Elektrotechnik

H. Clausert
K. Hoffmann
W. Mathis
G. Wiesemann
H.-P. Beck

Netzwerke
G. Wiesemann

1 Elektrische Stromkreise

1.1 Elektrische Ladung und elektrischer Strom

1.1.1 Elementarladung

Das Elektron hat die Ladung $-e$, das Proton die Ladung $+e$; hierbei ist $e = 1{,}602176487 \cdot 10^{-19}$ A s die *Elementarladung*. Jede vorkommende elektrische Ladung Q ist ein ganzes Vielfaches der Elementarladung:

$$Q = ne\ .$$

1.1.2 Elektrischer Strom

Wenn sich Ladungsträger (Elektronen oder Ionen) bewegen, so entsteht ein *elektrischer Strom*, seine Größe wird als *Stromstärke i* bezeichnet. Sie wird als Ladung (oder Elektrizitätsmenge) durch Zeit definiert:

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\ ; \quad Q = \int i\,\mathrm{d}t\ .$$

Fließt ein Strom i während der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ durch einen Leiter, so tritt durch jede Querschnittsfläche dieses Leiters die Ladung

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,\mathrm{d}t$$

hindurch (Bild 1-1).

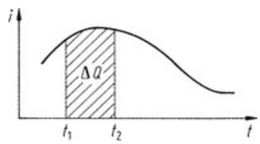

Bild 1-1. Der Zusammenhang zwischen Strom i und Ladung Q

Technisch wichtig sind außer dem Strom in metallischen Leitern auch der Ladungstransport in Halbleitern (Dioden, Transistoren, Integrierte Schaltkreise, Thyristoren), Elektrolyten (galvanische Elemente, Galvanisieren), in Gasen (z. B. Leuchtstofflampen, Funkenüberschlag in Luft) und im Hochvakuum (Elektronenröhren).

Kommt ein Strom durch die Bewegung positiver Ladungen zustande, so betrachtet man deren Richtung auch als die Richtung des Stromes (*konventionelle Stromrichtung*). Wenn aber z. B. Elektronen von der Kathode zur Anode einer Elektronenröhre fliegen (Bild 1-2), so geht der positive Strom i von der Anode zur Kathode (v Geschwindigkeit der Elektronen).

Die folgenden drei Wirkungen des Stromes werden zur Messung der Stromstärke verwendet:

1. Magnetfeld (Kraftwirkung)
2. Stofftransport (z. B. bei Elektrolyse)
3. Erwärmung (eines metallischen Leiters).

Besonders geeignet zur Strommessung ist die Kraft, die auf eine stromdurchflossene Spule im Magnetfeld wirkt (Drehspulgerät). Die Kraft, die zwei strom-

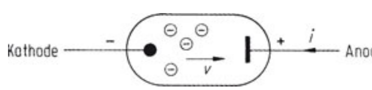

Bild 1-2. Konventionelle Richtung des Stromes i und Geschwindigkeit v der Elektronen in einer Hochvakuumdiode

H. Clausert et al., *Das Ingenieurwissen: Elektrotechnik*,
DOI 10.1007/978-3-662-44032-2_1,

durchflossene Leiter aufeinander ausüben, dient zur *Definition der SI-Einheit Ampere* für den elektrischen Strom (vgl. B 1.3):

> 1 Ampere (1 A) ist die Stärke eines zeitlich konstanten Stromes durch zwei geradlinige parallele unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt, die voneinander den Abstand 1 m haben und zwischen denen die durch diesen Strom hervorgerufene Kraft im leeren Raum pro 1 m Leitungslänge $2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m\,kg/s^2} = 2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N}$ beträgt.

Beispiel für die Driftgeschwindigkeit von Elektronen. Durch einen Kupferdraht mit dem Querschnitt $A = 50\ \mathrm{mm^2}$ fließt der Strom $I = 200\ \mathrm{A}$ (Dichte der freien Elektronen: $n = 85 \cdot 10^{27}/\mathrm{m^3} = 85/\mathrm{nm^3}$). Die Driftgeschwindigkeit ist

$$v_{\mathrm{dr}} = \frac{I}{enA} \approx 0{,}3\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}\ .$$

1.1.3 1. Kirchhoff'scher Satz (Satz von der Erhaltung der Ladungen; Strom-Knotengleichung)

Die Ladungen, die in eine (resistive) elektrische Schaltung hineinfließen, gehen dort weder verloren, noch sammeln sie sich an, sondern sie fließen wieder heraus. Dies gilt auch für die Ströme; insbesondere in den Knoten (Verzweigungspunkten) elektrischer Schaltungen (Bild 1-3a) gilt:

$$\sum i_{\mathrm{ein}} = \sum i_{\mathrm{aus}}\ ;\ \sum i_{\mathrm{ein}} - \sum i_{\mathrm{aus}} = 0\ .$$

Man kann aber auch

$$\sum i = 0$$

schreiben. Dann muss man z. B. einfließende Ströme mit positivem Vorzeichen einsetzen und ausfließende mit negativem (oder auch umgekehrt). Ist die Richtung des Stromes in einem Zweig zunächst nicht bekannt, so ordnet man ihm willkürlich einen sogenannten *Zählpfeil* bzw. eine sog. *Bezugsrichtung* zu. Liefert die Rechnung dann einen negativen Zahlenwert, so fließt der Strom entgegen der angenommenen Zählrichtung.

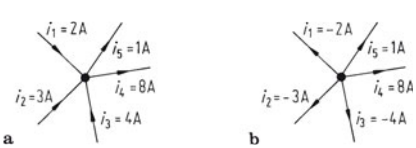

Bild 1-3. Knoten mit 3 zufließenden und 2 abfließenden Strömen

1.2 Energie und elektrische Spannung; Leistung

1.2.1 Definition der Spannung

Zwei positive Ladungen Q_1, Q_2 stoßen sich ab (Bild 1-4).
Ist Q_1 unbeweglich und Q_2 beweglich, so ist mit der Verschiebung der Ladung Q_2 vom Punkt A in den Punkt B eine Abnahme der potenziellen Energie W_{p} der Ladung Q_2 verbunden: $W_{\mathrm{A}} - W_{\mathrm{B}}$. W_{p} ist der Größe Q_2 proportional, also gilt auch für die Energieabnahme:

$$W_{\mathrm{A}} - W_{\mathrm{B}} \sim Q_2\ .$$

Schreibt man statt dieser Proportionalität eine Gleichung, so tritt hierbei ein Proportionalitätsfaktor auf, den man als die elektrische Spannung U_{AB} zwischen den Punkten A und B bezeichnet:

$$\frac{W_{\mathrm{A}} - W_{\mathrm{B}}}{Q_2} = U_{\mathrm{AB}}\ .$$

Eine Einheit der elektrischen Spannung ergibt sich daher, wenn man eine Energieeinheit durch eine Ladungseinheit teilt. Im SI wählt man:

$$1\ \mathrm{Volt} = 1\ \mathrm{V} = \frac{1\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{C}} = \frac{1\ \mathrm{W\,s}}{1\ \mathrm{A\,s}} = \frac{1\ \mathrm{W}}{1\ \mathrm{A}}\ .$$

1.2.2 Energieaufnahme eines elektrischen Zweipols

Ein elektrischer Zweipol (Bild 1-5a), zwischen dessen beiden Anschlussklemmen eine (i. Allg. zeitabhängige) Spannung u liegt und in den der (i. Allg.

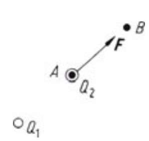

Bild 1-4. Kraftwirkung zwischen zwei Punktladungen

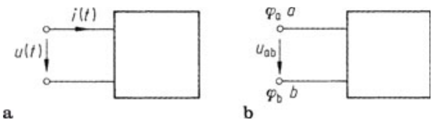

Bild 1–5. a Zweipol als (Energie-)Verbraucher; **b** Spannung zwischen zwei Punkten unterschiedlichen Potenzials

ebenfalls zeitabhängige) Strom i hinein und aus dem er auch wieder herausfließt, nimmt im Zeitraum von t_1 bis t_2 folgende Energie auf:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} ui \, \mathrm{d}t \; .$$

Hierbei werden u und i gleichsinnig gezählt, so wie es in Bild 1–5a dargestellt ist (Verbraucherzählpfeilsystem).

Das Produkt ui bezeichnet man als die elektrische Leistung p:

$$ui = p = \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} \; .$$

Im Falle zeitlich konstanter Größen $i = I$ und $u = U$ wird

$$W = UI\,t\;;\; P = UI = W/t \; .$$

(Für konstante Ströme, Spannungen und Leistungen werden gewöhnlich Großbuchstaben verwendet; die Kleinbuchstaben i, u, p für die zeitabhängigen Größen.)

Ist $ui > 0$, so nimmt der Zweipol (Bild 1–5a) Leistung auf (Verbraucher); ist $ui < 0$, so gibt er Leistung ab (Erzeuger, Generator).

1.2.3 Elektrisches Potenzial

Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten (a und b) kann häufig auch als die Differenz zweier Potenziale φ aufgefasst werden (Bild 1–5b):

$$u_{\mathrm{ab}} = \varphi_{\mathrm{a}} - \varphi_{\mathrm{b}} \; .$$

Ist z. B. $u_{\mathrm{ab}} = 2\,\mathrm{V}$, so wäre das Wertepaar $\varphi_{\mathrm{a}} = 2\,\mathrm{V}$, $\varphi_{\mathrm{b}} = 0\,\mathrm{V}$ ebenso wie $\varphi_{\mathrm{a}} = 3\,\mathrm{V}$, $\varphi_{\mathrm{b}} = 1\,\mathrm{V}$ usw. eine mögliche Darstellung.

1.2.4 Spannungsquellen

Positive und negative Ladungen ziehen sich an. Kommt es dadurch in elektrischen Schaltungen zum Ladungsausgleich, so verlieren die Ladungen hierbei ihre potenzielle Energie; dies geschieht in allen Verbrauchern elektrischer Energie. Erzeuger elektrischer Energie hingegen bewirken eine Trennung positiver von negativen Ladungen, erhöhen also deren potenzielle Energie: Solche Erzeuger nennt man auch Spannungsquellen. (Die Ausdrücke Erzeuger und Verbraucher sind üblich, obwohl in ihnen eigentlich nur eine Energieumwandlung stattfindet.)

Das Bild 1–6 zeigt als Beispiel einer Gleichspannungsquelle ein galvanisches Element. Die Energie, die hier bei chemischen Reaktionen frei wird, bewirkt, dass es zwischen den positiven Ladungen des Pluspols und den negativen des Minuspols innerhalb der Quelle nicht zum Ladungsausgleich kommt. Ein Ausgleich kommt nur zustande, wenn an die beiden Klemmen a, b ein Verbraucher (z. B. ein Ohm'scher Widerstand R angeschlossen wird (im Verbraucher gibt es keine „elektromotorische Kraft", die dem Ladungsausgleich entgegenwirkt). In dem dargestellten einfachen Stromkreis wird die Quellenleistung P_{q} vom Widerstand „verbraucht":

$$P_{\mathrm{q}} = P_{\mathrm{R}} = UI \; .$$

Einige Schaltzeichen (Symbole) für Spannungsquellen sind in Bild 1–7 zusammengestellt.

Typische Spannungen galvanischer Elemente bzw. „Batterien" sind 1,5 V; 3 V; 4,5 V; 9 V; 18 V; Blei-Akkumulatoren von Pkws haben allgemein 12 V. Solarzellen haben einen anderen Mechanismus und können ca. 0,5 V erreichen; durch Bündelung vieler Zellen werden Solarmodule mit wesentlich höheren Spannungen aufgebaut.

Die inneren Verluste einer Spannungsquelle werden im Schaltbild durch den *inneren Widerstand* repräsentiert: die reale Quelle wird als Reihenschaltung einer idealen Spannungsquelle (U_{q}) mit dem inneren Widerstand (R_{i}) aufgefasst (Bild 1–8).

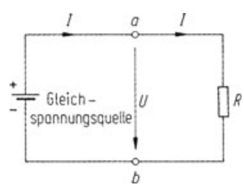

Bild 1–6. Belastete Gleichspannungsquelle (galvanisches Element)

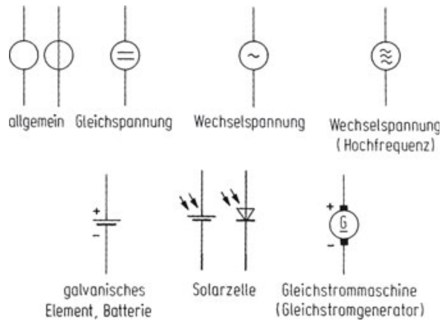

Bild 1–7. Symbole für Spannungsquellen

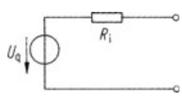

Bild 1–8. Ersatzschaltbild einer realen Spannungsquelle

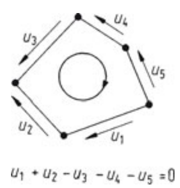

Bild 1–9. Umlauf mit 5 Spannungen

1.2.5 2. Kirchhoff'scher Satz (Satz von der Erhaltung der Energie; Spannungs-Maschengleichung)

In jeder elektrischen Schaltung ist die in einer bestimmten Zeit von den Quellen insgesamt abgegebene Energie gleich der von allen Verbrauchern insgesamt aufgenommenen Energie; dasselbe gilt natürlich für die Leistungen. Daraus folgt, dass bei jedem (geschlossenen) Umlauf (Bild 1–9)

$$\sum u = 0$$

wird, was in Bild 1–10 an einem Schaltungsbeispiel verdeutlicht ist. (In Bild 1–9 zählen die Spannungen, die dem willkürlich festgelegten Umlaufsinn entsprechen, positiv – die anderen negativ.) In der Schaltung in Bild 1–10 ist die Quellenleistung (an die Schaltung abgegebene L.) $P_{ab} = U_q I$ und die Verbraucherleistung (von der Schaltung aufgenommene L.)

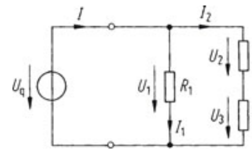

Bild 1–10. Schaltung mit 2 Maschen

$$P_{auf} = I_1 U_1 + I_2 U_2 + I_2 U_3 \ .$$

Wegen $P_{ab} = P_{auf}$ und $I = I_1 + I_2$ wird hieraus

$$I_1 U_q + I_2 U_q = I_1 U_1 + I_2 (U_2 + U_3) \ .$$

Dies muss u. a. auch in den Sonderfällen $I_2 = 0$ oder $I_1 = 0$ gelten, es ist also $U_q = U_1$ und $U_q = U_2 + U_3$ und damit auch $U_1 = U_2 + U_3$.

1.3 Elektrischer Widerstand

1.3.1 Ohm'sches Gesetz

Ohm'sche Widerstände sind solche, bei denen die Stromstärke i der anliegenden Spannung u proportional ist: $u \sim i$ (Bild 1–11). Diese Proportionalität beschreibt man als Gleichung in der Form

$$u = Ri \ , \quad \text{(Ohm'sches Gesetz)}$$

wobei man den Proportionalitätsfaktor R als Ohm'schen Widerstand(swert) bezeichnet. Für manche Aussagen nützlicher ist der Leitwert

$$G = 1/R \ .$$

Das Ohm'sche Gesetz lässt sich damit auch in der Form $i = Gu$ schreiben; außerdem gilt

$$R = u/i \ ; \quad G = i/u \ .$$

Die SI-Einheit des Widerstandes ist das Ohm (Ω = V/A), ferner ist 1 Siemens = 1 S = 1/Ω.

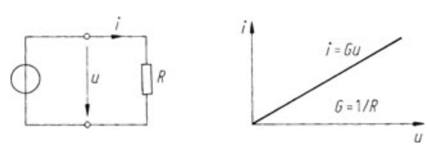

Bild 1–11. Der Zusammenhang zwischen Strom i und Spannung u an einem Ohm'schen Widerstand R

1.3.2 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit

Für den Widerstand eines Leiters (Bild 1–12) mit konstanter Querschnittsfläche A und der Länge l gilt $R \sim l/A$. Als Proportionalitätsfaktor wird hier die Größe ϱ eingeführt:

$$R = \varrho \frac{l}{A}, \quad \varrho = \frac{A}{l} R .$$

ϱ ist materialspezifisch (und temperaturabhängig) und wird als *spezifischer Widerstand* (*Resistivität*) bezeichnet. Für den Leitwert des Leiters gilt

$$G = \frac{A}{\varrho l} = \frac{\gamma A}{l} .$$

Man nennt γ die *Leitfähigkeit* (die *Konduktivität*) des Leitermaterials ($\gamma = 1/\varrho$). In Tabelle 1–1 sind die Größen ϱ und γ für verschiedene Materialien angegeben. Übliche Einheiten für ϱ sind (vgl. $\varrho = RA/l$):

$$1 \frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} = 1\,\mu\Omega \cdot \mathrm{m} .$$

Anschauliche Deutung: $\varrho = 1\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$ bedeutet, dass ein Draht mit dem Querschnitt 1 mm^2 und der Länge 1 m den Widerstand 1 Ω hat.
$\varrho = 1\,\Omega \cdot \mathrm{cm}$ bedeutet, dass ein Würfel von 1 cm Kantenlänge zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen gerade den Widerstand 1 Ω hat.

1.3.3 Temperaturabhängigkeit des Widerstandes

In metallischen Leitern gilt die Proportionalität $i \sim u$ (Ohm'sches Gesetz) nur bei konstanter Temperatur. ϱ nimmt bei Metallen im Allgemeinen mit der Temperatur θ zu. Bei reinen Metallen (außer den ferromagnetischen) stellt $\varrho = f(\theta)$ nahezu eine Gerade dar. Bestimmte Legierungen verhalten sich allerdings anders, z. B. Manganin (86% Cu, 12% Mn, 2% Ni), siehe Bild 1–13.
Bei reinen Metallen ist folgende Beschreibung der Abhängigkeit des spezifischen Widerstandes von der Temperatur zweckmäßig:

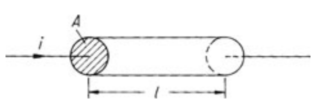

Bild 1–12. Leiter mit konstantem Querschnitt

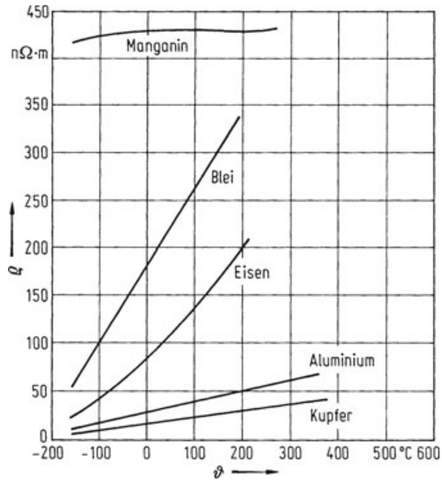

Bild 1–13. Temperaturabhängigkeit spezifischer Widerstände

$$\varrho = \varrho_{20}(1 + \alpha_{20}\Delta\theta + \beta_{20}\Delta\theta^2 + \ldots) .$$

Hierbei ist $\Delta\theta = \theta - 20\,°\mathrm{C}$ und

ϱ_{20} Resistivität bei 20 °C
α_{20} linearer Temperaturbeiwert
β_{20} quadratischer Temperaturbeiwert .

Einige Temperaturbeiwerte (Temperaturkoeffizienten) sind in Tabelle 1–1 angegeben.

Supraleitung

Bei vielen metallischen Stoffen ist unterhalb einer sog. *Sprungtemperatur* T_c keine Resistivität mehr messbar ($\varrho < 10^{-23}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$) (Tabelle 1–2); dieser Effekt wird als Supraleitung bezeichnet.
Bei den guten Leitern Cu, Ag, Au konnte bisher noch keine Supraleitung nachgewiesen werden. Das Bekanntwerden von Keramiksintermaterialien mit $T_c > 90\,\mathrm{K}$ („Hochtemperatur-Supraleitung") hat seit 1986 dazu geführt, dass die Supraleitungs-Forschung in vielen Ländern sehr intensiviert worden ist.
Sprungtemperaturen oberhalb von 77,36 K (Siedetemperatur des Stickstoffs) erlauben es, Supraleitung mithilfe von flüssigem Stickstoff zu erreichen, also ohne das teure flüssige Helium auszukommen (vgl. Tabelle 1–3).

Tabelle 1–1. Spezifischer Widerstand und Temperaturbeiwerte verschiedener Stoffe

Stoff	ϱ_{20} $10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$	γ_{20} $10^{6}\ \mathrm{S/m}$	α_{20} $10^{-3}/\mathrm{K}$	β_{20} $10^{-6}/\mathrm{K}^2$
1. Reinmetalle				
Aluminium	0,027	37	4,3	1,3
Blei	0,21	4,75	3,9	2,0
Eisen	0,1	10	6,5	6,0
Gold	0,022	45,2	3,8	0,5
Kupfer	0,017	58	4,3	0,6
Nickel	0,07	14,3	6,0	9,0
Platin	0,098	10,5	3,5	0,6
Quecksilber	0,97	1,03	0,8	1,2
Silber	0,016	62,5	3,6	0,7
Zinn	0,12	8,33	4,3	6,0
2. Legierungen				
Konstantan (55% Cu, 44% Ni, 1% Mn)	0,5	2	−0,04	
Manganin (86% Cu, 2% Ni, 12% Mn)	0,43	2,27	±0,01	
Messing	0,066	15	1,5	
	$\Omega \cdot \mathrm{m}$	$\mathrm{S/m}$		
3. Kohle, Halbleiter				
Germanium (rein)	0,46	2,2		
Graphit	$8{,}7 \cdot 10^{-6}$	$115 \cdot 10^{3}$		
Kohle (Bürstenkohle)	$(40 \ldots 100) \cdot 10^{-6}$	$(10 \ldots 25) \cdot 10^{3}$	$-0{,}2 \ldots -0{,}8$	
Silizium (rein)	2300	$0{,}43 \cdot 10^{-3}$		
4. Elektrolyte				
Kochsalzlösung (10%)	$79 \cdot 10^{-3}$	12,7		
Schwefelsäure (10%)	$25 \cdot 10^{-3}$	40,0		
Kupfersulfatlösung (10%)	$300 \cdot 10^{-3}$	3,3		
Wasser (rein)	$2{,}5 \cdot 10^{5}$	$0{,}4 \cdot 10^{-3}$		
Wasser (destilliert)	$4 \cdot 10^{4}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$		
Meerwasser	$300 \cdot 10^{-3}$	3,3		
5. Isolierstoffe				
Bernstein	$>10^{16}$			
Glas	$10^{11} \ldots 10^{12}$			
Glimmer	$10^{13} \ldots 10^{15}$			
Holz (trocken)	$10^{9} \ldots 10^{13}$			
Papier	$10^{15} \ldots 10^{16}$			
Polyethylen	10^{16}			
Polystyrol	10^{16}			
Porzellan	bis $5 \cdot 10^{12}$			
Transformator-Öl	$10^{10} \ldots 10^{13}$			

Mit Supraleitern lassen sich verlustlos sehr starke Magnetfelder erzeugen (wie sie in der Hochenergiephysik, in Induktionsmaschinen oder für Magnetbahnen gebraucht werden). Bei einer Reihe dieser Stoffe setzt aber die Supraleitung durch Einwirkung eines starken Magnetfeldes wieder aus (Nb-Sn- und Nb-Ti-Legierungen z. B. bleiben aber noch unter dem Einfluss recht starker Magnetfelder supraleitend). Die

Tabelle 1–2. Sprungtemperatur verschiedener Supraleiter

Stoff	T_c in K
Cd	0,52
Al	1,18
Ti	0,40
Sn	3,72
Hg	4,15
V	5,4
Ta	4,47
Pb	7,20
NbTi	8,5
Nb	9,25
Tc	7,8
V_3Ga	16,8
Nb_3Sn	18,0
Nb_3Ge	23,2
$Ba_xLa_{5-x}Cu_5O_{3-y}$	> 30
Y-La-Cu-O	> 90
K Kelvin; absoluter Nullpunkt: 0 K ≙ – 273,15 °C	

Tabelle 1–3. Schmelz- und Siedetemperatur von He, H_2, N_2 und O_2

Stoff	Schmelz-temperatur T_{sl} in K	Siede-temperatur T_{lg} in K
He		4,22
H_2	13,81	20,28
N_2	63,15	77,36
O_2	54,36	90,20

Möglichkeit verlustloser Energieübertragung über supraleitende Kabel wird auch dadurch begrenzt, dass oberhalb bestimmter Stromdichten (kritischer Stromdichten) Supraleitung unmöglich wird; vgl. auch Abschnitt B.

2 Wechselstrom

2.1 Beschreibung von Wechselströmen und -spannungen

Ein sinusförmig schwingender Strom (Bild 2–1),

$$i = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_0)\,,$$

ist durch die drei Parameter *Scheitelwert* (*Amplitude*) $\hat{i}$, *Kreisfrequenz* ω und *Nullphasenwinkel* φ_0 be-

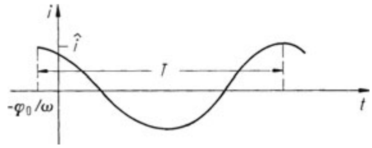

Bild 2–1. Sinusförmiger Wechselstrom

stimmt (wird eine dieser drei Größen zeitabhängig, so spricht man von Modulation). Für die *Periodendauer T* der Schwingung gilt:

$$T = 2\pi/\omega\,,$$

die *Frequenz* ist

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,.$$

Sinusförmige Ströme haben den Mittelwert null (sie haben keinen Gleichanteil) und sind Wechselströme. (Alle periodischen Größen ohne Gleichanteil nennt man Wechselgrößen.) Eine Summe aus einem Gleich- und einem Wechselstrom nennt man *Mischstrom* (Bild 2–2).
Für $i(t)$ kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i}\,\mathrm{Re}\,\{\exp[\,\mathrm{j}(\omega t + \varphi_0)]\} \\ &= \mathrm{Re}\,\{\hat{i}\;\exp(\mathrm{j}\varphi_0)\exp(\mathrm{j}\omega t)\} \\ &= \mathrm{Re}\,\{\underline{\hat{i}}\exp(\mathrm{j}\omega t)\} = \mathrm{Re}\,\{\underline{i}(t)\}\,. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\underline{\hat{i}} = \hat{i}\exp(\mathrm{j}\varphi_0) \quad \text{die } \textit{komplexe Amplitude}$$

und

$$\underline{i}(t) = \underline{\hat{i}}\exp(\mathrm{j}\omega t) \quad \text{die } \textit{komplexe Zeitfunktion}$$

des Stromes i.

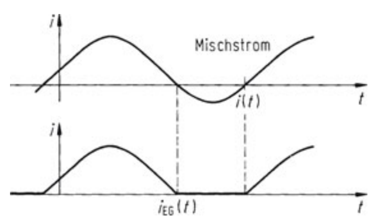

Bild 2–2. Mischstrom vor und nach der Einweg-Gleichrichtung

Die Amplitude $\hat{i}$ geht aus der komplexen Amplitude $\underline{\hat{i}}$ durch Betragsbildung hervor:

$$\hat{i} = |\underline{\hat{i}}| \ .$$

Die reelle Zeitfunktion $i(t)$ entsteht aus der komplexen durch Realteilbildung:

$$i(t) = \mathrm{Re}\,\{\underline{i}(t)\} \ .$$

Den Wert $\underline{\hat{i}}\,/\,\sqrt{2} = \underline{I}$ bezeichnet man als komplexen Effektivwert (vgl. 2.2) der Größe i.
Die Kennzeichnung komplexer Größen durch Unterstreichung kann entfallen, wenn verabredet ist, dass die betreffenden Formelbuchstaben eine komplexe Größe darstellen. Beträge sind dann durch Betragsstriche zu kennzeichnen.

2.2 Mittelwerte periodischer Funktionen

Für einen periodischen Strom $i(t)$ mit der Periode T werden verschiedene Mittelwerte definiert (Tabelle 2-1 und Bild 2-2).
Das Verhältnis von Scheitelwert zu Effektivwert bezeichnet man als den *Scheitelfaktor*

$$k_\mathrm{s} = \hat{i}/I$$

Tabelle 2-1. Mittelwerte eines periodischen Stromes

arithmetischer Mittelwert	$\bar{i} = \dfrac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T} i(t)\,\mathrm{d}t$
Einweggleichrichtwert	$\bar{i}_\mathrm{EG} = \dfrac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T} i_\mathrm{EG}(t)\,\mathrm{d}t$
Gleichrichtwert (elektrolytischer Mittelwert)	$\overline{\lvert i\rvert} = \dfrac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T} \lvert i(t)\rvert\,\mathrm{d}t$
Effektivwert (quadratischer Mittelwert)	$I = \sqrt{\dfrac{1}{T}\int\limits_{\tau}^{\tau+T} i^2(t)\,\mathrm{d}t}$

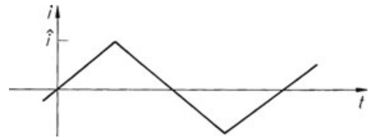

Bild 2-3. Dreieckförmiger Strom $i(t)$

und das Verhältnis des Effektivwertes zum Gleichrichtwert als *Formfaktor*

$$k_\mathrm{f} = I/\overline{|i|} \ .$$

In der Tabelle 2-2 sind die Mittelwerte, der Scheitel- und der Formfaktor eines sinusförmigen (Bild 2-1) und eines dreiecksförmigen (Bild 2-3) Wechselstromes angegeben.

2.3 Wechselstrom in Widerstand, Spule und Kondensator

In der Tabelle 2-3 sind die Zusammenhänge zwischen Strom und Spannung in Widerstand, (idealer) Spule und (idealem) Kondensator – allgemein und für eingeschwungene Sinusgrößen – in unterschiedlicher Weise dargestellt, vgl. Bild 2-5.

Reale Spule und realer Kondensator

Eine eisenlose Spule hat außer ihrer Induktivität L auch den Ohm'schen Widerstand R der Wicklung (Wicklungsverluste). Für eine genauere Betrachtung muss daher jede Spule als RL-Reihenschaltung dargestellt werden (Bild 2-4a). In einer Spule mit einem Eisenkern treten außer den Wicklungsverlusten („*Kupferverlusten*“) auch noch im Eisenkern Ummagnetisierungsverluste (*Hystereseverluste*) und *Wirbelstromverluste* auf, die man zusammenfassend als *Eisenverluste* bezeichnet. Diese Eisenverluste stellt man im Ersatzschaltbild (Bild 2-4b) durch einen Widerstand parallel zur Induktivität dar.

Tabelle 2-2. Mittelwerte, Scheitel- und Formfaktor des sinusförmigen und des dreiecksförmigen Wechselstromes

	$\bar{i}$	$\bar{i}_\mathrm{EG}$	$\overline{\lvert i\rvert}$	I	k_s	k_f
Sinusförmiger Strom	0	$\dfrac{\hat{i}}{\pi} = 0{,}318\hat{i}$	$\dfrac{2\hat{i}}{\pi} = 0{,}637\hat{i}$	$\dfrac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\hat{i}$	$\sqrt{2} = 1{,}414$	$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}111$
Dreieckförmiger Strom	0	$0{,}25\hat{i}$	$0{,}5\hat{i}$	$\dfrac{\hat{i}}{\sqrt{3}} = 0{,}577\hat{i}$	$\sqrt{3} = 1{,}732$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155$

Tabelle 2–3. Zusammenhang zwischen Spannung und Strom bei Widerstand, Spule und Kondensator (Komplexe Größen sind nicht besonders gekennzeichnet.)

Bauelement		Widerstand	Spule	Kondensator
Kennzeichnende Größe		Resistanz, Ohm'scher W. R	Induktivität L	Kapazität C
Zusammenhang zwischen U und I	allgemein	$u = R \cdot i$	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$
	komplexe Effektivwerte von Sinusgrößen	$U = R \cdot I$	$U = j\omega L \cdot I$	$I = j\omega C \cdot U$

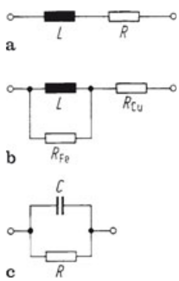

Bild 2–4. Reale Spule und realer Kondensator. **a** Ersatzschaltung einer eisenfreien Spule; **b** Ersatzschaltung einer Spule mit Eisenkern; **c** Ersatzschaltung eines Kondensators

(Ein noch genaueres Ersatzschaltbild müsste auch die Kapazität zwischen den einzelnen Windungen berücksichtigen.)
Bei einem Kondensator hat das Dielektrikum zwischen den beiden Elektroden auch eine (geringe) elektrische Leitfähigkeit. Daher stellt man bei genauerer Betrachtung einen Kondensator als RC-Parallelschaltung dar (Bild 2–4c). (Bei noch genauerer Darstellung dürfte auch die Induktivität der Zuleitung nicht vernachlässigt werden.)

2.4 Zeigerdiagramm

Die komplexen Zeitfunktionen $\underline{u}(t)$ und $\underline{i}(t)$, die komplexen Amplituden $\underline{\hat{u}}$ und $\underline{\hat{i}}$ und auch die komplexen Effektivwerte $\underline{U}$ und $\underline{I}$ können in der komplexen (Gauß'schen Zahlen-)Ebene als sog. Zeiger anschaulich dargestellt werden. Üblich ist die Zeigerdarstellung vor allem für die komplexen Effektivwerte.

Bild 2–5 stellt (ab jetzt ohne Unterstreichung der komplexen Effektivwerte!) die Zeiger für U und I an den idealen Elementen Widerstand, Spule und Kondensator dar. Dabei ist U jeweils (willkürlich) als reell vorausgesetzt.

Man sagt:

(a) Der Strom ist im Widerstand mit der Spannung phasengleich („in Phase").
(b) Der Strom eilt der Spannung an der Spule um 90° nach.
(c) Der Strom eilt der Spannung am Kondensator um 90° voraus.

Weitere Beispiele für Zeigerdiagramme: Bilder 7–3 und 7–9 in Kap. 7.

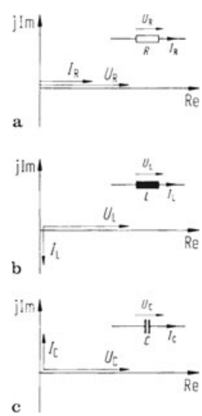

Bild 2–5. Zeigerdiagramme für Strom und Spannungen bei **a** Widerstand, **b** Spule und **c** Kondensator

2.5 Impedanz und Admittanz

Entsprechend dem auf komplexe Effektivwerte angewandten Ohm'schen Gesetz

$$U_\mathrm{R}/I_\mathrm{R} = R$$

ergeben sich aus dem Verhältnis U/I auch bei Spule und Kondensator Größen mit der Dimension eines Widerstandes:

$$\frac{U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}X_\mathrm{L} = Z_\mathrm{L} \;;$$

$$\frac{U_\mathrm{C}}{I_\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}X_\mathrm{C} = Z_\mathrm{C} \;.$$

Man nennt Z_L bzw. Z_C den *komplexen Widerstand* oder die *Impedanz* von Spule bzw. Kondensator. Z_L und Z_C sind rein imaginär; den Imaginärteil einer Impedanz Z nennt man ihren *Blindwiderstand* (ihre *Reaktanz*) X:

$$X_\mathrm{L} = \omega L \;; \quad X_\mathrm{C} = -1/(\omega C) \;.$$

Den Realteil R einer Impedanz nennt man ihren *Wirkwiderstand (Resistanz)*.
Die Kehrwerte der Impedanzen nennt man *Admittanzen*:

$$Y = 1/Z \;;$$

$$Y_\mathrm{L} = \frac{1}{Z_\mathrm{L}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \mathrm{j}B_\mathrm{L} \;;$$

$$Y_\mathrm{C} = \frac{1}{Z_\mathrm{C}} = \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}B_\mathrm{C} \;.$$

Auch Y_L und Y_C sind rein imaginär; man nennt den Imaginärteil einer Admittanz ihren *Blindleitwert* (ihre *Suszeptanz*) B:

$$B_\mathrm{L} = -1/(\omega L) \;;$$

$$B_\mathrm{C} = \omega C \;.$$

Den Realteil G einer Admittanz nennt man ihren *Wirkleitwert (Konduktanz)*.
Den Betrag $|Z|$ einer Impedanz Z nennt man ihren *Scheinwiderstand*, den Betrag $|Y|$ einer Admittanz Y ihren *Scheinleitwert*.

2.6 Kirchhoff'sche Sätze für die komplexen Effektivwerte

Die Kirchhoff'schen Sätze gelten nicht nur für die Momentanwerte beliebig zeitabhängiger Spannungen (u) und Ströme (i) (insbesondere also auch für Gleichspannungen U und -ströme I), sondern auch für die komplexen Amplituden ($\underline{\hat{u}}, \underline{\hat{i}}$) und komplexen Effektivwerte (U, I) eingeschwungener Sinusspannungen und -ströme (vgl. Bild 2-6) (ohne Nachweis):

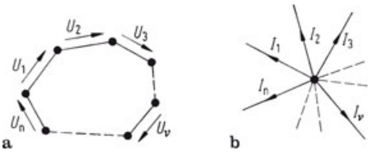

Bild 2-6. Zur Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze **a** Maschenregel (Umlauf); **b** Knotenregel

$$\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu = 0 \;; \quad \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu = 0 \;.$$

Spannungen und Ströme, deren Zählpfeile umgekehrt gerichtet sind wie in Bild 2-6, erhalten bei der Summation ein Minuszeichen.

3 Lineare Netze

Als linear werden Schaltungen bezeichnet, in denen nur konstante Ohm'sche Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten sowie Gegeninduktivitäten vorkommen und in denen die Quellenspannungen und -ströme entweder konstant sind oder aber einer anderen Strom- oder Spannungsgröße proportional sind („gesteuerte Quellen"; vgl. 3.2.3; 8.2; 25.4.1).
Die linearen Gleichstromnetze stellen eine spezielle Klasse der linearen Netze dar, nämlich Netze, die nur Ohm'sche Widerstände sowie konstante Quellenspannungen U_0 oder konstante Quellenströme I_0 enthalten ($Z \to R;\ U \to U_0;\ I \to I_0$).

3.1 Widerstandsnetze

3.1.1 Gruppenschaltungen

Reihen- und Parallelschaltung

Impedanzen, durch die ein gemeinsamer Strom I hindurchfließt, nennt man *in Reihe* (in Serie) *geschaltet*. Eine Reihenschaltung von n Impedanzen (Bild 3-1) wirkt wie ein einziger Zweipol mit der Impedanz

$$Z = \sum_{\nu=1}^{n} Z_\nu \;.$$

Impedanzen, die an einer gemeinsamen Spannung U liegen (Bild 3-2), nennt man *parallel geschaltet*.

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-44031-5

Das Ingenieurwissen: Elektrotechnik
Clausert, H.; Hoffmann, K.; Mathis, W.; Wiesemann, G.; Beck, H.-P.
2014, XII, 188 S. 150 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-44031-5