1 Elementarmathematik

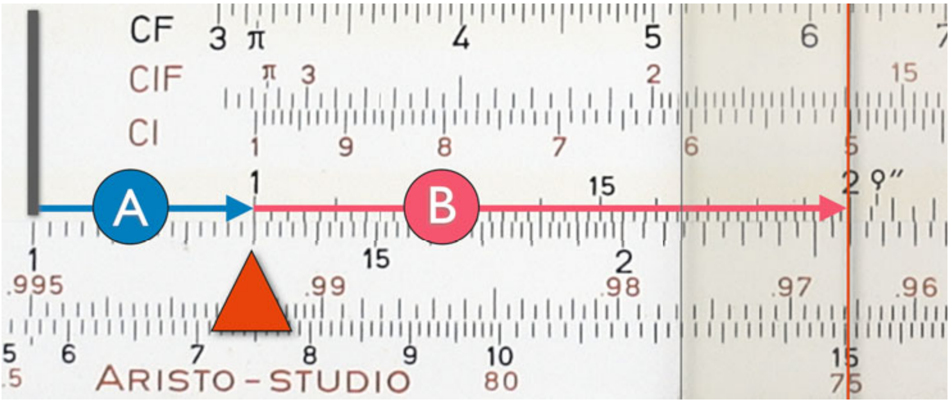
In diesem Lernabschnitt werden wir uns die folgenden Kenntnisse und Fertigkeiten erarbeiten:

- wesentliche Begriffe und Gesetze der Aussagenlogik,
- Mengenbegriff und -operationen,
- mathematische Beweisverfahren,
- Grundrechenarten, arithmetische Grundgesetze, Bruchrechnen, Multiplikation und Division von Polynomen, Potenz-und Logarithmengesetze,
- Komplexe Zahlen,
- Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Inhalt

J. Schmidt, *Basiswissen Mathematik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-43546-5_1,

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014



„Logik ist der Anfang aller Weisheit, Lieutenant Valeris, nicht ihr Ende", belehrt Mr. Spock in „Star Trek VI: Das unentdeckte Land" die junge Vulkanierin.
Und wer von uns wollte ernsthaft den scharfsinnigen Intellekt Mr. Spocks in Zweifel ziehen? Also werden wir uns zu Beginn mit Fragen der Aussagenlogik befassen, eine zugegeben sehr theoretische aber notwendige Arbeit. Aus mathematischer Sicht haben wir es hierbei mit einer vergleichsweise simplen Theorie zu tun – der Algebra der beiden Werte 0 und 1. Problematisch für den Einsteiger ist der Zwang zur Abstraktion von der Realität, denn die Logik entscheidet nicht über die Gültigkeit der Einzelaussagen, sondern schließt aus der angenommenen Korrektheit einer Aussage auf die Richtigkeit neuer Aussagen. Dies kann zu teilweise surreal anmutenden Formulierungen wie etwa „Wenn Elefanten Vögel sind, ist 3 eine Primzahl" führen, die *logisch wahr* sind. Andererseits wissen wir heute, dass unser Informationszeitalter ohne Aussagenlogik nicht denkbar ist, basieren moderne Computersysteme samt ihrer zahllosen Anwendungen doch auf dieser Theorie.

Es folgt der „handwerklich" anspruchsvollste Abschnitt: die Beschäftigung mit der klassischen Arithmetik.

Können wir uns heute ein INGENIEURSTUDIUM ohne den Einsatz von Computern vorstellen?

So seltsam die Frage manchen vorkommen mag, stellte sie sich noch bis in die 70er Jahre des 20. Jahrhunderts nicht, war doch der Rechenschieber eines der wenigen technischen Hilfsmittel während der Ausbildung. Nach einiger Übung konnte man (näherungsweise) sogar trigonometrische Funktionen auswerten. Nebenbei wurden die Gehirnzellen trainiert, denn ohne Überschlagsrechnung per Kopf sind die Zahlenwerte nicht zu interpretieren. Heute können Rechner (sofern wir ihrer Bedienung mächtig sind) das Studium erleichtern, was uns indes nicht davon befreit, auf der vielzitierten „einsamen Insel" z. B. mit Potenzen und Logarithmen operieren zu können (zugegeben dem Autor kommen auch Zweifel, ob dies dort lebensnotwendig wäre).

Sind wir bereit?

So, nun mal Butter bei die Fische. Wer von uns kennt Orwells berühmten Roman „1984“, in dem es heißt [10, S. 49f.]: „Welche Berechtigung besteht schließlich für ein Wort, das nichts weiter als das Gegenteil eines anderen Wortes ist? (...) Zum Beispiel »gut«: Wenn du ein Wort wie »gut« hast, wozu brauchst du dann noch ein Wort wie »schlecht«? »Ungut« erfüllt den Zweck genauso gut, ja sogar noch besser, denn es ist das haargenaue Gegenteil des anderen, was man bei »schlecht« nicht wissen kann. Wenn du hinwiederum eine stärkere Abart von »gut« willst, worin besteht der Sinn einer ganzen Reihe von undeutlichen, unnötigen Worten wie »vorzüglich«, »hervorragend« oder wie sie alle heißen mögen? »Plusgut« drückt das Gewünschte aus oder »doppelplusgut«, wenn du etwas noch Stärkeres haben willst.“

Im Roman ist „Neusprech“ ausschließlich ideologisch motiviert, um Individualität und Anderssein zu unterdrücken. Dabei besitzt der Sprachaufbau eine Strenge, die der mathematischen Logik entlehnt scheint, denn Zwischentöne werden ausgemerzt, des existiert nur noch „gut“ und dessen Verneinung – ein Grad an Abstraktion, wie er uns auf den nächsten Seiten zum Thema mathematischer Logik begegnen wird. Die düstere Zukunftsvision Orwells bleibt uns trotz allem hoffentlich erspart ...

1.1 Diskrete Mathematik

1.1.1 Was ist Logik?

Der Begriff der Logik wird häufig mit dem Werk Aristoteles verknüpft. In ihrer „klassischen“ Ausprägung basiert Logik auf natürlicher Sprache und stellt Regeln auf, welche es gestatten, korrekte Schlüsse aus einer gegebenen Menge von Tatsachen zu ziehen.

Durch die Verwendung zusätzlicher Symbole wird das Alphabet der „klassischen“ Logik erweitert. Grundlegend ist der Begriff der *Aussage*.

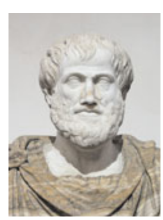
Definition 1.1 (Aussage)

Eine Aussage p ist eine Behauptung, die entweder *wahr* oder *falsch* ist. Die Wahrheitswerte oder *aussagenlogischen Konstanten wahr* bzw. *falsch* bezeichnen wir mit **W** (oder 1) bzw. **F** (oder 0).

Entsprechend stellen alle aus der Alltagssprache bekannten Fragesätze, Aufforderungssätze, Zweifelssätze usw. **keine** Aussagen dar. Demnach handelt es sich bei einem Satz wie „Deutschland liegt am Mittelmeer“ um eine mathematische Aussage,

Aristoteles (384 – 322 v. Chr.): griech. Philosoph. Aristoteles gehört zu den einflussreichsten Philosophen der Geschichte. Er hat zahlreiche Disziplinen maßgeblich beeinflusst, darunter Wissenschaftstheorie, Logik, Biologie, Physik, Ethik, Dichtungstheorie und Staatstheorie. In den logischen Schriften arbeitet er auf der Grundlage von Diskussionspraktiken in der Akademie eine Argumentationstheorie (Dialektik) aus und begründet mit der *Syllogistik* die formale Logik

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Aristoteles



dessen Wahrheitsgehalt natürlich seit den Zeiten des *Sacrum Romanum Imperium* zu verneinen ist. Keine Aussagen sind hingegen „Moin, Moin!“ oder „Ist $10^{10}+1$ eine Primzahl?“ wie auch „$x+5=27$“. Letzteres können wir aber durch Wahl einer beliebigen Zahl x in eine Aussage wandeln.
Den Wahrheitsgehalt einer mathematischen Behauptung (Achtung: Mit der folgenden Anweisung formulieren wir keine Aussage) können wir mit Wolfram|Alpha leicht verifizieren.

```
is 10^10+1 a prime number?
```

Durch Wörter wie „und“, „oder“, „nicht“ usw. können wir *zusammengesetzte Aussagen* bilden, was mitunter mehrdeutige Ausdrücke zur Folge hat.

Beispiel 1.1 (mehrdeutiger Aussage)

„Den Restaurantbesuchern wird Kaffee oder Tee angeboten.“

Schließt das Beispiel die Möglichkeit aus, dass der Gast beide Getränke bestellen kann, oder ist die Möglichkeit eingeschlossen?

Alltagssprachlich nutzen wir sowohl die *inklusive* als auch die *exklusive* Bedeutung von „oder“. Zur Vermeidung solcher Zweideutigkeiten werden in der Aussagenlogik spezielle Symbole (sogenannte *Junktoren*) eingeführt.

Variable und Aussagenformen

Die einfachsten, weil atomaren Aussagenformen sind die *Aussagenvariablen* und die beiden *Aussagenkonstanten* $\top$ (*Verum*) und $\bot$ (*Falsum*). Ferner haben wir bereits vereinbart, dass zwei Aussagen p und q unter Einsatz spezieller Symbole zu einer komplexen Aussage zusammengefügt werden können. Klammersetzung kann die Lesbarkeit der Formeln verbessern helfen.
Tritt in einer Aussage eine Variable x auf, liegt eine Aussagenform vor.

Definition 1.2 (Aussagenform)

Eine Formulierung $p(x)$ heißt eine **Aussagenform**, wenn $p(x)$ bei Einsetzen eines konkreten Wertes x in eine zweiwertige Aussage übergeht.

Eine Aussagenform ist selbst **keine** Aussage, weil wir ihr weder *wahr* noch *falsch* als Wahrheitswert zuordnen können.

Beispiel 1.2 (Aussagenform)

Der Satz „x ist eine Primzahl", den wir verkürzt als $p(x)$ notieren, stellt zunächst keine Aussage dar. Für jedes konkrete x als Element einer Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ können wir indes den Wahrheitsgehalt der Aussagenform bestimmen. So sind bspw. $p(2)$, $p(3)$ wahre Aussagen, hingegen etwa $p(4)$, $p(8)$ falsche.

Beim Einsetzen spezieller Werte x in eine Aussagenform können sich verschiedene Situationen einstellen:

- Alle entstehenden Aussagen sind *wahr* oder *falsch*,
- mindestens eine der entstehenden Aussagen ist *wahr* bzw. *falsch*.

Definition 1.3 (All- bzw. Existenz-Quantor)

Für eine gegebene Aussagenform $p(x)$ liefern alle (aus einer bestimmten Menge X) in Frage kommenden x eine **wahre** Aussage. Abkürzend schreiben wir unter Verwendung des *All-Quantors* $\forall$ die **All-Aussage** als $\forall x : p(x)$.

Erfüllt *zumindest* eines der in Frage kommenden x die Aussagenform $p(x)$, sodass diese **wahr** ist, sprechen wir von einer **Existenz-Aussage**, und notieren unter Nutzung des *Existenz-Quantors* $\exists$ in verkürzter Schreibweise $\exists x : p(x)$.

Treten mehrere Quantoren auf, ist ihre Reihenfolge entscheidend.
In Wolfram|Alpha können wir die Quantoren `ForAll` bzw. `Exists` verwenden, um z. B. (wie im nachstehenden Fall) die Gültigkeit der Ungleichung $x^2 \geq 0$ für alle $x \in X$ prüfen zu lassen.

```
Resolve[ForAll[x,x^2>=0]]
```

Wollen wir nachweisen, dass eine All-Aussage $\forall x : p(x)$ falsch ist, reicht die Nennung *eines einzigen* $x \in X$ aus, für welches $p(x)$ **falsch** ist. Analog wird die Gültigkeit einer Existenz-Aussage $\exists x : p(x)$ mittels *eines einzigen* $x \in X$, für das $p(x)$ **wahr** ist, belegt.

Definition 1.4 (Negation der All- bzw. Existenz-Aussage)

Verneinen der All-Aussage führt zu einer Existenz-Aussage, vice versa.

$$\neg\left(\forall x : p(x)\right) = \exists x : \neg\left(p(x)\right), \quad x \in X \tag{1.1}$$
$$\neg\left(\exists x : p(x)\right) = \forall x : \neg\left(p(x)\right), \quad x \in X \tag{1.2}$$

Beispiel 1.3 (Verneinung einer All-Aussage)

Die Negation von „Alle x sind größer als 27“ ist „Nicht alle x sind größer als 27“ bzw. „Es gibt (mindestens) ein x, das kleiner oder gleich 27 ist.“

$$\overline{\forall x : x > 27} = \exists x : x \leq 27, \quad x \in X$$

Gegebenenfalls können Aussagenformen auch von mehr als einer Variablen abhängen, die zusätzlich durch Bindewörter verknüpft werden.

Die Regeln für aussagenlogische Formeln lauten zusammenfassend wie folgt:

1. Jede Aussagenvariable ist auch eine Aussagenform.
2. Wenn p eine Aussagenform ist, dann auch $\neg p$.
3. Sind p und q Aussagenformen, dann ist auch jede der vier Zeichenfolgen $(p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q)$ und $(p \leftrightarrow q)$ eine aussagenlogische Formel.

Wir werden nun die **Semantik**[1] dieser *Aussageverbindungen* untersuchen.

Junktoren und Aussagenverbindungen

Eine *Abbildung*, die einer oder mehreren Aussagen eine neue Aussage zuordnet, nennt man **Junktion**. Die gebräuchlichsten Junktoren sind nachfolgend genannt:

Bezeichnung	**Schreibweise**	**Sprechweise**
Negation	$\neg p$	nicht p
Konjunktion	$p \wedge q$	p und q
Disjunktion	$p \vee q$	p oder q (einschließendes ODER)
Implikation (Subjunktion)	$\neg p \vee q$, auch: $(p \rightarrow q)$	wenn p, dann q
Äquivalenz (Bijunktion)	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, auch: $(p \leftrightarrow q)$	p genau dann, wenn q
Alternative (Antivalenz)	$\neg(p \leftrightarrow q)$	entweder p oder q (ausschließendes ODER)

Eselsbrücke: $\wedge$ erinnert an das englische *And*, $\vee$ an das lateinische *vel*.

Tab. 1.1 *Übersicht gebräuchlicher Junktoren*

[1] (*altgriechisch* $\sigma\eta\mu\alpha\acute{\iota}\nu\epsilon\iota\nu$ – „bezeichnen“) Theorie von der Bedeutung der Zeichen.

Mittels des folgenden Kommandos lassen wir uns durch Wolfram|Alpha bestätigen, dass die beiden Aussagenverbindungen für die Implikation $p \to q$ und $\neg p \wedge q$ logisch äquivalent sind.

```
Equivalent[Implies[p,q],!p||q]
```

Jede Aussagenform ist *eindeutig lesbar*, weil sie ihr Bildungsgesetz als Information beinhaltet. Wir vereinfachen die Schreibweise solcher Ausdrücke durch Weglassen der Klammern und das Festlegen von Prioritäten. In der folgenden Reihenfolge bindet jeder Junktor stärker als der folgende:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \to,\ \leftrightarrow\ .$$

Bislang haben wir mit den Aussagenformen nur bedeutungsleere Zeichenketten gebildet, es kommt aber darauf an, in Abhängigkeit von Wahrheitswerten den Aussagenvariablen bedeutungstragende Wahrheitswerte zuzuordnen.

Ist p eine aussagenlogische Formel mit dem Wahrheitswert **W**, so ordnet die *Negation* $\neg p$ dieser den Wahrheitswert **F** zu, und umgekehrt.

Sind p und q aussagenlogische Formeln, so ordnet die *Konjunktion* $(p \wedge q)$ den Wahrheitswert **W** zu, wenn sowohl p als auch q den Wahrheitswert **W** haben, in allen anderen Fällen **F**. Die *Disjunktion* $(p \vee q)$ nimmt den Wahrheitswert **F** an, wenn p und q den Wahrheitswert **F** annehmen, sonst ist der Wahrheitswert **W**.

Die *Implikation* $(p \to q)$ nimmt den Wert **F** an, wenn p den Wahrheitswert **W** und q den Wahrheitswert **F** hat, und sonst den Wert **W**. Haben p und q den gleichen Wahrheitswert, bekommt die *Äquivalenz* $(p \leftrightarrow q)$ den Wahrheitswert **W** zugeordnet, bei verschiedenen Wahrheitswerten **F** als Ergebnis.

Ordnen wir nun jeder Aussagenvariablen eines Ausdrucks einen Wahrheitswert zu, so sprechen wir von einer Belegung der Variablen. Solche Zuordnungen können anschaulich in **Wahrheitstafeln** zusammengestellt werden. Da die Belegung *eindeutig* erfolgt, handelt es sich hierbei um eine Wahrheitsfunktion. Bei n Variablen existieren von diesen 2^{2^n} Wahrheitsfunktionen.
Wir definieren die Konjunktion $\wedge$, Disjunktion $\vee$, Implikation $\to$ und Äquivalenz $\leftrightarrow$ über folgende Wahrheitstafeln:

$\wedge$	F	W
F	F	F
W	F	W
p	**Konjunktion**	

$\vee$	F	W
F	F	W
W	W	W
p	**Disjunktion**	

$\to$	F	W
F	W	W
W	F	W
p	**Implikation**	

$\leftrightarrow$	F	W
F	W	F
W	F	W
p	**Bijunktion**	

Das Aufstellen einer vollständigen Wahrheitstafel bedeutet für große Formeln einen immensen Arbeitsaufwand. Bei n Variablen und m Junktoren in der Formel haben wir $2^n \cdot m$ Wahrheitswerte zu notieren, deren Indizierung gemäß Tabelle 1.2 in Übereinstimmung mit Wolfram|Alpha erfolgte (andere Indexzuordnungen sind möglich).

p	q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
W	W	F	F	F	F	F	F	F	F	W	W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W
F	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W
F	F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W

Tab. 1.2 *Übersicht aller zweistelligen Junktoren*

Praktisch bedeutsam sind von den 16 Wahrheitsfunktionen nur die vier bereits vorgestellten Funktionen *Konjunktion* (Index 8 in Tabelle 1.2), *Disjunktion* (Index 14), *Implikation* (Index 11) und *Bijunktion* (Index 9), zumal gezeigt werden kann, dass sich die restlichen 2-stelligen Wahrheitsfunktionen allein mittels der *Negation* und etwa der *Disjunktion* ausdrücken lassen.

Mit Wolfram|Alpha geht's natürlich etwas leichter von der Hand, wir rufen einfach die entsprechende Funktion `BooleanFunction[11,2]` auf:

```
11th BooleanFunction of 2 variables
```

Diese Anweisung liefert die k-te boolesche Funktion bei n Variablen. Im Ergebnis sehen wir neben der Wahrheitstafel und anderen Informationen auch das entsprechende VENN Diagramm.

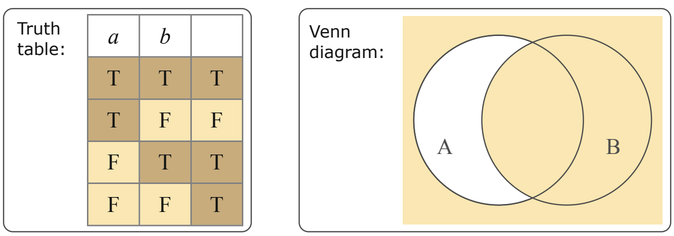


Abb. 1.1 *Auswertung der Logikverknüpfung $a \to b$ durch Wolfram|Alpha*

Kommt es zu einer Verkettung verschiedener Junktoren in einer Aussagenverbindung, ist diese unter Beachtung von Klammersetzungen und Junktorenprioritäten schrittweise aufzulösen, was sich übersichtlich in Wahrheitstabellen realisieren lässt.

John Venn (1834–1923): englischer Mathematiker. Unter dem Einfluss der Arbeiten von **De Morgan** und **G. Boole** widmete er sich der Logik und der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er führte dabei die grafische Darstellung der Aussagen in der Logik durch die nach ihm benannten Diagramme ein. Er prägte den Begriff der symbolischen Logik und untersuchte Probleme der Modallogik. Als Professor für Logik und Naturphilosophie lehrte Venn über 30 Jahre in Cambridge.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/John_Venn

Beispiel 1.4 (Vollständige Auswertung einer Aussage)

Auswertung der Aussage $\neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$ mittels Wahrheitstafel

p	q	$\neg p$	$r = \neg p \vee q$	$r \wedge q$	$s = \neg(r \wedge q)$	$s \vee p$	$p \vee \neg q$
W	W	F	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	W	W	W
F	W	W	W	W	F	F	F
F	F	W	W	F	W	W	W

Durch schrittweises Umformen finden wir für $\neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$ die viel überschaubarere Aussage $p \vee \neg q$. Den Umstellungen liegen die im nächsten Abschnitt vorgestellten Regeln nach DE MORGAN zugrunde.

$$\begin{aligned} & \neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p && \text{wir lösen die äußere Negation auf} \\ = & \neg(\neg p \vee q) \vee \neg q \vee p && \text{wieder die DE MORGANsche Regel aufrufen} \\ = & (p \wedge \neg q \vee \neg q) \vee p && \text{Klammerausdruck} \equiv \neg q \ (\rightarrow \text{Wahrheitstafel}) \end{aligned}$$

Die Problemstellung aus Beispiel 1.4 lassen wir mittels der folgenden Anweisung in Wolfram|Alpha zu $p \vee \neg q$ vereinfachen.

```
simplify[!((!p or q)and q)or p]
```

1.1.2 Logische Gleichwertigkeit

Die nachfolgenden Ausführungen gehen auf wichtige *logische Schlüsse* als Beweisprinzipien ein.

Definition 1.5 (Tautologie & Kontradiktion)

Eine Aussagenform, deren Wahrheitswert unabhängig von den Belegungen der Aussagenvariablen immer **W** ist, heißt *Tautologie* (oder *Identität*).
Von einer *Kontradiktion* oder *Antilogie* sprechen wir, wenn die Aussagenform unter allen Umständen immer den Wahrheitswert **F** ausweist.

Bei der folgenden Aussagenform handelt es sich um eine Tautologie, was wir mittels Wolfram|Alpha rasch verifizieren.

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow p\,. \quad \text{(**Wenn** } p \text{ **und nicht** } q\text{**, dann** } p \text{ ist eine Tautologie)}$$

```
(p and not q) implies p
```

Zwei aussagenlogische Formeln p und q heißen *logisch äquivalent*, wenn ihnen unter allen Abbildungen der darin enthaltenen Aussagenvariablen der gleiche Wahrheitswert zukommt.

Beispiel 1.5 (Tautologie, Kontradiktion, logische Äquivalenz)

$(p \vee \neg p)$ ist eine **Tautologie**, $(p \wedge \neg p)$ eine **Kontradiktion**.
p und $\neg\neg p$ sind **logisch äquivalent**.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
W	F	W	F
F	W	W	F
		Tautologie	Kontradiktion

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
W	F	W
F	W	F

äquivalent

Auch $(((p \to q) \wedge p) \to q))$ ist eine **Tautologie**, was uns die Wahrheitstafel zusichert:

p	q	$r = p \to q$	$s = r \wedge p$	$s \to q$
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

Austausch- oder Substitutionsregeln Wenn wir in einer Aussagenformel eine Teilformel durch eine andere Formel ersetzen, dann entsteht insgesamt wieder eine aussagenlogische Formel. Es gelten die beiden Regeln:

- *Uniforme Substitution:* Ersetzen wir in einer *Tautologie* jedes Vorkommen einer Aussagenvariablen durch dieselbe aussagenlogische Formel, so erhalten wir wieder eine Tautologie.
- *Äquivalente Substitution:* Wird in einer *Tautologie* irgendeine Teilformel durch eine dazu logisch äquivalente Formel ersetzt, so bleibt die Tautologie erhalten.

Beide Regeln resultieren aus den Konzepten *Tautologie, logische Folgerung* und *Äquivalenz*, welche nur von den Wahrheitswertverteilungen abhängen.

Negation und Dualität Ist p ein zusammengesetzter aussagenlogischer Satz, so können wir einen zur Negation $\neg p$ logisch äquivalenten Satz finden, indem wir die Negation „nach innen ziehen“. Hierauf basieren die nach Augustus De Morgan benannten Regeln:

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p \vee \neg q) \quad \text{bzw.} \quad \neg(p \vee q) = (\neg p \wedge \neg q)\ .$$

Deren Gültigkeit überprüfen wir wieder mittels Wahrheitstafel.

$\boxed{\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q}$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
W	W	W	F	F	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	W	W	W

Aussagenformeln mit drei oder mehr Variablen lassen sich grundsätzlich mit (umfangreichen) Wahrheitstafeln analysieren, wir sollten aber prüfen, ob durch Umformung nicht ein einfacherer Ausdruck gefunden wird.
Die folgenden Tautologien ($\models$) und Äquivalenzen ($\sim$) beschreiben wichtige Eigenschaften der Junktoren für die Aussagen p, q und r, die hierbei helfen können.

Eigenschaften der Negation			
Doppelnegation	$\neg\neg p$	$\sim$	p
Eigenschaften der Konjunktion und Disjunktion			
Idempotenz	$(p \wedge p) \sim p$	,	$(p \vee p) \sim p$
Kommutativgesetz	$(p \wedge q) \sim (q \wedge p)$	,	$(p \vee q) \sim (q \vee p)$
Assoziativgesetz	$((p \wedge q) \wedge r)$	$\sim$	$(p \wedge (q \wedge r))$
	$((p \vee q) \vee r)$	$\sim$	$(p \vee (q \vee r))$
Distributivgesetz	$((p \wedge q) \vee r)$	$\sim$	$((p \vee r) \wedge (q \vee r))$
	$((p \vee q) \wedge r)$	$\sim$	$((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \sim (\neg p \vee \neg q)$	,	$\neg(p \vee q) \sim (\neg p \wedge \neg q)$
Absorption	$(p \wedge (p \vee q)) \sim p$	,	$(p \vee (p \wedge q)) \sim p$
Eigenschaften der Implikation			
Definition	$(p \rightarrow q) \sim (\neg p \vee q)$	,	$(p \rightarrow q) \sim (p \wedge \neg q)$
Kontraposition	$(p \rightarrow q) \sim (\neg q \rightarrow \neg p)$	,	$(p \rightarrow \neg q) \sim (q \rightarrow \neg p)$
Transitivität	$(p \rightarrow q), (q \rightarrow r)$	$\models$	$(p \rightarrow r)$
(nicht assoziativ)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$\sim$	$((p \wedge q) \rightarrow r)$
(Anti-)Distributivität	$(p \rightarrow (q \wedge r))$	$\sim$	$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$
	$((p \vee q) \rightarrow r)$	$\sim$	$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$
Eigenschaften der Äquivalenz			
Kommutativgesetz	$(p \leftrightarrow q)$	$\sim$	$(q \leftrightarrow p)$
Assoziativgesetz	$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$	$\sim$	$(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$
Kontraposition	$(p \leftrightarrow q) \sim (\neg p \leftrightarrow \neg q)$	,	$\neg(p \leftrightarrow q) \sim (\neg p \leftrightarrow q)$
Transitivität	$(p \leftrightarrow q), (q \leftrightarrow r)$	$\models$	$(p \leftrightarrow r)$

Tab. 1.3 *Grundgesetze der Logik*

Und sollte einmal gar nichts funktionieren, bleibt immer noch der Griff zu Wolfram|Alpha.

Augustus De Morgan (1806–1871): engl. Mathematiker. Er verfasste eine geometrische Deutung der komplexen Zahlen und zahlreiche mathematische Artikel wie Formal Logic (1847). Am bekanntesten wurde er aber durch die beiden nach ihm benannte Regeln, denen zufolge jede Konjunktion durch eine Disjunktion ausgedrückt werden kann und umgekehrt.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Augustus_De_Morgan

Beispiele für logische Schlüsse bei der Beweisführung

Die Anwendung *logischer Schlüsse* hilft beim mathematischen Beweis, indem durch Umformulierung des Problems eine einfachere Beweisführung erkennbar wird. Die nachstehenden Fälle mögen diesen Sachverhalt belegen.

Anwendung der Abtrennungsregel $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Diese Regel zeigt, wie wir aus einer Implikation auf eine Aussage q, welche die Behauptung der Implikation ist, korrekt schließen, wenn p bekannt und die Gültigkeit von $p \rightarrow q$ gezeigt werden kann, indem wir sozusagen von der Implikation ihre Voraussetzung **abtrennen**. Wichtig hierbei ist, dass wir aus der Gültigkeit von $p \rightarrow q$ nicht auf die von q schließen können.

p	q	$r = p \rightarrow q$	$s = p \wedge r$	$s \rightarrow q$	$r \rightarrow q$
F	F	W	F	W	**F**
F	W	W	F	W	W
W	F	F	F	W	W
W	W	W	W	W	W

Beispiel 1.6 (Abtrennungsregel)

„Wenn $2 = 3$, so $1 = 1$“ ist richtig, „$1 = 1$“ ist eine wahre Aussage.
ABER: „Wenn $3 < 2$, so $1 < 0$“ ist auch wahr, jedoch „$1 < 0$“ eine falsche Aussage. Es wäre daher falsch, aus der Richtigkeit des Satzes auf die von „$1 < 0$“ zu schließen.

Methode des indirekten Beweises $(q \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow p$

Die Tautologie benutzen wir zum Beweis einer Aussage p, indem wir zunächst $(\neg p \rightarrow \neg q)$ zeigen, wobei $\neg q$ das Gegenteil einer im Laufe der Beweisführung zu treffenden Annahme q darstellt. Welche Annahme q für $\neg p$ zur Folgerung $\neg q$ führt, ist das Hauptproblem dieser Beweisführung.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$r = \neg p \rightarrow \neg q$	$s = q \wedge r$	$s \rightarrow p$
F	F	W	W	W	F	W
F	W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	W	F	W
W	W	F	F	W	W	W

Die indirekte Beweismethode ist elegant. Wir gehen dabei wie folgt vor:

- Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an.
- Diese Annahme führen wir zu einem Widerspruch.
- Damit muss die Annahme falsch und die Behauptung wahr sein.

Betrachten wir hierzu Beispiel 1.7, wobei wir mit q die Aussage „a und b sind teilerfremd“[2] bezeichnen wollen.

Beispiel 1.7 (Indirekter Beweis)

p=„$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“, $\neg p$: „$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$“.

$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$; $a^2 = 2b^2 \;\Rightarrow\; a^2$ ist eine gerade Zahl mit $a = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Folglich muss gelten: $a^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2b^2$, d. h. $b^2 = 2 \cdot n^2$. Somit ist auch b^2 eine gerade Zahl, sodass a und b **nicht** teilerfremd sind.

1.1.3 Methode der vollständigen Induktion

Dieses Verfahren ermöglicht den Nachweis der Gültigkeit von unendlich vielen Aussagen, die durch Einsetzen von natürlichen Zahlen in eine Aussagenform $p(n)$ entstehen, wozu die Schritte nach Satz 1.1 Anwendung finden. Im Normalfall ist $k = 0$ oder $k = 1$. In Sonderfällen kann jedoch $k > 1$ sein.

Satz 1.1 (Methode der vollständigen Induktion)

Eine Aussage $q = (\forall n)p(n),\; X = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq k\}$ ist genau dann eine **wahre** Aussage (**Induktionsschluss** $p \to q$), wenn gilt:

(1)	**Induktionsbeginn** (Voraussetzung p)	$p(k)$ ist eine wahre Aussage,
(2)	**Induktionsannahme** (Behauptung q)	$p(m)$ ist für ein beliebiges festes $n = m \geq k$ eine wahre Aussage,
(3)	**Induktionsschritt**	auch $p(m+1)$ ist eine wahre Aussage.

Nach dem deutschen Mathematiker Julius Dedekind (1831–1916) genügt als Nachweis, dass ein Satz für alle natürlichen Zahlen n gilt, zu zeigen, dass er für $n = m$ gilt und dass aus der Gültigkeit für eine Zahl $n \geq m$ stets auch dies für deren Nachfolger $n + 1$ folgt. Betrachten wir hierzu ein einfaches, aber weithin bekanntes Beispiel, die sogenannte Gaussсche Summenformel.

Beispiel 1.8 (Beweisführung mittels vollständiger Induktion)

Wir zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

$$\begin{array}{lllcl}
\text{IB:} & n = 1 & 1 & = & \frac{1}{2}(1 \cdot 2) \\
\text{IA:} & n = k & 1 + 2 + \ldots + k & = & \frac{1}{2}k(k+1) \\
\text{IS:} & n = k + 1 & \underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{} + (k+1) & = & \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\
 & & \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) & = & \frac{1}{2}(k+2)(k+1)
\end{array}$$

[2]**Teilerfremdheit**: Zwei natürliche Zahlen a und b sind teilerfremd, wenn es keine natürliche Zahl außer der Eins gibt, die beide Zahlen teilt

1.1.4 Für Informatiker und solche, die es werden wollen: Boolesche und Schaltungsalgebra

Die Grundgesetze der Aussagenlogik treffen auch auf Rechenregeln für Operationen mit anderen mathematischen Objekten zu. Entsprechende Untersuchungen führen auf den Begriff der Booleschen Algebra.

Definition 1.6 (Boolesche Algebra)

Eine Menge B mit den beiden Elementen 0 und 1 bezeichnen wir als Boolesche Algebra, sofern auf ihnen die Operationen Negation ($\neg$, meist $\overline{}$), Disjunktion ($+$) und Konjunktion ($\cdot$) erklärt sind.

Durch Dualisieren, d. h. das wechselseitige Ersetzen von $\cdot$ und $+$ sowie 0 und 1 in einem Axiom, erhalten wir aus einer Aussage über Boolesche Algebren die dazu duale Aussage.
Computer basieren im wesentlichen auf diesen Gesetzen, weshalb die Schaltalgebra ein wichtiges Anwendungsgebiet der Booleschen Logik ist.

Disjunktive und konjunktive Normalform

Wir wollen nun zu einer gegebenen Schaltfunktion s logisch äquivalente Formeln suchen, die mit den Operationen $\neg$, $\cdot$ und $+$ auskommen. Dafür gibt es zwei einfache Möglichkeiten: die Aufstellung der *disjunktiven* bzw. *konjunktiven* Normalform.

KNF

a	b	c	Ergebnis	Klausel
0	0	0	0	$a+b+c$
0	0	1	0	$a+b+\neg c$
0	1	0	1	$\neg a \bullet b \bullet \neg c$
0	1	1	1	$\neg a \bullet b \bullet c$
1	0	0	0	$\neg a+b+c$
1	0	1	1	$a \bullet \neg b \bullet c$
1	1	0	0	$\neg a+\neg b+c$
1	1	1	1	$a \bullet b \bullet c$

DNF

George Boole (1815–1864): engl. Mathematiker und Logiker. Er schuf in seiner Schrift The Mathematical Analysis of Logic von 1847 den ersten algebraischen Logikkalkül und begründete damit die moderne mathematische Logik, die sich von der traditionellen philosophischen Logik durch eine konsequente Formalisierung abhebt. Als Verallgemeinerungen von Booles Logikkalkül wurden später die sogenannte boolesche Algebra und der boolesche Ring nach ihm benannt.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/George_Boole

Die **disjunktive Normalform** (DNF) leiten wir wie folgt her:

- Zu jeder Zeile einer Wahrheitstafel existiert genau eine Formel, die nur für diese Zeile den Wert 1 hat, und sonst 0 ist. Wir bilden dann auf Basis der Ausgangsvariablen in dieser Zeile die Konjunktion, wobei die Variablen mit dem Wert 1 unverändert, solche mit 0 negiert in die Formel eingeben. (Bei n Variablen ergibt dies eine $(n-1)$-fache Konjunktion)

- Für jede Zeile der Logikfunktion mit dem Wert 1 nehmen wir dann diese Formeln und verknüpfen sie als Disjunktion.

Jene Verknüpfungen mit nur einfacher Belegung durch den Wahrheitswert 1 nennen wir **Minterme** oder **Vollkonjunktionen** und bezeichnen sie mit m_j ($j = 0 \ldots n$, n – Anzahl der Ausgangsvariablen). Für die beiden Ausgangsvariablen a, b gilt folglich der nachstehende Satz 1.2:

Satz 1.2 (Minterme und distinktive Normalform)

Die Minterme können als Produkte dargestellt werden:

$$m_0(a,b) = \overline{a} \cdot \overline{b},\ m_1(a,b) = \overline{a} \cdot b,\ m_2(a,b) = a \cdot \overline{b},\ m_3(a,b) = a \cdot b,$$

womit jede logische Verknüpfung in disjunktiver Normalform schreibbar wird

$$f(a,b) = f(0,0) \cdot m_0 + f(0,1) \cdot m_1 + f(1,0) \cdot m_2 + f(1,1) \cdot m_3\ .$$

Eine Tabelle mit den vier Mintermen für die beiden Ausgangsvariablen a und b gibt Wolfram|Alpha mit dem nachstehenden Befehl aus.

```
Table[BooleanMinterms[{i},{a,b}],{i,0,3}]
```

Das beschriebene Verfahren zur Bildung der *disjunktiven* Normalform kann unter Anwendung des Dualitätsgedanken analog für das Aufstellen der **konjunktiven Normalform** (KNF) verwendet werden. Die dabei zu betrachteten Ausdrücke $M_0(a,b) = a+b$, $M_1(a,b) = a+\neg b$, $M_2(a,b) = \neg a+b$ und $M_3(a,b) = \neg a+\neg b$ heißen **Maxterme** oder **Volldisjunktionen**.

> Hat die zu realisierende Schaltfunktion öfter den Wert 0, so ist die **DNF** effektiver, hat sie mehrheitlich den Wert 1, liefert die **KNF** einfacher das gesuchte Resultat.

Analoges gelten natürlich auch für Logikfunktionen mit mehr als zwei Variablen. Sie bilden die Grundlage für den Entwurf von Schaltkreisen, liefern allerdings im Allgemeinen keine *minimalen* Formeln.
In der praktischen Anwendung der Schaltungsalgebra stellen die Kosten das entscheidende Kriterium dar. Mittels der DE MORGANschen Regeln

$$a \cdot b = \overline{\neg a + \neg b} \quad \text{bzw.} \quad a + b = \overline{\neg a \cdot \neg b}$$

können wir die *Konjunktion* durch die *Disjunktion* bzw. umgekehrt ausdrücken.

1.2 Mengenlehre

Den Begriff einer Menge fassen wir nach Georg Cantor wie folgt:

Definition 1.7 (Begriff der Menge)

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von *bestimmten* und *wohlunterschiedenen* Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte nennen wir die *Elemente* der Menge.

Beispielsweise sind $A = \{a, b, c\}$ oder auch $B = \{-1, 0, 1\}$ Mengen. Die Reihenfolge, in welcher die Elemente aufgeführt werden, wie auch die Häufigkeit ihres Auftretens ist unerheblich.
Mengen bezeichnen wir mit Majuskeln[3]. Werden sie über Aussagenformen $p(x)$ definiert, wie $p(x)$: „x ist gerade", so geben wir mit $A = \{x \in X : p(x)\}$ die Menge aller x aus der Grundmenge X an, für welche die Aussage $p(x)$ wahr ist.
Ist x ein Element von A, so schreiben wir $x \in A$. Wenn hingegen $\neg(x \in A)$ gilt, zeigen wir dies durch $x \notin A$ an. Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

(die Mengen A und B sind gleich, wenn und nur wenn A eine Teilmenge von B sowie B eine Teilmenge von A ist.)

Häufig auftretende Zahlenmengen bezeichnen wir mit eigenen Symbolen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid q \neq 0 \wedge p, q \in \mathbb{Z}\}$	Menge der rationalen Zahlen

Diese Zahlenmengen haben unendlich viele Elemente und werden daher *unendliche Mengen* genannt.

Unter der **Mächtigkeit** bzw. **Kardinalzahl** $|A|$ einer Menge A verstehen wir die Anzahl ihrer (unterscheidbaren) Elemente. Demzufolge ist die Mächtigkeit von $A = \{M, e, n, g, e\}$ wertmäßig $|A| = 4$.

[3](*latein. maiusculus* „etwas größer") typografische Bezeichnung für die Großbuchstaben

Georg F. L. P. Cantor (1845–1918): deut. Mathematiker. G. Cantor lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Er gilt als Begründer der Mengenlehre. Cantor befasste sich zunächst mit Zahlentheorie und wandte sich Fourierreihen zu. Er bewies 1869 die Eindeutigkeit der Darstellung von Funktionen durch trigonometrische Reihen. Ferner schuf er 1870 mit der sogenannten Punktmenge die Grundlagen der Theorie der später von B. Mandelbrot so bezeichneten Fraktale.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Eine besondere Stellung nimmt die sogenannte *leere* Menge ein.

Definition 1.8 (Leere Menge)

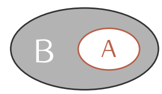
Eine Menge A heißt *leer*, wenn sie kein Element enthält.

Sind A und B jeweils leere Mengen, so ist $A = B$. Folglich ist die leere Menge *eindeutig*. Sie wird mit dem Symbol $\emptyset$ oder auch $\{\}$ bezeichnet.

Beispiel 1.9 (Leere Menge)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 1\} = \{\}$, denn es gibt keine natürliche Zahl, die gleich bleibt, wenn wir 1 zu ihr addieren.

Für eine anschauliche Darstellung der nachfolgenden Begriffe verwenden wir die von Venn entwickelten Mengendiagramme.



Definition 1.9 (Teilmenge)

A heißt Teilmenge von B, wenn *jedes* Element von A auch ein Element von B ist.

$$A \subseteq B = \{x : x \in A \to x \in B\}$$

Wir sagen auch B ist Obermenge von A. Gilt zusätzlich $A \neq B$, so heißt A *echte* Teilmenge von B (in Zeichen $A \subsetneq B$). Für $\neg(A \subseteq B)$ schreiben wir abkürzend $A \nsubseteq B$. Nebenstehend sehen wir das Venn-Diagramm der Teilmenge $A \subseteq B$.
Alle Teilmengen aus einer Liste von Elementen gibt Wolfram|Alpha mittels `subsets` zurück. Leider funktionieren z. Z. die erweiterten Möglichkeiten von *Mathematica* hier (noch) nicht.

```
subsets[{a, b, c, d}]
```

Die Menge aller Teilmengen einer gegebenen Menge B wird als **Potenzmenge** von B bezeichnet.

$$\mathcal{P}(B) = \{A : A \subseteq B\}$$

Beispiel 1.10 (Potenzmenge)

$$\begin{aligned} A = \{1, 2\} \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \\ B = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\} \end{aligned}$$

Beachte: $B \neq \mathcal{P}(B)$, denn B hat **kein** Element, aber $\mathcal{P}(B)$ das Element $\emptyset$.

Es gilt:

1. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A mit n Elementen beträgt 2^n.
2. Die leere Menge ist Element der Potenzmenge jeder beliebigen Menge: $\emptyset \in \mathcal{P}(A), \forall A$.

Satz 1.3 (Eigenschaften der Teilmenge)

Seien A, B und C Mengen, so weisen diese folgende Eigenschaften auf:

1.	$A \subseteq A$	(Reflexivität)
2.	$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C)$	(Transitivität)
3.	$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow A = B$	(Antisymmetrie)
4.	$\emptyset \subseteq A$	
5.	$A \not\subset A$	(Irreflexivität)
6.	$(A \subset B) \Rightarrow (B \not\subset A)$	(Asymmetrie)

1.2.1 Operationen mit Mengen

Seien A, B, K, S, V Mengen. Dann definieren wir auf ihnen die Operationen:

- **Vereinigung von Mengen**: $A \cup B = \{x : x \in A \textbf{ oder } x \in B\}$
  V heißt Vereinigung(smenge) von A und B, wenn V die Menge aller Elemente ist, die in A oder B (oder beiden Mengen) liegen. Für die Vereinigung mehrerer Mengen $A_1, \ldots, A_n$ schreiben wir abkürzend

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \ .$$

- **Durchschnitt von Mengen**: $A \cap B = \{x : x \in A \textbf{ und } x \in B\}$
  S heißt Schnitt(menge) von A und B, wenn S die Menge aller Elemente ist, die sowohl in A als auch in B liegen. Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt** oder **elementfremd**, falls für ihren Durchschnitt $A \cap B = \emptyset$ gilt. Für den Durchschnitt mehrerer Mengen $A_1, \ldots, A_n$ schreiben wir abkürzend

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \ .$$

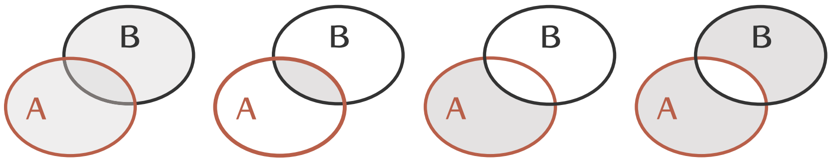
- **Differenz / Komplement**: $A \setminus B = \{x : x \in A \textbf{ und } x \notin B\}$
  Gilt $B \subset A$, so heißt K das Komplement von B in A, wenn K die Menge aller Elemente ist, die in A, aber nicht in B liegen ($K = A \setminus B$).

- **Symmetrische Differenz**: $A \Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$
  Die symmetrische Differenz $A \Delta B$ ist die Menge aller Elemente, die zu genau *einer* der beiden Mengen A und B gehören.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \ .$$

Interessieren wir uns für die Differenz, welche aus den beiden Mengen der natürlichen Teiler von 20 und 12 gebildet wird, so können wir dies durch Wolfram|Alpha mit nachstehendem Befehl zu 5, 10, 20 bestimmen lassen.

```
Complement[Divisors[20], Divisors[12]]
```



(a) Vereinigung $A \cup B$ **(b)** Schnittmenge $A \cap B$ **(c)** Komplement $A \setminus B$ **(d)** symmetrische Differenz $A \Delta B$

Abb. 1.2 Venn *Diagramme zu den Mengenoperationen*

Die leere Menge wirkt bezüglich der Schnittmengenbildung wie 0 beim Zahlenmultiplizieren und wie eine Addition mit 0 beim Bilden der Vereinigung. Vereinigungs- und Durchschnittsmenge erfüllen folgende Rechengesetze:

Assoziativ

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Absorption

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

Kommutativ

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotenz

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

De Morgan Regel

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Distributiv

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Abb. 1.3 *Rechengesetze für Vereinigungs- und Durchschnittsmenge*

Beispiel 1.11 (Mengenoperationen)

Seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ gegeben:

Durchschnitt	$A \cap B = \{3\}$,	Vereinigung	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
Differenz	$A \setminus B = \{1, 2\}$,	symmetrische Differenz	$A \Delta B = \{1, 2, 4, 5\}$.

Mengenoperationen übergeben wir an Wolfram|Alpha mittels der englischen Operationsnamen. Momentan schwächelt die Software bei Mengenoperationen noch etwas, nur eine rudimentäre Funktionalität kann genutzt werden.

```
(complement S) intersect (A union B)
```

Lassen sich die Elemente der Mengen vollständig diskret angegeben, sind die Berechnungen korrekt, auf komplexere Aufgabenstellungen, wie z. B. im 3. Übungsbeispiel auf Seite 67, zeigt Wolfram|Alpha aktuell noch keine befriedigende Reaktion. Die Eigenschaften der Differenzmenge fassen wir im nachstehenden Satz.

Satz 1.4 (Eigenschaften der Differenzmenge)

Seien A, B, C beliebige Mengen. Dann gelten die folgenden Regeln:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \qquad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
$$A \setminus B = A \cap \neg B.$$

Beachten Sie in Satz 1.4 insbesondere die Unterschiede in der Distributivität etwa bei $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ und $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Kartesisches Produkt

Ein geordnetes Paar wird im Unterschied zu einer Menge mit runden Klammern geschrieben. Nun ist die Reihenfolge von Bedeutung und mehrfach auftretende Elemente werden aufgeführt.

Definition 1.10 (Geordnetes Paar)

Wir bezeichnen (a, b) als **geordnetes Paar** (auch: *Tupel*). Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn gilt:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d \ .$$

Hiermit können wir den von Descartes eingeführten Begriff des **kartesischen Produkts** als Verknüpfung zweier Mengen A und B erklären.

René Descartes (1596–1650): franz. Philosoph, Mathematiker. Descartes ist der Erfinder der sogenannten analytischen Geometrie, welche Algebra und Geometrie verbindet. Allerdings taucht nirgendwo in seinem Werk das heute nach ihm benannte, rechtwinklige Koordinatensystem auf.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

Es ist die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element aus A und deren zweites Element aus B ist:.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Das kartesische Produkt $A \times B$ (gelesen als A kreuz B) ist weder *kommutativ* noch *assoziativ*, allerdings *distributiv* wie etwa

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)\ .$$

1.2.2 Gegenüberstellung der Logik- und Mengensymbolik

Klassische Aussagenlogik spiegelt sich in der Beschreibung elektronischer Schaltungen oder in der Formulierung logischer Ausdrücke in Programmiersprachen wider. Es gelten die in der folgenden Übersicht aufgeführten Analogien zwischen Aussagenlogik, Schaltungsalgebra und Mengenlehre.

Aussagenlogik		Schaltungsalgebra		Mengenlehre	
Aussagen	p, q	Schaltvariable	a, b	Mengen	A, B
Wahrheitswert	F, W	Signal	$0, 1$	Element	Objekt
Konjunktion	$(p \wedge q)$	AND	$a \cdot b$	Durchschnitt	$A \cap B$
Disjunktion	$(p \vee q)$	OR	$a + b$	Vereinigung	$A \cup B$
Negation	$\neg p$	NOT	$\overline{a}$	Komplement	$X \setminus A$
Kontradiktion				Leere Menge	$\emptyset$
Tautologie	$\models$			Grundmenge	X
Implikation	$(p \rightarrow q)$			Teilmenge	$A \subseteq B$
Äquivalenz	$(p \leftrightarrow q)$			Gleichheit	$A = B$
Antivalenz	$\neg(p \leftrightarrow q)$	XOR	$a \oplus b$	symmetrische Differenz	$A \Delta B$

Tab. 1.4 *Symbolik der Aussagenlogik, Schaltungsalgebra und Mengenlehre*

Dem UND-Glied können wir also $\wedge$ zuordnen, d. h. $a \cdot b$ ließe sich in der Schaltungslogik auch als $p \wedge q$ schreiben, was allerdings nicht den üblichen Konventionen entspricht. Daher verwenden Sie die Notation der Schaltungslogik nicht, während Sie sich mit Aussagenlogik beschäftigen, vice versa.
In diesem Zusammenhang sei auf die Fähigkeit Wolfram|Alphas hingewiesen, Logikfunktionen direkt in entsprechende Schaltungsalgebra abzubilden:

```
logic circuit (p and q) xor (r or s)
```

1.3 Arithmetik

Die Arithmetik ist jene Teildisziplin der Mathematik, die die Theorie der Zahlen zum Gegenstand hat. Jede mathematische Ausbildung beginnt üblicherweise mit der Vermittlung der vier arithmetischen Grundrechenarten. Zur Arithmetik gehören auch die Gesetze der Teilbarkeit der ganzen Zahlen, die Division mit Rest sowie die Bruchrechnung. Die aus den Grundgesetzen der Arithmetik hergeleiteten Rechenregeln sind meist nicht schwierig, müssen aber dennoch mit *Sorgfalt* ausgeführt werden.

1.3.1 Zahlenmengen

Die gebräuchlichen Zahlenmengen (Zahlenbereiche) gewinnen wir ausgehend von den *natürlichen* Zahlen durch Aufnahme weiterer Elemente in den jeweiligen Obermengen, sodass nach Abschluss der Konstruktion folgende Mengenrelation vorliegt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\ .$$

Die Entwicklung der natürlichen Zahlen geht auf die Notwendigkeit zu *zählen* und das Bedürfnis zu *ordnen* zurück.

Definition 1.11 (Zahlenbereich der natürlichen Zahlen)

Die **natürlichen Zahlen** sind die beim Zählen verwendeten Zahlen der *geordneten* Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Mitunter betrachten wir die *Null* als zu den natürlichen Zahlen gehörend und kennzeichnen dies durch $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Addition und Multiplikation zweier natürlicher Zahlen liefert im Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Zur Lösung aller Gleichungen der Form $a + x = b$, $(a, b \in \mathbb{N})$ müssen wir indes den Zahlenbereich auf den der *ganzen* Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitern, da für $a > b$ bzw. $a \geq b$ wir kein $x \in \mathbb{N}$ angeben können, welches die Gleichung erfüllt. Dazu führen wir zunächst das neue Symbol $-n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein und vereinbaren die folgende Definition:

Definition 1.12 (Zahlenbereich der ganzen Zahlen)

Die Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen** ist gegeben durch

$$\mathbb{Z} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\}\ .$$

Durch die Einführung der *gebrochenen* Zahlen werden alle Gleichungen der Form $ax = b,\ (a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0)$ lösbar. Ganze und gebrochene Zahlen bilden den Bereich der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$, in welchem (abgesehen vom Verbot der Division durch 0) alle Grundrechenarten uneingeschränkt ausführbar sind. Die ganzen Zahlen betrachten wir als Bruch mit dem Nenner 1, sodass wir wie folgt notieren können:

Definition 1.13 (Zahlenbereich der rationalen Zahlen)

Unter der Menge der **rationalen Zahlen** (bzw. **Bruchzahlen**) fassen wir die Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; q \neq 0 \quad \text{und } p, q \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Wir nennen p den Zähler und q den Nenner der Bruchzahl.

Ferner vereinbaren wir zwei rationale Zahlen genau dann als **gleich**, wenn für alle $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ mit $q_1 \cdot q_2 \neq 0$ gilt:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1 \; .$$

Die rationalen Zahlen lassen sich wie auch die natürlichen und ganzen Zahlen als Punkte auf einer orientierten Geraden abbilden. Unter Anwendung des Strahlensatzes $p : r = q : 1$ konstruieren wir beliebige Bruchzahlen.

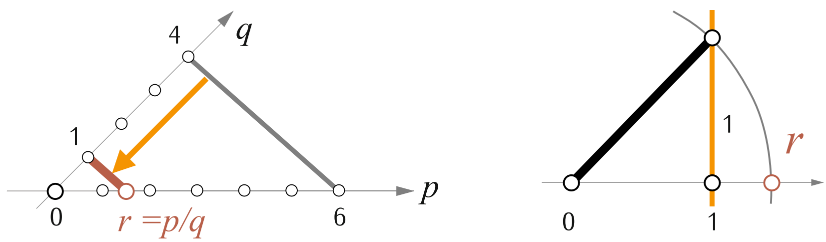


Abb. 1.4 *Geometrische Konstruktion von $r = p/q$ und irrationale Zahl $\sqrt{2}$*

Satz 1.5 (Eigenschaften rationaler Zahlen)

Die Menge der rationalen Zahlen ist überall **dicht**, d. h., zwischen zwei rationalen Zahlen a und b $(a < b)$ existieren unendlich viele weitere rationale Zahlen, die jede reelle Zahl beliebig genau annähern können.

Wenngleich die rationalen Zahlen beliebig dicht auf der Zahlengeraden liegen, können wir nicht jedem Punkt eine rationale Zahl zuordnen. Beispielsweise existiert keine rationale Zahl, deren Quadrat die Zahl 2 ergibt (vergleiche Abbildung 1.4 sowie Beispiel 1.7). Wir bezeichnen diese Zahlen als *irrational* und erweitern mit ihnen den Bereich der rationalen Zahlen zu den **reellen Zahlen**.
Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erbt alle Rechenregeln der rationalen Zahlen. Eine rationale Näherung einer irrationalen Zahl mit gewünschter Genauigkeit berechnet Wolfram|Alpha mittels der folgenden Anweisung.

```
Rationalize[Pi, .001]
```

Zahlenintervall

Für Teilmengen der reellen Zahlen führen wir folgende Abkürzung ein:

Definition 1.14 (Zahlenintervall)

Eine zusammenhängende Menge reeller Zahlen mit den Endpunkten a und $b\,(a < b)$ wird **Zahlenintervall** genannt. Gehören die Endpunkte nicht zum Intervall, sprechen wir von *offenen*, andernfalls von *abgeschlossenen* Intervallenden.

Fehlt auf einer Seite oder beiden Seiten die Intervallgrenze, sprechen wir von einem unbeschränkten Intervall. In diesen Fällen kommen als Intervallgrenzen die bekannten Symbole $-\infty$ bzw. ∞ zum Einsatz. Wir haben somit zwischen *endlichen* und *unendlichen* Intervallen zu unterscheiden:

$$\begin{array}{rcll} (a,b) & = & \{x \mid a < x < b\} & \text{offenes, endliches Intervall} \\ (-\infty, b] & = & \{x \mid -\infty < x \leq b\} & \text{halboffenes, unendliches Intervall} \end{array}$$

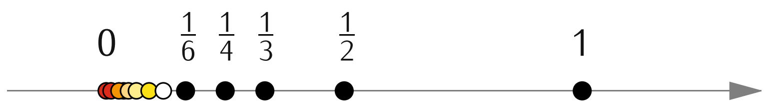


Abb. 1.5 *Halboffenes Intervall* $(0,1] = \{n \in \mathbb{N} \mid n^{-1}\}$

`Interval[min,max]` stellt in Wolfram|Alpha ein geschlossenes Intervall, welches beide Endpunkte enthält, dar. An Intervallobjekten können arithmetische und andere Operationen durchgeführt werden.

```
Interval[{1,6}]
```

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ von reellen Zahlen heißt nach **oben** bzw. **unten beschränkt**, falls es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\forall x \in M : x \leq K \quad \text{bzw.} \quad \forall x \in M : x \geq K \;.$$

Die *kleinste obere* bzw. *größte untere Schranke* nennen wir das **Supremum** bzw. **Infimum** von M, kurz $\sup M$ bzw. $\inf M$.
Das Supremum von M ist nicht zwingend auch ein Element der Menge M (z. B. $\sup(1,2) = 2 \notin (1,2)$), wenn doch so ist es gleichzeitig auch ihr **Maximum** ($\sup[1,2] = \max[1,2] = 2$).

Analoge Überlegungen gelten natürlich auch für das Verhältnis von Infimum und **Minimum** der Menge M.

1.3.2 Summen und Produkte

Mitunter wollen wir ausdrücken, dass eine bestimmte Operation mehrmals hintereinander ausgeführt werden soll. Zukünftig werden wir hierzu die folgenden Symbole unter den Voraussetzungen $a_i \in \mathbb{R}$, $i, k, l \in \mathbb{N}$ verwenden:

$$\text{Produktzeichen:} \quad \prod_{i=k}^{l} a_i := \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_l, & k < l \\ a_k, & k = l \\ 1, & k > l \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\text{Summenzeichen:} \quad \sum_{i=k}^{l} a_i := \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l, & k < l \\ a_k, & k = l\ . \\ 0, & k > l \end{cases}$$

Die Summe (das Produkt) reeller Zahlen hängt nicht von der Reihenfolge ihrer Summanden (Faktoren) ab. Für das Rechnen mit Summen gelten die Regeln nach Satz 1.6.

Satz 1.6 (Rechenregeln für Summen)

Für $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ sowie reelle Zahlen a_i, b_i und c gilt:

$$\sum_{i=1}^{l} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{l} a_i + \sum_{i=1}^{l} b_i\ , \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{l} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{l} a_i\ , \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{l} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{l} a_i \quad (1 < k < l), \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{l} a_{ij}\ . \tag{1.6}$$

Unendliche Summen lassen wir Wolfram|Alpha berechnen, indem wir als obere Grenze den Wert `infinity` angeben.

```
Sum[1/i^6, {i,1,infinity}]
```

Analoge Rechenregeln lassen sich auch für Produkte formulieren, indem wir das Summen- durch das Produktsymbol ersetzen, anstatt des Additions- das Multiplikationszeichen verwenden und in (1.4) berücksichtigen, dass der vorgezogene konstante Faktor c zur l-ten Potenz zu nehmen ist, d. h., es gilt

$$\prod_{i=1}^{l} c \cdot a_i \quad = \quad c^l \cdot \prod_{i=1}^{l} a_i\ . \tag{1.7}$$

Weiter gilt sowohl für das Summen- wie auch für das Produktzeichen das Prinzip der Indexverschiebung, d. h., wir können folgendermaßen umformen:

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = \sum_{i=k-p}^{l-p} a_{i+p} = \sum_{i=k+p}^{l+p} a_{i-p} \text{ für } p \in \mathbb{N} \,.$$

Insbesondere gilt $\sum\limits_{i=k}^{l} a_i = \sum\limits_{i=0}^{l-k} a_{i+k}$.

Beispiel 1.12 (Rechenregeln für Summen)

Wir berechnen die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Unter Verwendung der im Beispiel 1.8 mittels vollständiger Induktion gefundenen Formel sowie den Rechenregeln für Summen nach Satz 1.6 bestimmen wir das Ergebnis zu:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \,.$$

Fakultät

Ferner führen wir noch den Begriff der **Fakultät** (seltener auch **Faktorielle** genannt) ein. Für sie gilt die nachstehende Definition.

Definition 1.15 (Fakultät)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad n! = \prod\limits_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ und speziell $0! = 1$.

In der Kombinatorik sind Fakultäten von zentraler Bedeutung, weil $n!$ die Anzahl der Möglichkeiten ist, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen. Die größte Fakultät, die von den meisten Taschenrechnern ermittelt werden kann, ist $69! \approx 1{,}71 \cdot 10^{98}$, eine Leistung, über welche Wolfram|Alpha natürlich nur schmunzelt. Versuchen Sie ruhig einmal das folgende Beispiel:

1 000 000 !

Eine näherungsweise Berechnung der Fakultät für beliebig große Zahlen gelingt mit Hilfe der STIRLING[4]schen Formel:

$$n! \quad \approx \quad \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} + \dots\right)$$

[4] **James Stirling** (1692–1770): schottischer Mathematiker.

Das Online-Zeitalter lässt grüßen: Stellenwertsysteme

Für die korrekte Darstellung von Zahlen werden Zahlensysteme verwendet. Diese definieren Regeln, wie eine Zahl als Folge von Symbolen zu interpretieren ist. Im Wesentlichen können wir zwischen zwei Arten von Zahlensystemen unterscheiden: den *additiven* und den *positionellen* Zahlensystemen.

Klassiker des additiven Systems sind die *Hieroglyphenzahlen* im alten Ägypten und die *römischen Ziffern*, welche neben den Buchstaben **I, X, C** und **M** als Symbole für 1, 10, 100 und 1000, ebenso auch **V, L** und **D** als Symbole für die Halbzahlen 5, 50 und 500 benutzen. Während in Additionssystemen das Summieren von Zahlen noch relativ einfach ist, sind das Lesen großer Zahlen und höhere Mathematik schwierig.

Wollen wir z. B. eine Jahreszahl in römischen Ziffern darstellen, so können wir diese Aufgabe natürlich an Wolfram|Alpha delegieren.

```
IntegerString[1984, "Roman"]
```

Heute verwenden wir fast nur Stellenwertsysteme, für welche gilt:

Definition 1.16 (Polyadisches Zahlensystem)

Ein *polyadisches* Zahlensystem mit $B \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ als Basis und den zulässigen Ziffern $z_i \in \mathbb{N}_0$, für die $0 \leq z_i < B$ gilt, wird gebildet durch

$$a_n \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i B^i \qquad (m > 0, n \geq 0; m, n \in \mathbb{N}) .$$

Die Ziffern mit $i \geq 0$ bilden den ganzen, die mit $i < 0$ den gebrochenen Teil der Zahl. Somit gibt die Stelle eines Symbols an, mit welcher Potenz von B sie zu multiplizieren ist.

$$27,0815 = 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

Für die Verwendung in Computern sind neben dem **Dual-** oder auch **Binärsystem** zur Basis $B = 2$ mit den beiden Symbolen „0,1", das zur Basis 8 definierte **Oktalsystem** mit den Symbolen „0,1,…,7" sowie das **Hexadezimalsystem** ($B = 16$) mit den gültigen Symbolen „0…9, A…F" relevant. Die Oktal- und Hexadezimalzahlen eignen sich wegen der übersichtlichen Darstellung von Dualzahlen, denn eine Ziffer in einem der beiden Systeme entspricht genau einem Block von drei bzw. vier Ziffern im Binärsystem.

Umwandlung einer Dezimalzahl in ein anderes Zahlensystem

Indem wir schrittweise den Ganzzahlanteil der gegebenen Zahl mittels Division durch die Zahlenbasis des Zielsystems abbauen und für jeden Schritt den verbleibenden

Rest in umgekehrter Reihenfolge notieren, erhalten wir die neue Zahlendarstellung. Die Dezimalstellen werden ähnlich behandelt, nur haben wir diese mit der neuen Zahlenbasis zu multiplizieren und die jeweiligen Überläufe so lange zu merken, bis die Ergebnisse der Multiplikation sich wiederholen.

ganzzahliger Anteil			Nachkommastellen	
27:2 =	13 Rest	1	0,3 · 2 = 0,6 + Übertrag	0
13:2 =	6 Rest	1	0,6 · 2 = 0,2 + Übertrag	1
6:2 =	3 Rest	0	0,2 · 2 = 0,4 + Übertrag	0
3:2 =	1 Rest	1	0,4 · 2 = 0,8 + Übertrag	0
1:2 =	0 Rest	1	0,8 · 2 = 0,6 + Übertrag	1
			0,6 · 2 = 0,2 + Übertrag	1
$27_D = 11011_B$			$0{,}3_D = 0{,}010011001\ldots_B$	

Abb. 1.6 *Konvertieren der Dezimalzahlen* $27,3$ *in eine Dualzahl*

Wir kontrollieren unser Ergebnis aus Abbildung 1.6 mit Wolfram|Alpha. Dem Befehl werden dazu zwei Parameter übergeben: die zu konvertierende Zahl sowie die Zahlenbasis.

```
BaseForm[Real[27.3], 2]
```

Wie merkt sich ein Computer Zahlen?

Selbst das leistungsfähigste Computersystem der Welt ist in seiner Speicherkapazität begrenzt. Folglich können Rechner nur eine endliche Teilmenge der reellen Zahlen *exakt* verarbeiten, alle anderen müssen gerundet werden. Die so abgebildeten Zahlen wollen wir **Maschinenzahlen** nennen.
Das Speichern von natürlichen Zahlen als Dualzahlen leuchtet sofort ein: Jede Speicherzelle nimmt den Wert 0 oder 1 an.
Bleibt die Frage, wie wir am besten mit negativen Ganzzahlen verfahren. Einen gesonderten Speicherplatz für das Vorzeichen zu reservieren, ist nicht sehr effizient. Die beste Art, negative Ganzzahlen im Computer darzustellen und zu verarbeiten, ist die Verwendung des sogenannten **Zweierkomplements**: bei negativen Zahlen hat das höchst wertige Bit den Wert 1, bei positiven Zahlen oder Null ist sein Wert 0. Wesentlicher Vorteil dieses Zahlenformats ist der Verzicht auf zusätzliche Steuerlogik zu deren Verarbeitung in digitalen Schaltungen. Damit beträgt ihr Wertebereich bei n binären Stellen allgemein

$$-2^{n-1}, \ldots, 0, \ldots, 2^{n-1} - 1 \; .$$

Formal wandeln wir eine negative Ganzzahl x mit n Stellen in ihre Zweierkomplementdarstellung x_z wie folgt um:

$$x_z = 2^n - |x| \qquad \rightarrow \qquad x_z + |x| = 2^n \; .$$

Und wie halten wir es mit den restlichen Zahlenformaten? Die naheliegende Idee, mit jeder Zahl auch die exakte Position des Kommas abzulegen, bringt uns zur *Gleitkommadarstellung* der rationalen Zahlen. Diese Darstellungsform wurde erstmals von Zuse im Automaten Z1 verwendet.

Definition 1.17 (Gleitkommadarstellung)

Die Darstellung von Gleitkommazahlen mit der Basis B des Stellenwertsystems, der als *Mantisse* bezeichneten Kommazahl M und dem ganzzahligen *Exponent* E hat die Form $M \cdot B^E$ mit $|M| < 1$, $E \in \mathbb{Z}$.

M und E werden im gewählten Stellenwertsystem mit Basis B dargestellt. Beide haben eine feste Anzahl von s bzw. t Stellen:

$$M = \pm 0.m_1 m_2 \ldots m_s = \pm \sum_{j=1}^{s} m_j B^{-j}, \;\; E = \pm 0.e_{t-1} \ldots e_1 e_0 = \pm \sum_{j=0}^{t-1} e_j B^j \;.$$

Die Definition lässt indes Variationen für die Zahlennotierung zu: den Bruch $82/3$ können wir in Gleitkommadarstellung z. B. schreiben als $27,\overline{3} \cdot 10^0$, $2,7\overline{3} \cdot 10^1$ oder $0,27\overline{3} \cdot 10^2$ usw., weshalb eine Normalisierung des Zahlenformats sinnvoll ist.
Die Standarddarstellungen für binäre Gleitkommazahlen in Computern werden in der Norm **IEEE 754** definiert. Abbildung 1.7 zeigt die schematische Darstellung einer Gleitkommazahl mit einfachem (32 Bit) Speicherbedarf.

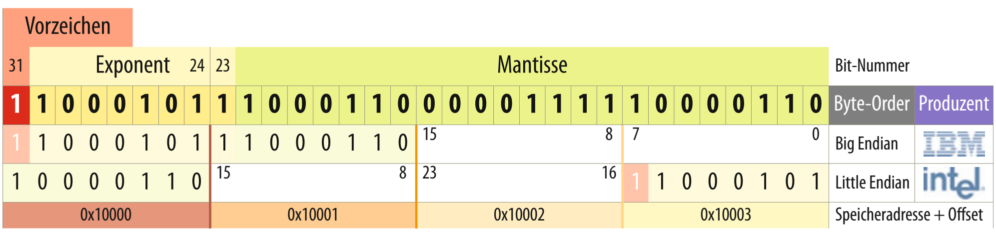


Abb. 1.7 *Gleitkommadarstellung für einfach genaue Zahlenformate*

IEEE 754 normiert die Basis B auf den Wert 2, reserviert eine Stelle zum Speichern des Vorzeichens ($V = (-1)^v$, sodass $v = 0$ für eine positive und $v = 1$ für eine negative Zahl steht) und wertet den Exponenten E als Differenz der nichtnegativen Binärzahl e und einem festen Biaswert $b = 2^{t-1} - 1$ (t – Anzahl der Bitstellen für Exponenten). Schließlich ist die Mantisse $1 \le M \le 2$ ein Wert, der sich aus den s Mantissenbits mit dem Wert m berechnet.

Konrad Ernst Otto Zuse (1910–1995): dt. Erfinder. Mit seiner Entwicklung der Z3 im Jahre 1941 baute er den ersten vollautomatischen, programmgesteuerten und frei programmierbaren Computer der Welt. Für die Z1 entwickelte Zuse die Methode der computergerechten Gleitkommazahlen auf der Grundlage von Mantisse und Exponent.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Konrad_Zuse

1.3.3 Grundgesetze der Arithmetik

Im Bereich der natürlichen Zahlen gibt es genau eine eindeutig bestimmte Operation (Achtung: jetzt wird's abstrakt)

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (n, m) \mapsto n + m,$$

für die (1) $n + 1 = n'$ und (2) $n + m' = (n + m)'$, $m \in \mathbb{N}$ gilt. Wir nennen diese Operation *Addition* und führen die folgende Symbolik ein:

$$2 := 1',\ 3 := 2',\ 4 := 3', \dots\ .$$

Im Weiteren werden wir Eigenschaften und Gesetze der reellen Zahlen mittels „axiomatischen" Vorgehens diskutieren, d. h., wir führen die Eigenschaften als Grundgesetze ein, ohne deren Gültigkeit im Einzelfall nachzuweisen.

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Regeln gelten:

Grundgesetze der Gleichheit		
1.	$a = a$	*Reflexivität*
2.	$a = b \to b = a$	*Symmetrie*
3.	$(a = b \land b = c) \to a = c$	*Transitivität*

Grundgesetze der Ordnung		
1.	$a < b \lor a = b \lor a > b$	*geordnete Menge*
2.	$(a < b \land b < c) \to a < c$	*Transitivität*
	Soll nur die Ungleichheit von a und b zum Ausdruck gebracht werden, notieren wir $a \neq b$	

Grundgesetze der Addition und Multiplikation		
1.	$a + b = b + a$	*Kommutativität*
	$a \cdot b = b \cdot a$	
2.	$(a + b) + c = a + (b + c)$	*Assoziativität*
	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	
3.	$a < b \to a + c < b + c$	*Monotonie*
	$(a < b \land c > 0) \to a \cdot c < b \cdot c$	
4.	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	*Distributivität*
	Achtung: Im Allgemeinen gilt $a \cdot b + c \neq (a + c) \cdot (b + c)$	

Aus den genannten Grundgesetzen lassen sich alle weiteren Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen ableiten. So folgt aus $a < b$ direkt $-a > -b$, was wir durch Addition der Summe $(-a) + (-b)$ auf beiden Seiten von $a < b$ überprüfen:

$$\begin{aligned} a + [(-a) + (-b)] &< b + [(-a) + (-b)] \\ (-b) + [a + (-a)] &< [b + (-b)] + (-a) \\ -b &< -a\ . \end{aligned}$$

http://www.springer.com/978-3-662-43545-8

Basiswissen Mathematik
Der smarte Einstieg in die Mathematikausbildung an Hochschulen
Schmidt, J.
2015, XXV, 491 S. 500 Abb., 350 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-43545-8