$ und ***Tripel*** für $r = 3$).

## Familie, Partition, Block

Ist $I$ eine Menge und ist für jedes $i \in I$ eine Menge $A_i$ gegeben, so sagen wir, $(A_i)_{i \in I} = (\, A_i \mid i \in I \,)$ sei eine ***Familie*** oder ein ***System von Mengen***. Die runden Klammern drücken aus, dass wir nicht ausschließen, dass $A_i = A_j$ für $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt. In diesem Fall könnten wir nämlich nicht $\{\, A_i \mid i \in I \,\}$ schreiben, vgl.

Lemma 2.1. Dennoch ist es möglich, eine Familie von Mengen ebenfalls als Menge zu definieren:

$$(A_i)_{i \in I} := \{ (A_i, i) \mid i \in I \}.$$

Auf diese Weise wird erreicht, dass für $i \neq j$ stets $(A_i, i) \neq (A_j, j)$ ist – selbst dann, wenn $A_i = A_j$ ist. Häufig schreibt man trotzdem $\{ A_i \mid i \in I \}$.

Wenn eine Menge $M$ gleich der Vereinigung einer Menge paarweise disjunkter, nicht leerer Mengen $\{A_i | i \in I\}$ ist, dann sagen wir: $\{A_i | i \in I\}$, manchmal auch $(A_i)_{i \in I}$, ist eine ***Partition, Zerlegung*** oder ***Klasseneinteilung von*** $M$. Die Mengen $A_i$, $i \in I$, werden als ***Blöcke der Partition*** bezeichnet. Wir schreiben

$$M = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$$

und sagen, dass $M$ die ***disjunkte Vereinigung*** ist.

**Beispiel 2.8 (Partition)** Es gibt genau fünf Partitionen einer dreielementigen Menge $\{ a, b, c \}$, nämlich:

$$\{\{ a, b, c \}\}, \{\{ a \}, \{ b, c \}\}, \{\{ b \}, \{ a, c \}\}, \{\{ c \}, \{ a, b \}\}$$
$$\text{und } \{\{ a \}, \{ b \}, \{ c \}\} .$$

Die Frage nach der Anzahl der Partitionen einer $n$-elementigen Menge werden wir in Satz 2.22 beantworten.

**Aufgabe 2.1 (Leere Menge, Potenzmenge)**
Bestimme $\wp(\{ 1, 2, 3 \})$ und $\wp(\wp(\wp(\emptyset)))$. Beweise $\emptyset \times M = \emptyset$ für jede beliebige Menge $M$.

**Aufgabe 2.2 (Charakterisierung von Eigenschaften)**
Finde für jede der folgenden Aussagen Bedingungen an die Mengen $A$ und $B$, sodass die betreffende Aussage wahr ist. Hinweis: In (a) kommt man durch Zeichnen von Venn-Diagrammen (hoffentlich) zu der Vermutung $(A \Delta B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = B)$ und diese soll dann bewiesen werden.

(a) $A \Delta B = \emptyset$
(b) $A \cup B = A$
(c) $A \cap B = A$
(d) $A \cup B \subseteq A \cap B$
(e) $A \cup \emptyset = \emptyset$.

**Aufgabe 2.3 (Monotonie)**
Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Teilmengen $A, B, C$ einer vorgegebenen Menge $M$ wahr? – Beweis bzw. Gegenbeispiel.

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
(b) $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
(c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
(d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
(e) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$
(f) $A \subseteq B \Rightarrow A \Delta C \subseteq B \Delta C$.

Hinweis: Für (c) ist mit (a), (b) und de Morgan ein eleganter Beweis möglich.

**Aufgabe 2.4 (Durchschnitt und Vereinigung)**
Zeige, dass für beliebige Mengen $A$ und $B$ gilt $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

**Aufgabe 2.5 (Mengen im $\mathbb{R}^2$)**
Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A := \{(1, 2), (3, -2)\}, \qquad C := \{(3\alpha, -2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$
$$B := \{(x, y) \mid 2x - y = 0\}, \qquad D := \{(\alpha, 2\alpha) + (6\beta, -4\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Zeichne die Mengen in ein Koordinatensystem.
(b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch:

$$(\alpha) \quad A \subseteq B, \qquad (\beta) \quad A \subseteq D, \qquad (\gamma) \quad B \cup C = D, \qquad (\delta) \quad \emptyset \in B, \qquad (\epsilon) \quad \emptyset \subseteq A.$$

(c) Beschreibe die folgenden Mengen:

$$(\alpha) \quad B \cap C, \qquad (\beta) \quad B \Delta C, \qquad (\gamma) \quad A \cap B, \qquad (\delta) \quad A \cap C, \qquad (\epsilon) \quad A \cap D.$$

**Aufgabe 2.6 (Partitionen)**
Gib alle Partitionen einer 2-elementigen und einer 4-elementigen Menge an.

**Aufgabe 2.7 (Disjunkte Vereinigung)**
Zeige für beliebige Mengen $A$ und $B$:

(a) $A = (A \cap B) \ \dot{\cup} \ (A \setminus B)$,
(b) $A \cup B = (A \cap B) \ \dot{\cup} \ (A \setminus B) \ \dot{\cup} \ (B \setminus A)$.

## 2.3 Mächtigkeit und Unmengen

Mächtigkeit, Kardinalität/Kardinalzahl einer Menge, endliche Menge, $n$-elementige Menge, Aussonderungsaxiom, Unmengen, Russell'sche Antinomie, (echte) Klasse

Eine Menge mit endlich vielen Elementen heißt ***endliche Menge***. Eine endliche Menge mit $n$ Elementen bezeichnen wir als ***$n$-elementige Menge***. Die ***Mächtigkeit*** (oder ***Kardinalität*** oder ***Kardinalzahl***) einer endlichen Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

$$\text{Schreibweisen: } \operatorname{card}(M) \text{ oder } |M| \text{ oder } \#M .$$

Auch für nicht endliche Mengen gibt es die Möglichkeit, Mächtigkeiten zu unterscheiden. Diese Unterscheidung können wir aber erst in Abschn. 4.8 nach Einführung des Begriffs der Abbildung zufriedenstellend formulieren.

**Satz 2.9 (Mächtigkeit der Potenzmenge)** Für jede endliche Menge $M$ mit $\operatorname{card}(M) = n$ gilt $\operatorname{card}(\wp(M)) = 2^n$.

**Beweis** Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach $n$:

(IA) $n = 0$: Die Potenzmenge der leeren Menge hat genau $2^0 = 1$ Element, nämlich die leere Menge selbst (vgl. Beispiel 2.7).
(IV) Wenn $\text{card}(M) = n$, so gilt $\text{card}(\wp(M)) = 2^n$.
(IS) Sei nun $A$ eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Wir wählen ein Element $a \in A$. Die Menge $A \setminus \{ a \}$ hat $n$ Elemente, also nach (IV) genau $2^n$ Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$. Diese sind zugleich auch Teilmengen von $A$ (Transitivität!). Weitere $2^n$ Teilmengen von $A$ sind $A_1 \cup \{ a \}, A_2 \cup \{ a \}, \ldots, A_{2^n} \cup \{ a \}$. Damit wissen wir, dass $A$ *mindestens* $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen hat.

Ist nun $B$ eine beliebige Teilmenge von $A$, so gibt es zwei Möglichkeiten *(Tertium non datur!)*: Entweder gilt $a \in B$, oder es gilt $a \notin B$.

1. Fall: $a \notin B$. Dann ist $B \subseteq A \setminus \{ a \}$ eine der Mengen $A_i, 1 \leq i \leq 2^n$, die im ersten Durchgang gezählt wurden.
2. Fall: $a \in B$. Dann ist $B \setminus \{ a \}$ eine der Teilmengen $A_i$ von $A \setminus \{ a \}$ und $B = A_i \cup \{ a \}$ wurde im zweiten Durchgang mitgezählt.

Damit ist gezeigt, dass wir alle Teilmengen von $A$ gezählt haben. □

Für endliche Mengen haben wir damit insbesondere gezeigt, dass die Mächtigkeit der Potenzmenge einer Menge stets größer ist als die der Menge selbst. Das gilt übrigens nicht nur für endliche, sondern sogar für unendliche Mengen, wie wir in Satz 4.37 zeigen werden.

Das ***Aussonderungsaxiom*** besagt, dass zu jeder Menge $M$ und jedem Prädikat $\mathcal{P}(x)$ eine Menge $P_M$ existiert, die genau diejenigen Elemente $x \in M$ enthält, für die $\mathcal{P}(x)$ eine wahre Aussage ist. Das bedeutet, dass wir zu jeder Menge Teilmengen bilden können. Dieses Axiom wird in der Mathematik als unverzichtbar angesehen. Wir verwenden es hier, um den folgenden Satz zu beweisen, der eine Grenze des Begriffs der Menge zeigt und von Halmos[6] zusammengefasst wird zu „Nichts enthält alles.“

**Satz 2.10 („Unmengen“)** Die Gesamtheit aller Mengen ist keine Menge.

**Beweis** (Indirekt) Es sei $M$ die Gesamtheit aller Mengen, d. h. $M$ enthalte als Elemente alle Mengen. Annahme: $M$ ist eine Menge. Nach dem Aussonderungsaxiom ist auch

$$P_M := \{ x \in M \mid x \notin x \}$$

eine Menge, denn $x \notin x$ ist sicherlich ein Prädikat, und $P_M$ ist offenbar eine Teilmenge von $M$, d. h. es gilt $P_M \subseteq M$. Weil jede Menge Element von $M$ ist, gilt

[6] Paul Richard Halmos, ungarisch-US-amerikanischer Mathematiker, 1916–2006.

auch $P_M \in M$. – Wir wissen aus Beispiel 2.4, dass es durchaus möglich ist, dass eine Menge sowohl Teilmenge als auch Element einer anderen sein kann.

Nach dem Gesetz des ausgeschlossenen Dritten gilt entweder $P_M \in P_M$ oder $P_M \notin P_M$. Wir untersuchen beide Fälle:

1. Fall: $P_M \in P_M$ impliziert nach Definition von $P_M$ wegen $P_M \in M$, dass $P_M \notin P_M$ ist, Letzteres ist ein Widerspruch zu $P_M \in P_M$.
2. Fall: $P_M \notin P_M$. In diesem Fall liefert uns die Definition von $P_M$, da wir ja $P_M \in M$ vorausgesetzt hatten, dass $P_M \in P_M$ gilt, ebenfalls ein Widerspruch.

Da beide Fälle zum Widerspruch führen, muss unsere Annahme, $M$ sei eine Menge, falsch gewesen sein. Damit ist der Satz bewiesen. □

Die Argumentation, mit der wir diesen Satz hergeleitet haben, ist als ***Russell'sche Antinomie*** bekannt. In volkstümlicher Form lautet sie:

*In einem kleinen Dorf gibt es einen Dorfbarbier. Der rasiert genau die Männer des Dorfes, die sich nicht selbst rasieren. – Wer rasiert den Dorfbarbier?*

Man reagiert auf diese Paradoxie, indem man den Begriff der ***Klasse*** einführt: Jede Menge ist eine Klasse. Die Gesamtheit aller Mengen ist ebenfalls eine Klasse und wird als ***echte Klasse*** bezeichnet, da sie nicht gleichzeitig auch eine Menge ist. Analog zur Mengentheorie lässt sich nun eine Klassentheorie entwickeln, in der ähnliche Gesetze gelten wie für Mengen. Insbesondere ist die Gesamtheit aller Klassen selbst keine Klasse ...

## 2.4 Zählen

Prinzip von Einschließung und Ausschließung (Inklusion und Exklusion), fundamentales Zählprinzip, unabhängige Ereignisse

Wir betrachten hier einige Grundprinzipien des Abzählens.

Ein sehr elementares Beispiel ist das *Dirichlet'sche Taubenschlagprinzip*[7]:

*Halten sich $n + 1$ Tauben in $n$ Taubenschlägen auf, so gibt es mindestens einen Taubenschlag, in dem sich mindestens zwei Tauben aufhalten.*

### Inklusion und Exklusion

Wir stellen das *Prinzip der Einschließung und Ausschließung* bzw. *der Inklusion und Exklusion* an den Anfang. Dazu eine typische Frage:

Wie viele Zahlen in der Menge $M := \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ gibt es, die weder durch 4 noch durch 6 teilbar sind?

[7] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, belgischer Mathematiker, 1805–1859.

http://www.springer.com/978-3-662-45176-2

Diskrete und algebraische Strukturen - kurz gefasst
Knauer, U.; Knauer, K.
2015, XI, 271 S. 45 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-45176-2