

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der linear elastischen Kontinuumsmechanik aufgeführt, welche im Verlauf des *essentials* gebraucht werden. Die Gesetze werden hier nicht hergeleitet, jedoch sind diese Herleitungen in der entsprechenden Fachliteratur zu finden, siehe z. B. MUSSCHELSCHWILI [10], TIMOSHENKO [11], NOVOZHILOV [12], FILONENKO [13], SADD [14], ESCHENAUER [15] oder CHOU [16].

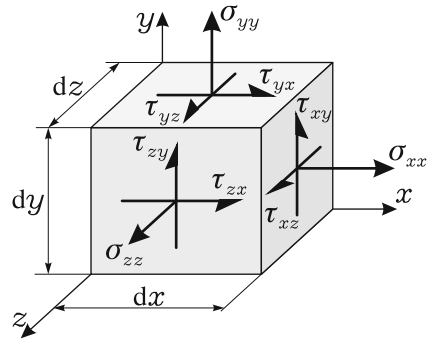
Zusammenfassend besteht die Arbeit der linear elastischen Kontinuumsmechanik darin, die analytische Lösung für 15 gekoppelte Gleichungen zu finden, von denen neun partielle Differenzialgleichungen sind. Die darin enthaltenen 15 Unbekannten sind sechs Spannungen, sechs Dehnungen und drei Verschiebungen. Alle 15 Gleichungen und deren Unbekannte werden in den Abschn. 2.1, 2.2 und 2.3 aufgeführt.

2.1 Gleichgewicht

Im Sinne der Statik wird hier ein Kräftegleichgewicht vorausgesetzt. Unter Verwendung von kartesischen Koordinaten lässt sich in jede Richtung das Kräftegleichgewicht am differentiellen Volumenelement (siehe Abb. 2.1) aufstellen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= \rho \ddot{u}_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= \rho \ddot{u}_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= \rho \ddot{u}_z,\end{aligned}\tag{2.1}$$

Abb. 2.1 Spannungen an einem differentiellen Volumenelement.



worin σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{zz} die Normalspannungen und τ_{xy} , τ_{xz} und τ_{yz} die Schubspannungen sind. Bei den Schubspannungen τ_{ji} bezieht sich der erste Index j auf die Richtung des Normalenvektors der auf der Oberfläche steht, wo die Schubspannung wirkt, und der zweite Index i gibt die Richtung an, in welche die Spannung zeigt. f_x , f_y und f_z sind Volumenkräfte, welche z. B. durch Gravitation oder magnetische Felder verursacht werden können, und $\rho \ddot{u}_i$ sind Massenträgheitskräfte in x -, y - oder z -Richtung.

Das Momentengleichgewicht führt auf die Verhältnisse $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ und $\tau_{zy} = \tau_{yz}$.

Für den 2D-Fall reduzieren sich die Gleichgewichtsbeziehungen von Gl. 2.1 zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x &= \rho \ddot{u}_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= \rho \ddot{u}_y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Materialgesetz

Das Materialgesetz, oder das Gesetz von HOOKE, verbindet die sechs Spannungen mit den sechs Dehnungen. In kartesischen Koordinaten gilt [14, 17, 18, 19]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \alpha_T \Theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

wobei E der Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl ist [17]. Im Weiteren sind α_T der Wärmeausdehnungskoeffizient, $\Theta = \Theta(x, y, z)$ das Temperaturfeld, bezogen auf eine Referenztemperatur, wo keine Wärmespannungen vorliegen, ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{zz} sind die Dehnungen in Normalenrichtung und γ_{xy} , γ_{xz} und γ_{yz} sind die Ingenieur- oder Schubverzerrungen (siehe auch Abschn. 2.3).

Der Schubmodul G in Gl. 2.3 wird mittels dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl ausgedrückt

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.4)$$

Für orthotrope homogene Materialien lautet das HOOKESche Gesetz in kartesischen Koordinaten [18, 20]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{Tx} \Theta \\ \alpha_{Ty} \Theta \\ \alpha_{Tz} \Theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

worin E_x , E_y und E_z die Materialkonstanten in x -, y - und z -Richtung sind und α_{T_x} , α_{T_y} und α_{T_z} die Wärmeausdehnungskoeffizienten in die entsprechende Richtung. Außerdem sind die Querkontraktionszahlen ν_{ij} mit $i, j = x, y, z$ die negativen Verhältnisse der Querdehnung in j -Richtung zur Längsdehnung in i -Richtung [11, 14, 15, 16, 17, 18, 21]

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}}. \quad (2.6)$$

Die Inversion von Gl. 2.5 führt zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_{T_x} \Theta \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_{T_y} \Theta \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_{T_z} \Theta \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_x \frac{1 - \nu_{yz}\nu_{zy}}{\Lambda} \\ C_{22} &= E_y \frac{1 - \nu_{xz}\nu_{zx}}{\Lambda} \\ C_{33} &= E_z \frac{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}{\Lambda} \\ C_{12} &= E_x \frac{\nu_{yx} + \nu_{zx}\nu_{yz}}{\Lambda} = E_y \frac{\nu_{xy} + \nu_{xz}\nu_{zy}}{\Lambda} \\ C_{13} &= E_x \frac{\nu_{zx} + \nu_{yx}\nu_{zy}}{\Lambda} = E_z \frac{\nu_{xz} + \nu_{xy}\nu_{yz}}{\Lambda} \\ C_{23} &= E_y \frac{\nu_{zy} + \nu_{xy}\nu_{zx}}{\Lambda} = E_z \frac{\nu_{yz} + \nu_{yx}\nu_{xz}}{\Lambda} \\ C_{44} &= C_{yz} \\ C_{55} &= C_{xz} \\ C_{66} &= C_{xy} \quad \text{und} \\ \Lambda &= 1 - \nu_{xy}\nu_{yx} - \nu_{yz}\nu_{zy} - \nu_{xz}\nu_{zx} - 2\nu_{yx}\nu_{zy}\nu_{xz}. \end{aligned}$$

2.3 Kinematische Beziehungen

Die folgenden kinematischen Beziehungen wurden unter der Annahme von kleinen Verschiebungen entwickelt. Die Beziehungen zwischen den Dehnungen und Verschiebungen sind

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= 2 \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= 2 \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{xy} &= 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

worin u , v und w die Verschiebungen in x -, y - und z -Richtung, ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{zz} die Dehnungen in Normalenrichtung, ε_{xy} , ε_{xz} und ε_{yz} die tensoriellen Schubverzerrungen und γ_{xy} , γ_{xz} und γ_{yz} die Ingenieurverzerrungen sind.

Für den 2D-Fall reduzieren sich die kinematischen Beziehungen aus Gl. 2.8 und 2.9 zu

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

Im Jahr 1860 verwendete SAINT-VENANT [22] die oben eingeführten kinematischen Beziehungen, um die sogenannten Kompatibilitätsbeziehungen herzuleiten. Diese sechs Gleichungen sind voneinander unabhängig [11, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 23]

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z^2} \quad (2.13)$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

$$2 \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(+ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right). \quad (2.16)$$

Die Gleichungen Gl. 2.11 bis 2.16 geben die Beziehungen zwischen den Längsdehnungen und den Schubverzerrungen an, wobei alle sechs Gleichungen im 3D-Fall erfüllt werden müssen. Die ersten drei dieser Gleichungen geben das Gleichgewicht der Dehnungen innerhalb einer Ebene an, so z. B. ist Gl. 2.11 die Gleichgewichts- oder Kompatibilitätsbeziehung in der x,y -Ebene, Gl. 2.12 bezieht sich auf die y,z -Ebene und Gl. 2.13 bildet das Gleichgewicht in der x,z -Ebene. Die anderen drei Gl. (2.14–2.16) verknüpfen die ersten drei Kompatibilitätsbeziehungen im 3D-Raum miteinander.

Setzt man in die sechs Kompatibilitätsbeziehungen Gl. 2.11–2.16 von SAINT-VENANT [22] das Materialgesetz (Gl. 2.3) ohne die Temperaturterme ein, so erhält man den von MICHELL aus dem Jahre 1899 entwickelten Gleichungssatz [25]. Das Temperaturfeld wurde erst später im Jahre 1954 von LANGHAAR und STIPPES mit einbezogen [26]. Heutzutage werden diese sechs Beziehungen als BELTRAMI-MICHELL-Gleichungen bezeichnet [11, 15, 16, 21]

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\nu}{1-\nu} \Gamma_f - \frac{E \alpha_T}{1-\nu^2} \Gamma_1 \\ \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial y^2} &= -2 \frac{\partial f_y}{\partial y} - \frac{\nu}{1-\nu} \Gamma_f - \frac{E \alpha_T}{1-\nu^2} \Gamma_2 \\ \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial z^2} &= -2 \frac{\partial f_z}{\partial z} - \frac{\nu}{1-\nu} \Gamma_f - \frac{E \alpha_T}{1-\nu^2} \Gamma_3 \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial y \partial z} &= - \frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\alpha_T}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} \\ \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x \partial z} &= - \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\alpha_T}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} \\ \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Omega}{\partial x \partial y} &= - \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\alpha_T}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit

$$\begin{aligned} \Omega &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ \Gamma_f &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \\ \Gamma_1 &= (1+\nu) \nabla^2 \Theta + (1-\nu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\Gamma_2 = (1 + \nu) \nabla^2 \Theta + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2}$$

$$\Gamma_3 = (1 + \nu) \nabla^2 \Theta + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}$$

worin

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

der Nablaoperator ist und \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z die Basiseinheitsvektoren im kartesischen Koordinatensystem sind.

Die Gleichungen in (2.17) haben im Vergleich zu den Gl.(2.11) bis 2.16 den Nachteil, dass durch die vorhandenen Materialkonstanten das Gleichungssystem aufwendiger zu lösen ist.

Eine weitere wichtige Beziehung ist das LAMÉ-NAVIER Differentialgleichungssystem, welches mittels der drei Gleichgewichtsbeziehungen (2.1), dem HOOKEschen Gesetz (2.3) und den sechs kinematischen Beziehungen aus Gl.2.8 und 2.9 gefunden werden kann [14, 15, 16, 21, 27]

$$\begin{aligned} (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - \\ - 2(1 + \nu)\alpha_T \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} f_x = 0 \\ (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) - \\ - 2(1 + \nu)\alpha_T \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} f_y = 0 \\ (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \\ - 2(1 + \nu)\alpha_T \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{2(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E} f_z = 0. \quad (2.19) \end{aligned}$$

Es wird oft angenommen, dass dieses Gleichungssystem nicht gelöst werden kann, jedoch gibt der Abschn.4.4.1 eine Lösung dieses gekoppelten partiellen Differentialgleichungssystems an und weist noch auf weitere hin. Ein äquivalentes Gleichungssystem für den 2D-Raum wurde bereits von KAUFMANN und LORENZ gelöst [28, 29].

2.4 Eindeutigkeitssatz

Der Eindeutigkeitssatz besagt, dass es für gegebene Randbedingungen nur eine einzige Lösung in der linear elastischen Kontinuumsmechanik gibt. Der Beweis dafür kann z. B. in MUßSCHELISCHWILI [10], TIMOSHENKO und GOODIER [11], FILONENKO-BORODICH [13] oder SELVADURAI [30] nachgelesen werden.



<http://www.springer.com/978-3-658-17273-2>

3D-Spannungsanalyse von linear elastisch homogenen
Körpern

Analytische Lösungsmethoden für
kontinuumsmechanische Probleme

Hahn, M.; Jarzabek, R.D.

2017, IX, 64 S. 13 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-17273-2