

2 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel geht es um die sogenannte koprime Faktorisierung linearer Systeme. Ausgangspunkt für alle nachfolgenden Betrachtungen ist das System \mathbf{G} , welches gemäß der nachfolgenden Zustandsraumdarstellung beschrieben werden kann und als linear, zeitinvariant (eng. linear time invariant) (LTI) angenommen wird

$$\mathbf{G} : \begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

Die zentrale Idee des Faktorisierungsansatzes ist es, eine Übertragungsmatrix als Faktorisierung zweier stabiler, rationaler Übertragungsmatrizen darzustellen. Die zu faktorisierende Matrix muss dafür nicht notwendigerweise stabil sein. Diese Form der Faktorisierung wurde erstmals von Vidyasagar (1972) beschrieben und bildet seitdem unter dem Begriff der koprime Faktorisierung die Grundlage für zahlreiche Methoden zur Analyse und Synthese von Regelkreisen. Eines der zentralen, auf dieser Faktorisierung basierenden Ergebnisse stellt dabei die Parametrierung aller stabilisierenden Regler für eine gegebene Strecke dar. Diese Form der Parametrierung aller stabilisierenden Regler ist unter dem Begriff „Youla-Parametrierung“ (seltener auch „Youla-Kucera-Parametrierung“) (Youla, Jabri und Bongiorno, 1976) in die Literatur eingegangen. Darüber hinaus lassen sich in dieser Form der Faktorisierung auch bequem Modellunsicherheiten bei der Beschreibung regelungstechnischer Prozesse darstellen (McFarlane und Glover, 1990). Im Verlauf dieser Arbeit wird intensiv Gebrauch von der koprime Faktorisierung für die Berechnung und Herleitung verschiedener Ergebnisse gemacht. Daher sollen an dieser Stelle die wesentlichen Definitionen und Zusammenhänge zusammengefasst werden. Für eine umfangreiche Übersicht über das Thema wird auf Zhou, Doyle und Glover (1996), Vidyasagar (2011), Green und Limebeer (2012), McFarlane und Glover (1990) und Vinnicombe (2000) verwiesen.

2.1 Koprime Faktorisierung

Zunächst sollen die wichtigen Definitionen für die koprime Faktorisierung angegeben werden.

Definition 2.1 (Koprime Eigenschaft). Zwei Übertragungsmatrizen $\mathbf{M}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\mathbf{N}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ werden als rechtskoprime in \mathcal{RH}_∞ bezeichnet, wenn zwei Übertragungsmatrizen $\mathbf{X}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\mathbf{Y}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ existieren, sodass gilt

$$\mathbf{X}(z)\mathbf{M}(z) + \mathbf{Y}(z)\mathbf{N}(z) = \mathbf{I}. \quad (2.2)$$

Zwei Übertragungsmatrizen $\hat{\mathbf{M}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\hat{\mathbf{N}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ werden als linkskoprime in \mathcal{RH}_∞ bezeichnet, wenn zwei Übertragungsmatrizen $\hat{\mathbf{X}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\hat{\mathbf{Y}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ existieren, sodass gilt

$$\hat{\mathbf{M}}(z)\hat{\mathbf{X}}(z) + \hat{\mathbf{N}}(z)\hat{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{I}. \quad (2.3)$$

Definition 2.2 (Rechtskopprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$). Zwei Übertragungsmatrizen $\mathbf{M}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\mathbf{N}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ bilden eine rechtskopprime Faktorisierung (engl. Right Coprime Factorization) (RCF) des Systems $\mathbf{G}(z)$, wenn gilt

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}(z)\mathbf{M}(z)^{-1} \quad (2.4)$$

und $\mathbf{M}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\mathbf{N}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ rechtskoprim in \mathcal{RH}_∞ sind.

Definition 2.3 (Linkskopprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$). Zwei Übertragungsmatrizen $\mathbf{M}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\hat{\mathbf{N}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ bilden eine linkskopprime Faktorisierung (engl. Left Coprime Factorization) (LCF) des Systems $\mathbf{G}(z)$, wenn gilt

$$\mathbf{G}(z) = \hat{\mathbf{M}}(z)^{-1}\hat{\mathbf{N}}(z) \quad (2.5)$$

und $\hat{\mathbf{M}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\hat{\mathbf{N}}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ linkskoprim in \mathcal{RH}_∞ sind.

Neben der isolierten Betrachtung der links- und rechtskoprimen Faktorisierung existiert auch eine gleichzeitige, sogenannte doppelte kopprime Faktorisierung, welche im Folgenden definiert wird.

Definition 2.4 (Doppelte kopprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$). Acht Übertragungsmatrizen, welche der rechts- und linkskoprimen Faktorisierung in \mathcal{RH}_∞ genügen und gleichzeitig die sogenannte erweiterte Bezout-Identität

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \\ -\hat{\mathbf{N}}(z) & \hat{\mathbf{M}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) & -\hat{\mathbf{Y}}(z) \\ \mathbf{N}(z) & \hat{\mathbf{X}}(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) & -\hat{\mathbf{Y}}(z) \\ \mathbf{N}(z) & \hat{\mathbf{X}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \\ -\hat{\mathbf{N}}(z) & \hat{\mathbf{M}}(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

erfüllen, werden als doppelte kopprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$ bezeichnet.

Wie den Definitionen für die kopprime Faktorisierung zu entnehmen ist, ist es gerade für MIMO Systeme schwierig, anhand der Übertragungsmatrizen eine RCF bzw. LCF zu finden. Das nachfolgende Lemma 2.1 gibt daher eine direkte Beziehung zwischen den acht Faktoren der doppelten koprimen Faktorisierung und der Zustandsraumdarstellung des Systems $\mathbf{G}(z)$ an.

Lemma 2.1 (Zustandsraum-Formeln für doppelte kopprime Faktorisierung (Nett, Jacobson und Balas, 1984)). *Gegeben sei die rationale Übertragungsmatrix des Systems $\mathbf{G}(z)$ mit der Zustandsraumdarstellung gemäß Gleichung (2.1). Unter der Annahme, dass das System $\mathbf{G}(z)$ stabilisierbar und detektierbar ist, existieren die Matrizen \mathbf{F} und \mathbf{L} so, dass $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}$ und $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ Schurmatrizen sind. Dann können die acht Übertragungsmatrizen der doppelten koprimen Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$ berechnet werden gemäß*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{F}, \mathbf{I}) & \hat{\mathbf{M}}(z) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}, -\mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{I}) \\ \mathbf{N}(z) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{F}, \mathbf{D}) & \hat{\mathbf{N}}(z) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}, \mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \\ \mathbf{X}(z) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}, -(\mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{D}), \mathbf{F}, \mathbf{I}) & \hat{\mathbf{X}}(z) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}, \mathbf{L}, \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{F}, \mathbf{I}) \\ \mathbf{Y}(z) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}, -\mathbf{L}, \mathbf{F}, \mathbf{0}) & \hat{\mathbf{Y}}(z) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}, -\mathbf{L}, \mathbf{F}, \mathbf{0}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Anhand der Berechnungsvorschrift der acht Übertragungsmatrizen der doppelten koprimen Faktorisierung gemäß Lemma 2.1 ist bereits ersichtlich, dass die LCF bzw. RCF nicht eindeutig sind. In der Regel existiert mehr als eine Matrix \mathbf{F} bzw. \mathbf{L} , sodass $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ bzw. $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ Schurmatrizen sind. Dennoch gibt es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den verschiedenen koprimen Faktorisierungen, welcher in den nachfolgenden Lemmata zusammengefasst wird.

Lemma 2.2 (Eindeutigkeit der RCF (Vinnicombe, 2000)). *Gegeben sei eine beliebige RCF $\{\mathbf{M}_1(z), \mathbf{N}_1(z)\}$ der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ gemäß Definition 2.2. Jede beliebige RCF $\{\mathbf{M}_2(z), \mathbf{N}_2(z)\}$ von $\mathbf{G}(z)$ lässt sich durch Rechtsmultiplikation mit einer Übertragungsmatrix $\mathbf{Q}(z)$ gemäß*

$$\{\mathbf{M}_2(z), \mathbf{N}_2(z)\} = \{\mathbf{M}_1(z)\mathbf{Q}(z), \mathbf{N}_1(z)\mathbf{Q}(z)\} \quad (2.8)$$

darstellen, wobei sowohl $\mathbf{Q}(z)$, als auch die Inverse $\mathbf{Q}^{-1}(z)$ in \mathcal{RH}_∞ liegen.

Lemma 2.3 (Eindeutigkeit der LCF (Vinnicombe, 2000)). *Gegeben sei eine beliebige LCF $\{\hat{\mathbf{M}}_1(z), \hat{\mathbf{N}}_1(z)\}$ der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ gemäß Definition 2.3. Jede beliebige LCF $\{\hat{\mathbf{M}}_2(z), \hat{\mathbf{N}}_2(z)\}$ von $\mathbf{G}(z)$ lässt sich durch Linksmultiplikation mit einer Übertragungsmatrix $\mathbf{Q}(z)$ gemäß*

$$\{\hat{\mathbf{M}}_2(z), \hat{\mathbf{N}}_2(z)\} = \{\mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{M}}_1(z), \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{N}}_1(z)\} \quad (2.9)$$

darstellen, wobei sowohl $\mathbf{Q}(z)$, als auch die Inverse $\mathbf{Q}^{-1}(z)$ in \mathcal{RH}_∞ liegen.

Eine besondere Form der koprimen Faktorisierung ist die normalisierte koprime Faktorisierung, welche viele Berechnungen für die Synthese und die Analyse von Regelkreisen deutlich vereinfacht.

Definition 2.5 (Normalisierte koprime Faktorisierung). Eine RCF $\{\mathbf{M}(z), \mathbf{N}(z)\}$ der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ wird als normalisiert bezeichnet, wenn die folgende Bedingung erfüllt wird

$$\mathbf{M}^\sim(z)\mathbf{M}(z) + \mathbf{N}^\sim(z)\mathbf{N}(z) = \mathbf{I}. \quad (2.10)$$

Eine LCF $\{\hat{\mathbf{M}}(z), \hat{\mathbf{N}}(z)\}$ der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ wird als normalisiert bezeichnet, wenn die folgende Bedingung erfüllt wird

$$\hat{\mathbf{M}}(z)\hat{\mathbf{M}}^\sim(z) + \hat{\mathbf{N}}(z)\hat{\mathbf{N}}^\sim(z) = \mathbf{I}. \quad (2.11)$$

Die normalisierte koprime Faktorisierung ist eindeutig mit Ausnahme einer Linksmultiplikation (LCF) bzw. Rechtsmultiplikation (RCF) mit einer unitären, konstanten Matrix \mathbf{Q} . Für die Berechnung der normalisierten koprimen Faktorisierungen ist die Lösung jeweils einer Riccati-Gleichung notwendig. Eine ausführliche Berechnungsvorschrift befindet sich in Zhou, Doyle und Glover (1996) sowohl für zeitkontinuierliche, als auch für zeitdiskrete Systeme.

2.2 Stabile Image- und Kernel Representation

In diesem Abschnitt soll es um alternative Darstellungsformen des Ein- und Ausgangsverhaltens von LTI Systemen gehen. Im Allgemeinen kann das LTI System (2.1) auch als ein Operator angesehen werden, welcher den Raum der Eingangssignale \mathbf{u} abbildet auf den Raum der Ausgangssignale \mathbf{y} . Diese Betrachtungsweise erlaubt eine sehr allgemeine Beschreibung von Systemen, welche über die reine Beschreibung mittels der Übertragungsfunktion im Frequenzbereich hinausgeht. Daher ist dieser Ansatz auch für die Beschreibung von nichtlinearen Systemen und zeitvarianten Systemen sehr beliebt. Für eine ausführliche Übersicht sei z.B. auf (Van der Schaft, 2012; Feintuch, 2012; Partington, 2004; Cheremensky und Fomin, 1996) verwiesen. Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist das LTI System \mathbf{G} aus Gleichung (2.1). Das Ein- und Ausgangsverhalten kann auch über den Multiplikationsoperator

$$M_{\mathbf{G}} : \mathbf{u} \in \mathcal{X} \mapsto \mathbf{y} \in \mathcal{X} \quad (2.12)$$

in \mathcal{X} beschrieben, welcher mit dem System \mathbf{G} assoziiert wird. Dabei ist \mathcal{X} ein Platzhalter und wird für Signale im Frequenzbereich durch den Signalraum \mathcal{H}_2 bzw. für Signale im Zeitbereich durch den Signalraum $\mathcal{L}_{[0,\infty)}$ ersetzt. Die Definitionsmenge $\mathcal{D}(M_{\mathbf{G}})$ des Operators M ist dabei gegeben als

$$\mathcal{D}(M_{\mathbf{G}}) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{X} \mid \mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{u} \in \mathcal{X}\}. \quad (2.13)$$

Diese Form der Operatordefinition beinhaltet also nur die Ein- und Ausgangssignale, bei denen für ein energiebegrenztetes Eingangssignal \mathbf{u} auch ein energiebegrenztetes Ausgangssignal \mathbf{y} herauskommt. Ist das System \mathbf{G} stabil, ist der Eingangssignalraum der komplette Signalraum \mathcal{X} , andernfalls ist dieser nur eine Teilmenge von \mathcal{X} . Diese Betrachtung ist besonders für die Analyse und die Synthese von Reglern interessant, da nur der stabile Bildraum des Systems \mathbf{G} betrachtet wird.

Definition 2.6 (Stabiler Bildraum). Gegeben sei ein beliebiges LTI System \mathbf{G} , mit welchem der Multiplikationsoperator $M_{\mathbf{G}}$ mit der Definitionsmenge $\mathcal{D}(M_{\mathbf{G}})$ gemäß Gleichungen (2.12) und (2.13) assoziiert ist. Dann ist der stabile Bildraum $\text{im}(\mathbf{G})$ des Systems \mathbf{G} definiert als

$$\text{im}(\mathbf{G}) := \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{G}\mathbf{u} \end{bmatrix} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{D}(M_{\mathbf{G}}) \right\} \subseteq \mathcal{X} \oplus \mathcal{X}. \quad (2.14)$$

Somit lassen sich mit Hilfe des stabilen Bildraums die folgenden zwei Repräsentationen des Systems \mathbf{G} einführen.

Definition 2.7 (Stable Image Representation). Gegeben sei ein beliebiges LTI System \mathbf{G} mit der Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 . Als SIR des Systems \mathbf{G} wird das LTI-System $\mathcal{I} \in \mathcal{RH}_{\infty}$ mit dem Eingang \mathbf{v} bezeichnet, für welches gilt

$$\forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \text{im}(\mathbf{G}) \quad \exists \mathbf{v} \in \mathcal{X} \quad \text{sodass} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathcal{I}\mathbf{v}. \quad (2.15)$$

Definition 2.8 (Stable Kernel Representation). Gegeben sei ein beliebiges LTI System \mathbf{G} mit der Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 . Als SKR des Systems \mathbf{G} wird das LTI-System $\mathcal{K} \in \mathcal{RH}_\infty$ mit den Eingängen \mathbf{u} und \mathbf{y} bezeichnet, für welches gilt

$$\mathbf{r} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \in \text{im}(\mathbf{G}). \quad (2.16)$$

Im Falle von linearen Systemen gibt es einen direkten Zusammenhang zwischen der SKR bzw. SIR und der zuvor eingeführten koprime Faktorisierung, welcher in den beiden nachfolgenden Lemmata zusammengefasst wird.

Theorem 2.1 (Realisierung SIR). *Gegeben sei eine RCF $\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}(z)\mathbf{M}(z)^{-1}$ des LTI Systems \mathbf{G} . Dann ist*

$$\mathcal{I}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) \\ \mathbf{N}(z) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

eine Realisierung der SIR gemäß Definition 2.7 mit $\mathcal{X} = \mathcal{H}_2$.

Beweis. Für das Ein- Ausgangsverhalten des Systems \mathbf{G} gilt

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{N}(z)\mathbf{M}(z)^{-1}\mathbf{u}(z). \quad (2.18)$$

Mit der Definition $\mathbf{v}(z) = \mathbf{M}(z)^{-1}\mathbf{u}(z)$ lässt sich somit der Eingang \mathbf{u} und der Ausgang \mathbf{y} berechnen zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) \\ \mathbf{N}(z) \end{bmatrix} \mathbf{v}(z) = \mathcal{I}(z)\mathbf{v}(z). \quad (2.19)$$

Aus der Definition der RCF und der Bezout-Identität folgt, dass $\mathbf{v}(z)$ auch aus $\mathbf{u}(z)$ und $\mathbf{y}(z)$ berechnet werden kann gemäß

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) \\ \mathbf{N}(z) \end{bmatrix} \mathbf{v}(z) = \mathbf{v}(z). \quad (2.20)$$

Daraus lässt sich mathematisch folgern, dass gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} \in \text{im}(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2 \text{ und } \mathbf{X}(z), \mathbf{Y}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \rightarrow \mathbf{v}(z) \in \mathcal{H}_2. \quad (2.21)$$

Und umgekehrt gilt

$$\mathbf{v}(z) \in \mathcal{H}_2 \text{ und } \mathbf{M}(z), \mathbf{N}(z) \in \mathcal{RH}_\infty \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} \in \text{im}(\mathbf{G}). \quad (2.22)$$

Es gilt also, dass für jeden Signalvektor $\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z)^T & \mathbf{y}(z)^T \end{bmatrix}^T \in \text{im}(\mathbf{G})$ in Gleichung (2.19) ein Signal $\mathbf{v}(z) \in \mathcal{H}_2$ existiert und umgekehrt. Somit ist Gleichung (2.17) eine Realisierung der SIR gemäß Definition 2.7. \square

Theorem 2.2 (Realisierung SKR). *Gegeben sei eine LCF $\mathbf{G}(z) = \hat{\mathbf{M}}(z)^{-1}\hat{\mathbf{N}}(z)$ des LTI Systems \mathbf{G} . Dann ist*

$$\mathcal{K}(z) = [-\hat{\mathbf{N}}(z) \quad \hat{\mathbf{M}}(z)] \quad (2.23)$$

eine Realisierung der SKR gemäß Definition 2.8 mit $\mathcal{X} = \mathcal{H}_2$.

Beweis. Gemäß Theorem (2.1) kann jeder Signalvektor $[\mathbf{u}(z)^T \quad \mathbf{y}(z)^T]^T \in \text{im}(\mathbf{G})$ über die SIR ausgedrückt werden, sodass unter Ausnutzung der Bezout-Identität gilt

$$\mathbf{r}(z) = \mathcal{K}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} = \mathcal{K}(z)\mathcal{I}(z)\mathbf{v}(z) = [-\hat{\mathbf{N}}(z) \quad \hat{\mathbf{M}}(z)] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}(z) \\ \hat{\mathbf{N}}(z) \end{bmatrix} \mathbf{v}(z) = \mathbf{0}. \quad (2.24)$$

Somit ist Gleichung (2.23) eine Realisierung der SKR gemäß Definition 2.8. \square

Ähnlich wie bei der koprime Faktorisierung gibt es auch für die SKR und die SIR Bedingungen für die Normalisierung und Betrachtungen zur Eindeutigkeit der beiden Repräsentationen. Diese sind in der nachfolgenden Definition und den nachfolgenden Korollaren zusammengefasst.

Definition 2.9 (Normalisierte SKR/SIR). Die SKR $\mathcal{K}(z)$ des Systems $\mathbf{G}(z)$ wird als normalisiert bezeichnet, wenn diese coinner ist. Dies bedeutet, es muss die folgende Bedingung erfüllt werden

$$\mathcal{K}(z)\mathcal{K}^\sim(z) = \mathbf{I}. \quad (2.25)$$

Die SIR $\mathcal{I}(z)$ des Systems $\mathbf{G}(z)$ wird als normalisiert bezeichnet, wenn diese inner ist. Dies bedeutet, es muss die folgende Bedingung erfüllt werden

$$\mathcal{I}^\sim(z)\mathcal{I}(z) = \mathbf{I}. \quad (2.26)$$

Bemerkung 2.1. Zur besseren Unterscheidbarkeit wird im Folgenden in dieser Arbeit eine normalisierte SKR mit der Notation $\tilde{\mathcal{K}}(z)$ bezeichnet. Eine normalisierte SIR wird mit der Notation $\tilde{\mathcal{I}}(z)$ gekennzeichnet.

Korollar 2.1 (Normalisierungsbedingung SKR/SIR). *Die Realisierung der SKR gemäß Theorem 2.2 ist normalisiert, wenn die verwendete LCF $\{\hat{\mathbf{M}}(z), \hat{\mathbf{N}}(z)\}$ normalisiert ist. Die Realisierung der SIR gemäß Theorem 2.1 ist normalisiert, wenn die verwendete RCF $\{\hat{\mathbf{M}}(z), \hat{\mathbf{N}}(z)\}$ normalisiert ist.*

Korollar 2.2 (Eindeutigkeit der SKR). *Gegeben sei eine beliebige SKR $\mathcal{K}_1(z)$ der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ gemäß Definition 2.8. Jede beliebige SKR $\mathcal{K}_2(z)$ von $\mathbf{G}(z)$ lässt sich durch Linksmultiplikation mit einer Übertragungsmatrix $\mathbf{Q}(z)$ gemäß*

$$\mathcal{K}_2(z) = \mathbf{Q}(z)\mathcal{K}_1(z) \quad (2.27)$$

darstellen, wobei sowohl $\mathbf{Q}(z)$, als auch die Inverse $\mathbf{Q}^{-1}(z)$ in \mathcal{RH}_∞ liegen.

Korollar 2.3 (Eindeutigkeit der SIR). *Gegeben sei eine beliebige SIR $\mathcal{I}_1(z)$ der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(z)$ gemäß Definition 2.7. Jede beliebige SIR $\mathcal{I}_2(z)$ von $\mathbf{G}(z)$ lässt sich durch Rechtsmultiplikation mit einer Übertragungsmatrix $\mathbf{Q}(z)$ gemäß*

$$\mathcal{I}_2(z) = \mathcal{I}_1(z)\mathbf{Q}(z) \quad (2.28)$$

darstellen, wobei sowohl $\mathbf{Q}(z)$, als auch die Inverse $\mathbf{Q}^{-1}(z)$ in \mathcal{RH}_∞ liegen.

2.3 Regelungstechnische Interpretation der SIR und SKR

In den letzten beiden Abschnitten wurden in Form von Lemma 2.1 Berechnungsformeln für die Realisierung der RCF und LCF gegeben und der Zusammenhang zur SIR und SKR hergestellt. In diesem Abschnitt soll auf die regelungstechnische Interpretation der acht Übertragungsfunktionen der doppelten koprimen Faktorisierung im Zusammenhang mit der SKR und SIR eingegangen werden.

Ausgangspunkt für die Betrachtungen ist das System \mathbf{G} mit der Zustandsraumdarstellung (2.1). Die RCF und somit auch die SIR des Systems \mathbf{G} können physikalisch im Sinne einer Zustandsregelung interpretiert werden. Dies wird ersichtlich, wenn das Eingangssignal der Strecke gewählt wird zu $\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)$. Dabei ist \mathbf{F} die Rückführmatrix, welche garantiert, dass $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}$ eine Schurmatrix ist und $\mathbf{v}(k)$ bezeichnet eine Referenzsignal, welches den neuen Eingang des Gesamtsystems bildet. Man erhält dann die Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{v}(k) + \mathbf{F}\mathbf{x}(k)) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{v}(k) \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(\mathbf{v}(k) + \mathbf{F}\mathbf{x}(k)) = (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{F})\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{v}(k)\end{aligned}\quad (2.29)$$

Ein Vergleich mit den Zustandsraumformeln aus Lemma 2.1 offenbart direkt, dass die Übertragungsfunktion von dem Referenzsignal \mathbf{v} auf das Ein- bzw. Ausgangssignal \mathbf{u} bzw. \mathbf{y} genau der Übertragungsfunktion $\mathbf{M}(z)$ bzw. $\mathbf{N}(z)$ der RCF entspricht und damit eine mathematische Beschreibung der SIR liefert. Der stabile Ein- bzw. Ausgangssignalraum des Systems \mathbf{G} kann also durch Auslenkung des Referenzsignals einer Zustandsregelung erreicht werden. Der direkte Bezug zur Zustandsregelung macht die SIR besonders wertvoll für die Analyse und den Entwurf von Regelungsproblemen.

Die LCF und somit die SKR des Systems \mathbf{G} besitzen ebenfalls eine regelungstechnische Interpretation. Beide können als ein beobachterbasierter Residuengenerator verstanden werden. Dafür soll zunächst ein Beobachter für das System \mathbf{G} betrachtet werden

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)) \\ \hat{\mathbf{y}}(k+1) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),\end{aligned}\quad (2.30)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{y}}$ die Schätzungen der Zustandsgröße \mathbf{x} und der Ausgangsgröße \mathbf{y} des Systems \mathbf{G} bezeichnen und \mathbf{L} als Rückführmatrix so gewählt wird, dass $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ eine Schurmatrix ist. Das sogenannte Residuensignal \mathbf{r} bezeichnet die Abweichung zwischen dem tatsächlichen Ausgang \mathbf{y} des System \mathbf{G} und dem geschätzten Ausgang des Beobachters $\hat{\mathbf{y}}$. Entsprechend kann ein sogenannter Residuengenerator aufgeschrieben werden als

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B} - \mathbf{L}\mathbf{D})\mathbf{u}(k) + \mathbf{L}\mathbf{y}(k) \\ \mathbf{r}(k) &= \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)\end{aligned}\quad (2.31)$$

oder alternativ

$$\mathbf{r}(z) = \hat{\mathbf{M}}(z)\mathbf{y}(z) - \mathbf{N}(z)\mathbf{u}(z).\quad (2.32)$$

Dies zeigt den direkten Zusammenhang der LCF zu dem Residuengenerator. Für gleiche Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$ ist das Residuensignal $\mathbf{r} = 0$ und der Residuengenerator

ist somit eine SKR des Prozesses \mathbf{G} . Das Residuensignal enthält alle Informationen über unbekannte Einflüsse in dem Prozess \mathbf{G} , wie z.B. externe Störungen, Fehler und Modellsicherheiten. Einerseits kann das Residuensignal somit zur Diagnose über den Zustand des Prozesses verwendet werden, andererseits bildet das Residuensignal aber auch einen fundamentalen Bestandteil für die Regelung, da Unsicherheiten und Störungen der eigentliche Grund für die Verwendung eines Reglers sind. Auf diesen Aspekt wird in Abschnitt 2.5 nochmal eingegangen.

In ähnlicher Weise kann auch den verbliebenen vier Übertragungsfunktionen der doppelten koprimen Faktorisierung eine Interpretation gegeben werden. Betrachtet wird dafür eine beobachterbasierte Zustandsrückführung gemäß der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{Lr}(k) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k) \\ \mathbf{r}(k) + (\mathbf{C} + \mathbf{DF})\hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.33)$$

wobei \mathbf{u} und \mathbf{y} den Ein- bzw. Ausgang des beobachterbasierten Rückführreglers, $\hat{\mathbf{x}}$ die Zustandsschätzung der Strecke \mathbf{G} und \mathbf{r} das Residuensignal bezeichnet. Im Frequenzbereich ergibt sich daher

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{Y}}(z) \\ \hat{\mathbf{X}}(z) \end{bmatrix} \mathbf{r}(z).\quad (2.34)$$

Die Übertragungsfunktion $[-\hat{\mathbf{Y}}(z)^T \quad \hat{\mathbf{X}}(z)^T]^T$ kann somit als SIR eines beobachterbasierten Zustandsreglers interpretiert werden, welcher als Eingang das Residuensignal \mathbf{r} besitzt. Zuletzt wird erneut ein beobachterbasierter Zustandsregler in der Form

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{B} - \mathbf{LD})\mathbf{u} - \mathbf{Ly} \\ \mathbf{v}(k) &= \mathbf{u}(k) - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\quad (2.35)$$

betrachtet, mit den zuvor eingeführten Signalbezeichnungen. Dann ist \mathbf{v} ein Residuensignal des beobachterbasierten Zustandsreglers und

$$\mathbf{v}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix}\quad (2.36)$$

kann somit als eine SKR für den beobachterbasierten Zustandsregler interpretiert werden. In Tabelle 2.1 werden die Ergebnisse noch einmal zusammengefasst.

		ÜTF	Eingang	Ausgang	Struktur
Strecke	SIR	$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}$	\mathbf{v}	$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$	Strecke mit Zustandsregelung
	SKR	$[-\hat{\mathbf{N}} \quad \hat{\mathbf{M}}]$	$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$	\mathbf{r}	Beobachterbasierter Residuengenerator
Regler	SIR	$\begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}$	\mathbf{r}	$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$	Beobachterbasierte Zustandsrückführung
	SKR	$[\mathbf{X} \quad \mathbf{Y}]$	$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$	\mathbf{v}	Beobachterbasierte Zustandsrückführung

Tabelle 2.1: Interpretation der acht Matrizen der doppelten koprimen Faktorisierung

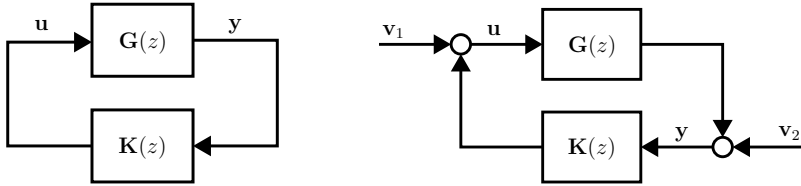
2.4 Interne Stabilität von Regelkreisen

In diesem Abschnitt soll es um die Stabilität von Regelkreisen gehen. Eine Standardkonfiguration eines solchen Regelkreises ist in Abbildung 2.1a zu sehen. Zur Erleichterung der Beschreibung wird im Folgenden die Abkürzung $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ für diese Standardkonfiguration verwendet. Dabei bezeichnet $\mathbf{G}(z)$ eine beliebige Strecke, welche in einem geschlossenen Regelkreis mit dem Regler $\mathbf{K}(z)$ verschaltet ist. Ziel der Regelung ist es, auch bei Auftreten von möglichen Unsicherheiten eine gewünschte Performanz und vor allem die Stabilität des Regelkreises sicherzustellen. Das Signal \mathbf{u} bezeichnet die Streckeneingangsgröße und das Signal \mathbf{y} den Eingang des Reglers. Eine Definition für interne Stabilität kann dann wie nachfolgend angegeben werden.

Definition 2.10 (Interne Stabilität (Zhou, Doyle und Glover, 1996)). Gegeben sei der Standardregelkreis $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ aus Abbildung 2.1b mit der Anfangsbedingung $\mathbf{x}_{\mathbf{G},0}$ der Strecke und der Anfangsbedingung $\mathbf{x}_{\mathbf{K},0}$ des Reglers. Das System $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ ist intern stabil, wenn für alle Anfangsbedingungen die Zustände $(\mathbf{x}_{\mathbf{G}}, \mathbf{x}_{\mathbf{K}})$ von Strecke und Regler gegen Null gehen für $\mathbf{v}_1 = 0$ und $\mathbf{v}_2 = 0$.

Mit Hilfe dieser allgemeinen Definition lässt sich interne Stabilität alternativ auch als eine Stabilitätsbedingung an die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ definieren. Dafür soll die Übertragungsfunktion von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 nach \mathbf{u} und \mathbf{y} in Abbildung 2.1b untersucht werden.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \\
 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} & \mathbf{K}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \\ \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{K})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} & \mathbf{I} + \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

(a) Standardregelkreis $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$

(b) Untersuchung interne Stabilität

Abbildung 2.1: Regelkreisfigurationen

Sind alle vier Übertragungsfunktionen stabil, so führt ein begrenztes Signal \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 zu begrenzten Signalen \mathbf{u} und \mathbf{y} . Damit lässt sich das folgende Lemma formulieren.

Lemma 2.4 ((Zhou, Doyle und Glover, 1996)). *Der Standardregelkreis $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ ist genau dann (intern) stabil, wenn die Übertragungsmatrix*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{G} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} & (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} & \mathbf{I} + \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

von $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ nach (\mathbf{u}, \mathbf{y}) in \mathcal{RH}_∞ liegt.

Korollar 2.4. *Der Standardregelkreis $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ ist genau dann (intern) stabil, wenn die Übertragungsmatrix*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G})^{-1} [\mathbf{I} \ \mathbf{K}] \quad (2.39)$$

in \mathcal{RH}_∞ liegt.

Das Konzept der internen Stabilität ist von großer praktischer Bedeutung. In realen Prozessen lässt es sich praktisch oft nicht verhindern, dass Regler oder Strecke mit Anfangsbedingungen ungleich Null starten und kleinen Fehlern in den Signalen für Mess- und Stellgrößen unterliegen. Würden solche Abweichungen zu unendlich großen Signalen innerhalb des Regelkreises führen, dann wäre das in einem realen industriellen Prozess, wie z.B. einer Chemieanlage, nicht tolerierbar.

2.5 Youla-Parametrierung aller stabilisierenden Regler

In diesem Abschnitt geht es um die sogenannte Youla-Parametrierung aller stabilisierenden Regler. Die Idee hinter dieser Parametrierung ist es, für eine gegebene Strecke $\mathbf{G}(z)$, wie in (2.1) gegeben, eine Beschreibungsform für alle Regler $\mathbf{K}(z)$ zu finden, welche diese Strecke intern stabilisieren. Das nachfolgende Theorem fasst die wichtigen Ergebnisse zusammen.

Theorem 2.3 (Youla-Parametrierung (Youla, Jabri und Bongiorno, 1976)). *Gegeben sei die doppelte koprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$ als*

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}(z)\mathbf{M}^{-1}(z) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(z)\hat{\mathbf{N}}(z) \quad (2.40)$$

welche die Bezout-Identität

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \\ -\hat{\mathbf{N}}(z) & \hat{\mathbf{M}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) & -\hat{\mathbf{Y}}(z) \\ \mathbf{N}(z) & \hat{\mathbf{X}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

erfüllt. Alle reellen, properen Regler $\mathbf{K}(z)$, welche den Standardregelkreis $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ intern stabilisieren, können dann durch geeignete Wahl des stabilen Youla-Parameters $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ parametrisiert werden gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z) &= - \left(\hat{\mathbf{Y}}(z) + \mathbf{M}(z)\mathbf{Q}(z) \right) \left(\hat{\mathbf{X}}(z) - \mathbf{N}(z)\mathbf{Q}(z) \right)^{-1} \\ &= - \left(\mathbf{X}(z) - \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{N}}(z) \right)^{-1} \left(\mathbf{Y}(z) + \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{M}}(z) \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Diese Form der Beschreibung ist für viele regelungstechnische Probleme von großer Bedeutung. Da über den Parameter $\mathbf{Q}(z)$ alle stabilisierenden Regler für das System erreicht werden können, ist es z.B. möglich, durch entsprechende Optimierung über $\mathbf{Q}(z)$ den Regler zu wählen, welcher die besten Eigenschaften zur Erfüllung eines gegebenen Regelproblems besitzt (siehe z.B. Boyd und Barratt (1991)). Die etwas abstrakte Form der Regler Realisierung in Gleichung (2.42) kann auch gemäß dem nachfolgenden Theorem anders interpretiert werden.

Theorem 2.4 (Beobachterbasierte Realisierung der Youla Parametrierung (Ding u. a., 2010)). *Gegeben sei die doppelte koprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$ gemäß*

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}(z)\mathbf{M}^{-1}(z) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(z)\hat{\mathbf{N}}(z). \quad (2.43)$$

Jeder Regler, welche die Strecke $\mathbf{G}(z)$ im Standardregelkreis $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ intern stabilisiert, kann als beobachterbasierter Zustandsrückführregler

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(z) + \mathbf{R}(z)(\mathbf{y}(z) - \hat{\mathbf{y}}(z)) \quad (2.44)$$

mit Hilfe des Parameters $\mathbf{R}(z) = -\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ parametrisiert werden.

Beweis. Gemäß Theorem 2.3 lässt sich jeder intern stabilisierende Regler $\mathbf{K}(z)$ für $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ schreiben als

$$\mathbf{K}(z) = - \left(\mathbf{X}(z) - \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{N}}(z) \right)^{-1} \left(\mathbf{Y}(z) + \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{M}}(z) \right). \quad (2.45)$$

Daraus ergibt sich äquivalent

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{X}(z) - \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{N}}(z) \right) \mathbf{u}(z) &= - \left(\mathbf{Y}(z) + \mathbf{Q}(z)\hat{\mathbf{M}}(z) \right) \mathbf{y}(z) \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} &= \mathbf{R}(z) \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{N}}(z) & \hat{\mathbf{M}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z) \\ \mathbf{y}(z) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \mathbf{u}(z) - \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(z) &= \mathbf{R}(z)\mathbf{r}(z) = \mathbf{R}(z)(\mathbf{y}(z) - \hat{\mathbf{y}}(z)). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dabei wurden im letzten Schritt die Zustandsraumformeln aus Lemma 2.1 verwendet. Es ist zu bemerken, dass $\mathbf{X}(z)$ und $\mathbf{Y}(z)$ eine SKR für einen beobachterbasierten Zustandsrückführregler bilden, wohingegen $\hat{\mathbf{M}}(z)$ und $\hat{\mathbf{N}}(z)$ eine SKR für die Strecke darstellen. \square

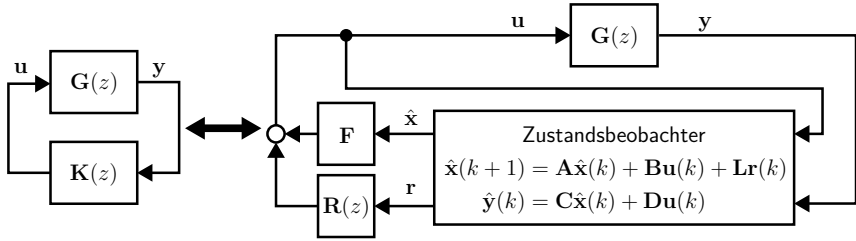


Abbildung 2.2: Beobachterbasierte Realisierung der Youla Parametrierung

Der Zusammenhang zwischen jedem stabilisierenden, dynamischen Ausgangsregler und der beobachterbasierten Realisierung der Youla-Parametrierung ist anschaulich in Abbildung 2.2 abgebildet. Diese Form der Reglerrealisierung in der Beobachterstruktur hat den Vorteil, dass nur stabile Übertragungsfunktionen verwendet werden, im Gegensatz zur direkten Implementierung z.B. eines PI-Reglers. Auf die Struktur wird in Abschnitt 4.2 noch genauer eingegangen. Soll ein vorhandener Regler in der beobachterbasierten Regelungsstruktur implementiert werden, so gibt das nachfolgende Lemma eine Berechnungsvorschrift für den entsprechenden Youla-Parameter an.

Lemma 2.5 (Youla-Parameter für gegeben Regler). *Gegeben sei eine LCF bzw. RCF des Reglers $\mathbf{K}(z)$ gemäß*

$$\mathbf{K}(z) = \hat{\mathbf{V}}(z)^{-1} \hat{\mathbf{U}}(z) = \mathbf{U}(z) \mathbf{V}(z)^{-1} \quad (2.47)$$

und die doppelte koprime Faktorisierung von $\mathbf{G}(z)$ als

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}(z) \mathbf{M}^{-1}(z) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(z) \hat{\mathbf{N}}(z) \quad (2.48)$$

welche die Bezout-Identität

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(z) & \mathbf{Y}(z) \\ -\hat{\mathbf{N}}(z) & \hat{\mathbf{M}}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}(z) & -\hat{\mathbf{Y}}(z) \\ \mathbf{N}(z) & \hat{\mathbf{X}}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

erfüllt. Wenn der Regler das System $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ intern stabilisiert, dann lässt sich der Youla-Parameter $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ aus Theorem 2.3 berechnen als

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(z) &= -(\mathbf{X}(z) \mathbf{U}(z) + \mathbf{Y}(z) \mathbf{V}(z)) \left(\hat{\mathbf{M}}(z) \mathbf{V}(z) - \hat{\mathbf{N}}(z) \mathbf{U}(z) \right)^{-1} \\ &= -\left(\hat{\mathbf{V}}(z) \mathbf{M}(z) - \hat{\mathbf{U}}(z) \mathbf{N}(z) \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{V}}(z) \hat{\mathbf{Y}}(z) + \hat{\mathbf{U}}(z) \hat{\mathbf{X}}(z) \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Beweis. Das Ergebnis (2.50) ergibt sich durch direktes Gleichsetzen der Gleichungen (2.47) und (2.42) und einfache algebraische Umformungen. Daher wird auf einen ausführlichen Beweis verzichtet. Um zu zeigen, dass $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$ kann zunächst folgende Überlegung mit $\mathbf{G}(z) = \mathbf{N}(z) \mathbf{M}(z)^{-1}$ und $\mathbf{K}(z) = \hat{\mathbf{V}}(z)^{-1} \hat{\mathbf{U}}(z)$ angestellt werden

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{G})^{-1} [\mathbf{I} \quad \mathbf{K}] &\in \mathcal{RH}_\infty \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \left(\hat{\mathbf{V}} \mathbf{M} - \hat{\mathbf{U}} \mathbf{N} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty \\ &\Leftrightarrow \left(\hat{\mathbf{V}} \mathbf{M} - \hat{\mathbf{U}} \mathbf{N} \right)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \end{aligned} \quad (2.51)$$

Da angenommen wurde, dass der Regler $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ intern stabilisiert, gilt somit gemäß Korollar 2.4, dass $(\hat{\mathbf{V}}\mathbf{M} - \hat{\mathbf{U}}\mathbf{N})^{-1} \mathcal{RH}_\infty$. Da $\mathbf{Q}(z)$ somit nur aus stabilen Übertragungsfunktionen besteht, gilt somit $\mathbf{Q}(z) \in \mathcal{RH}_\infty$. In ähnlicher Weise lässt sich dies auch für die RCF des Reglers zeigen. \square

2.6 Unsicherheiten in den koprimen Faktoren

Ein wichtiges Konzept im Bereich der Regelung ist das Konzept der Modellunsicherheiten, auf welches in diesem Abschnitt kurz eingegangen werden soll. Für eine umfangreiche Übersicht wird auf die Literatur verwiesen (Skogestad und Postlethwaite, 2007; Vinnicombe, 2000; Levine, 2010). Ein mathematisches Modell eines Prozesses ist in der Regel nur eine vereinfachte Darstellung der realen, physikalischen Zusammenhänge in Form von z.B. Differentialgleichungen. Dies bedeutet, dass es zwischen dem realen Prozess und dessen Modellbeschreibung so gut wie immer Abweichungen gibt. Diese Abweichungen werden im Allgemeinen als Modellunsicherheiten bezeichnet, welche bei Analyse und Entwurf von Regelkreisen berücksichtigt werden sollten. Dies ist allerdings nur sinnvoll möglich, wenn Angaben über die Art und vor allem auch über die „Größe“ der Modellunsicherheiten gemacht werden. In diesem Zusammenhang werden in der Literatur generell die sogenannten strukturierten von den unstrukturierten Modellunsicherheiten unterschieden. Bei den strukturierten Unsicherheiten wird, wie der Name schon andeutet, eine Struktur für die Fehler angenommen, was in der Regel eine genauere Beschreibung der Unsicherheit erlaubt, als im unstrukturierten Fall. Ein Beispiel für strukturierte Unsicherheiten sind parametrische Unsicherheiten. Diese treten häufig in realen System auf, in denen die physikalischen Zusammenhänge zwar gut bekannt sind, aber die Parameter (z.B. mechanische Reibungskoeffizienten, Federkonstanten, Wärmekoeffizienten etc.) nur in bestimmten, unsicheren Intervallen bekannt sind. Eine wesentlich allgemeinere Beschreibung von Unsicherheiten erlauben die unstrukturierten Unsicherheiten, welche in der Regel die Abbildung einer nicht modellierten Dynamik zwischen Modell und Realität erlauben. Beispiele hierfür sind additive und multiplikative Unsicherheiten, sowie Unsicherheiten in den koprimen Faktoren. In dieser Arbeit werden vor allem die Unsicherheiten in den koprimen Faktoren betrachtet, da diese eine sehr allgemeine Beschreibungsform von Unsicherheiten darstellen (McFarlane und Glover, 1990). Die beiden nachfolgenden Definition führen diese Art der Unsicherheitsbeschreibung ein.

Definition 2.11 (Unsicherheit in den koprimen Faktoren). Gegeben sei die LCF der Strecke \mathbf{G} in Gleichung (2.1). Dann beschreiben $\Delta_{\hat{\mathbf{M}}} \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\Delta_{\hat{\mathbf{N}}} \in \mathcal{RH}_\infty$ eine unsichere Strecke \mathbf{G}_Δ gemäß

$$\mathbf{G}_\Delta(z) = \left(\hat{\mathbf{M}}(z) + \Delta_{\hat{\mathbf{M}}}(z) \right)^{-1} \left(\hat{\mathbf{N}}(z) + \Delta_{\hat{\mathbf{N}}}(z) \right). \quad (2.52)$$

Gegeben sei die RCF der Strecke \mathbf{G} in Gleichung (2.1). Dann beschreiben $\Delta_{\mathbf{M}} \in \mathcal{RH}_\infty$ und $\Delta_{\mathbf{N}} \in \mathcal{RH}_\infty$ eine unsichere Strecke \mathbf{G}_Δ gemäß

$$\mathbf{G}_\Delta(z) = (\mathbf{N}(z) + \Delta_{\mathbf{N}}(z)) (\mathbf{M}(z) + \Delta_{\mathbf{M}}(z))^{-1}. \quad (2.53)$$

Beide Formen der Unsicherheiten sind für den Standardregelkreis nochmal in Abbildung 2.3 dargestellt.

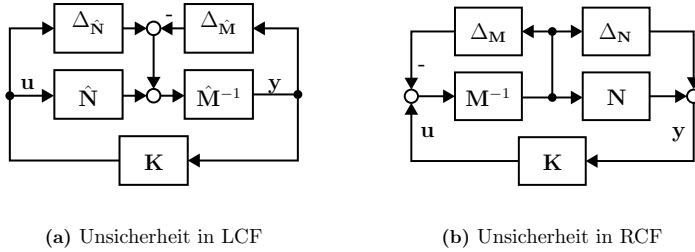


Abbildung 2.3: Standardregelkreis mit Unsicherheiten in den koprime Faktoren

In der Regel gilt es für eine Menge an unsicheren Strecken, welche z.B. durch eine Normbegrenzung der koprime Unsicherheiten Δ beschrieben werden kann, sowohl Stabilität, als auch Regelgüte zu gewährleisten. Die Hoffnung dabei ist, dass die tatsächliche Strecke in dieser Menge enthalten ist. Dieser Aspekt wird in der Literatur unter dem Gesichtspunkt der robusten Regelung behandelt.