
2.1 Einführende Bemerkungen

Ein Balken ist als langer prismatischer Körper, der schematisch in Abb. 2.1 dargestellt ist, definiert. Die folgenden Ableitungen unterliegen hierbei einigen Vereinfachungen:

- ausschließliche Betrachtung von geraden Balken,
- keine Verlängerung entlang der x -Achse,
- keine Torsion um die x -Achse,
- Verformung in einer einzigen Ebene, d. h. symmetrische Biegung,
- kleine Verformungen,
- einfache Querschnitte.

Als äußere Lasten, die in diesem Kapitel behandelt werden, kommen Einzelkräfte F_z , Einzelmomente M_y , Streckenlasten $q_z(x)$ und Streckenmomente $m_y(x)$ in Frage. Die Lasten haben hierbei gemeinsam, dass die Wirkungslinie einer Kraft oder die Richtung eines Momentenvektors senkrecht auf der Längsachse des Balkens stehen.

Grundsätzlich unterscheidet man in der Balkenstatik schubstarre und schubweiche Modelle. Der klassische, schubstarre Balken, auch EULER-BERNOULLI-Balken genannt, vernachlässigt die Schubverformung aus der Querkraft. Bei dieser Modellierung geht man davon aus, dass ein Querschnitt, der vor der Verformung senkrecht zur Balkenachse stand, auch noch nach der Verformung senkrecht auf der Balkenachse steht, vgl. Abb. 2.2a. Weiterhin wird angenommen, dass ein ursprünglich ebener Querschnitt bei der Verformung eben und unverwölbt bleibt. Diese beiden Annahmen werden auch als BERNOULLI-Hypothese bezeichnet. Insgesamt denkt

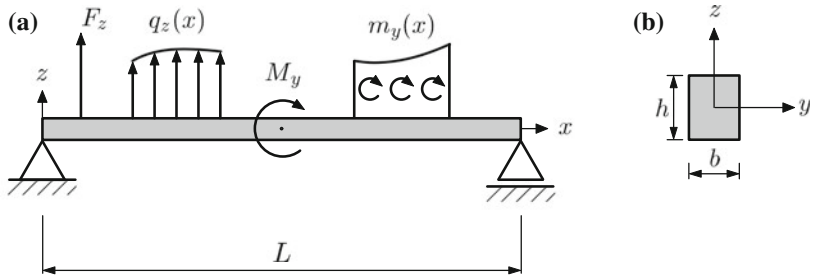


Abb. 2.1 Allgemeine Konfiguration eines Balkenproblems: **a** Beispiel von Randbedingungen und äußeren Lasten; **b** Querschnittsfläche

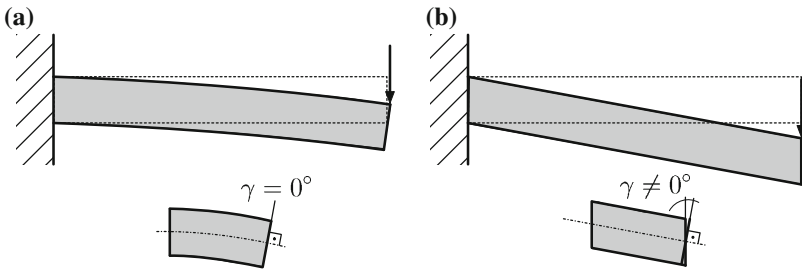


Abb. 2.2 Unterschiedliche Verformung eines Biegebalkens: **a** Schubstarr; **b** Schubverformt. Modifiziert nach (Hartmann und Katz 2007)

man sich die Querschnitte an die Balkenlängsachse (neutrale Faser) angeheftet, so dass eine Veränderung der Längsachse die gesamte Deformation bestimmt. Somit wird auch angenommen, dass sich die geometrischen Abmessungen der Querschnitte (z. B. die Breite und Höhe bei einem Rechteckquerschnitt) nicht ändern. Bei einem schubweichen Balken, z. B. nach der Theorie von TIMOSHENKO, berücksichtigt man neben der Biegeverformung auch die Schubverformung, und die Querschnitte werden um einen Winkel γ gegenüber der Senkrechten verdreht, vgl. Abb. 2.2b. Im Allgemeinen wird für Balken, deren Länge 10 bis 20 mal größer ist als eine charakteristische Abmessung des Querschnitts, der Schubanteil an der Verformung in erster Näherung vernachlässigt.

Die unterschiedlichen Belastungsarten, das heißt reine Biegemomentenbelastung oder Schub in Folge von Querkraft, führen auch zu unterschiedlichen Spannungsanteilen in einem Biegebalken. Auf Grund der reinen Biegemomentenbelastung ergibt sich nur eine Beanspruchung durch Normalkräfte, die linear über den

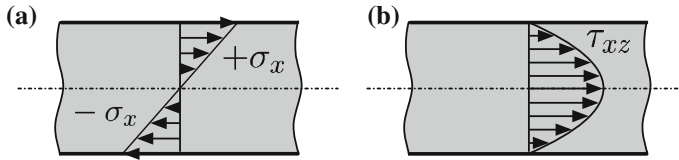


Abb. 2.3 Unterschiedliche Spannungsverteilung beim Biegebalken am Beispiel eines Rechteckquerschnitts für linear-elastisches Materialverhalten: **a** Normalspannung; **b** Schubspannung

Querschnitt ansteigen. Somit ergibt sich ein Zug- bzw. Druckmaximum auf der Ober- bzw. Unterseite des Balkens, vgl. Abb. 2.3a. Bei symmetrischen Querschnitten ergibt sich der Nulldurchgang (neutrale Faser) in der Mitte des Querschnitts. Die Querkraft resultiert in einer Schubspannung, die zum Beispiel bei einem Rechteckquerschnitt einen parabolischen Verlauf aufweist und an den Balkenrändern gleich Null ist, vgl. Abb. 2.3b.

Die unterschiedliche Berücksichtigung der Schubspannung auf die Balkenverformung führt auf die unterschiedlichen Balkentheorien. Nach der Theorie von EULER-BERNOULLI wird der Einfluss der Schubspannung auf die Verformung vernachlässigt. Nach der Theorie von TIMOSHENKO (vgl. Kap. 3) wird der Einfluss der Schubspannung auf die Verformung berücksichtigt, jedoch wird der parabolische Schubspannungsverlauf nach Abb. 2.3b durch einen konstanten Wert approximiert. Höhere Balkentheorien (vgl. Kap. 4) berücksichtigen dann einen realistischen Schubspannungsverlauf bei der Verformungsberechnung.

2.2 Grundgleichungen

2.2.1 Kinematik

Zur Ableitung der kinematischen Beziehungen wird ein Balken der Länge L unter konstanter Momentenbelastung $M_y(x) = \text{konstant}$, d. h. *reiner* Biegung, betrachtet, vgl. Abb. 2.4. Die beiden äußeren Einzelmomente am linken und rechten Balkenrand führen, bei der eingezeichneten Orientierung, zu einem positiven Biegemomentenverlauf M_y im Balken. Die x -Achse wird entlang der Balkenlängsrichtung gewählt. Als zweite Koordinate führen wir die z -Achse nach oben gerichtet ein. Mittels der z -Koordinate soll die vertikale Lage eines Punktes in Bezug auf die Balkenmittellinie *ohne Einwirkung* einer äußeren Last beschrieben werden. Die vertikale *Verschiebung* eines Punktes auf der Balkenmittellinie, d. h. für einen Punkt mit $z = 0$, unter

Einwirkung der äußeren Belastung wird mit u_z angegeben. Die Summe dieser Punkte mit $z = 0$ repräsentiert die verformte Mittellinie und wird als Biegelinie $u_z(x)$ bezeichnet.

Im Folgenden wird nur die Mittellinie des verformten Balkens betrachtet. Mittels der Beziehung für einen beliebigen Punkt (x, u_z) auf einem Kreis mit Radius R um den Mittelpunkt (x_0, z_0) , d. h.

$$(x - x_0)^2 + (u_z(x) - z_0)^2 = R^2, \quad (2.1)$$

können durch ein- und zweimaliges Differenzieren Beziehungen für den horizontalen und vertikalen Abstand eines beliebigen Kreispunktes zum Kreismittelpunkt abgeleitet werden. Beachtet man weiterhin, dass es sich bei der in Abb. 2.4

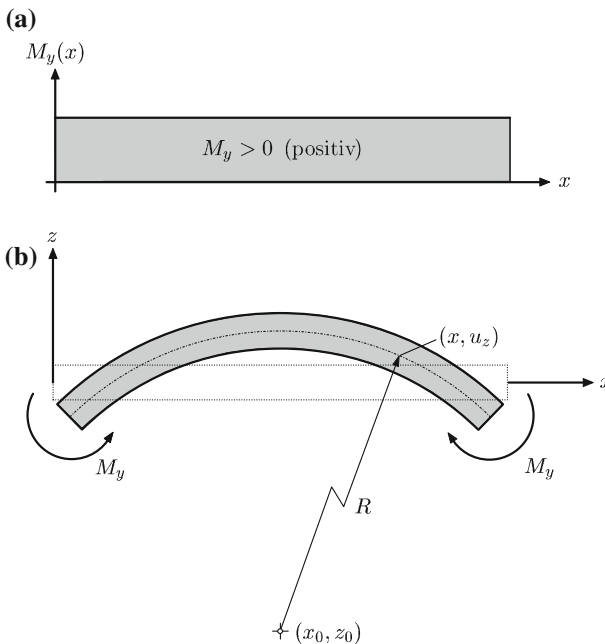


Abb. 2.4 Biegebalken unter reiner Biegung: **a** Momentenverlauf; **b** verformter Balken. Man beachte, dass die Verformung überzeichnet dargestellt ist: Für die in diesem Kapitel betrachteten Verformungen gilt, dass $R \gg L$ ist

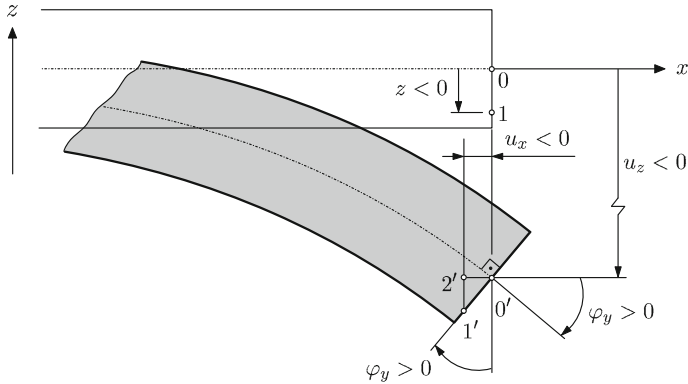


Abb. 2.5 Zur Ableitung der Kinematik beim EULER-BERNOULLI-Balken. Man beachte, dass die Verformung überzeichnet dargestellt ist

dargestellten Kreiskonfiguration um eine ‚Rechtskurve‘ ($\frac{d^2 u_z}{dx^2} < 0$) handelt, ergibt sich der Krümmungsradius R zu:

$$R = - \frac{\left(1 + \left(\frac{du_z}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}}{\frac{d^2 u_z}{dx^2}}. \quad (2.2)$$

Man beachte, dass man auch die Bezeichnung Krümmung verwendet, die sich als Kehrwert aus dem Krümmungsradius ergibt: $\kappa = \frac{1}{R}$. Für kleine Durchbiegungen, d. h. $u_z \ll L$, ergibt sich $\frac{du_z}{dx} \ll 1$ und Gl. (2.2) vereinfacht sich zu:

$$R = - \frac{1}{\frac{d^2 u_z}{dx^2}} \quad \text{oder} \quad \kappa = \frac{1}{R} = - \frac{d^2 u_z}{dx^2}. \quad (2.3)$$

Zur Ableitung der kinematischen Beziehung betrachtet man Abb. 2.5. Aus der Beziehung für das rechtwinklige Dreieck $0'1'2'$, das heißt $\sin \varphi_y = \frac{u_x}{z}$, ergibt sich¹ für kleine Winkel ($\sin \varphi_y \approx \varphi_y$):

¹Man beachte, dass nach Voraussetzung beim EULER-BERNOULLI-Balken die Länge 01 und $0'1'$ unverändert bleibt.

$$u_x = +z\varphi_y. \quad (2.4)$$

Weiterhin gilt, dass für kleine Winkel der Rotationswinkel der Steigung der Mittellinie entspricht:

$$\tan \varphi_y = \frac{-du_z(x)}{dx} \approx \varphi_y. \quad (2.5)$$

Fasst man Gl. (2.5) und (2.4) zusammen, ergibt sich

$$u_x = -z \frac{du_z(x)}{dx}. \quad (2.6)$$

Differenzieren der letzten Gleichung nach der x -Koordinate ergibt die kinematische Beziehung zu:

$$\varepsilon_x(x, y) = z \frac{1}{R} = z\kappa \stackrel{(2.3)}{=} -z \frac{d^2u_z(x)}{dx^2} \stackrel{\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx}}{=} z \frac{d\varphi_y(x)}{dx}. \quad (2.7)$$

2.2.2 Stoffgesetz

Das eindimensionale HOOKEsche Gesetz kann im Falle des Biegebalkens angesetzt werden, da nach Voraussetzung nur Normalspannungen in diesem Kapitel betrachtet werden:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (2.8)$$

Mittels der kinematischen Beziehung nach Gl. (2.7) ergibt sich die Spannung als Funktion der Durchbiegung zu:

$$\sigma_x(x, z) = -Ez \frac{d^2u_z(x)}{dx^2}. \quad (2.9)$$

Der in Abb. 2.6a dargestellte Spannungsverlauf erzeugt das an dieser Stelle wirkende Schnittmoment. Zur Berechnung der Momentenwirkung wird die Spannung mit einer Fläche multipliziert, so dass sich die resultierende Kraft ergibt. Multiplikation mit dem entsprechenden Hebelarm liefert dann das Schnittmoment:

$$M_y = \int_A z\sigma_x dA \stackrel{(2.9)}{=} - \int_A zEz \frac{d^2u_z(x)}{dx^2} dA. \quad (2.10)$$

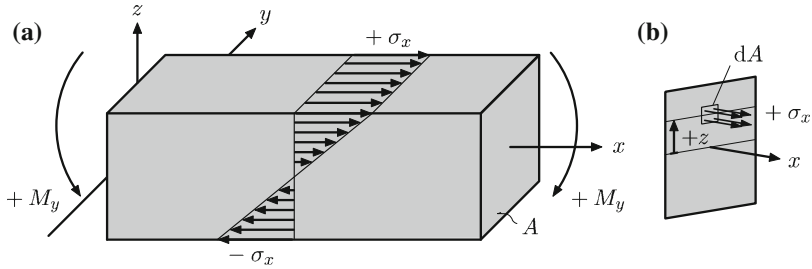


Abb. 2.6 a Schematische Darstellung der Normalspannungsverteilung $\sigma_x = \sigma_x(z)$ eines Biegebalkens; b Definition und Lage eines infinitesimalen Flächenelements zur Ableitung der resultierenden Momentenwirkung der Normalspannungsverteilung

Unter der Annahme, dass der Elastizitätsmodul konstant ist, ergibt sich das Schnittmoment um die y -Achse zu:

$$M_y = -E \frac{d^2 u_z}{dx^2} \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_y} = -EI_y \frac{d^2 u_z}{dx^2} = \frac{I_y \sigma_z}{z} \stackrel{(2.3)}{=} EI_y \kappa. \quad (2.11)$$

Bei dem Integral in Gl. (2.11) handelt es sich um das sog. axiale Flächenträgheitsmoment oder axiale Flächenmoment 2. Grades in der SI-Einheit m^4 . Diese Größe hängt nur von der Geometrie des Querschnitts ab und ist ein Maß für die Steifigkeit eines ebenen Querschnitts gegen Biegung. Tabellierte Werte für I_y können (Grote und Feldhusen 2014) entnommen werden. Das Produkt EI_y in Gl. (2.11) wird auch als Biegesteifigkeit bezeichnet. Verwendet man das Ergebnis von Gl. (2.11) in der Beziehung für die Biegespannung nach Gl. (2.9), so ergibt sich der Spannungsverlauf über den Querschnitt zu:

$$\sigma_x(x, z) = + \frac{M_y(x)}{I_y} z(x). \quad (2.12)$$

Abschließend sei hier noch angemerkt, dass das HOOKEsche Gesetz nach Gl. (2.8) nicht so einfach auf einen Balken angewendet werden kann, da Spannung und Dehnung linear über den Querschnitt verteilt sind, siehe Gl. (2.12) und Abb. 2.6. Es mag daher zweckmäßiger sein, die Schnittgröße oder die sog. verallgemeinerte Spannung $M_y(x)$ nach Gl. (2.10) und die Krümmung $\kappa_y(x)$ nach Gl. (2.7) als verallgemeinerte Dehnung zu verwenden. Somit kann ein verallgemeinertes Stoffgesetz, das über der gesamten Balkenhöhe gültig ist, formuliert werden, siehe Abb. 2.7.

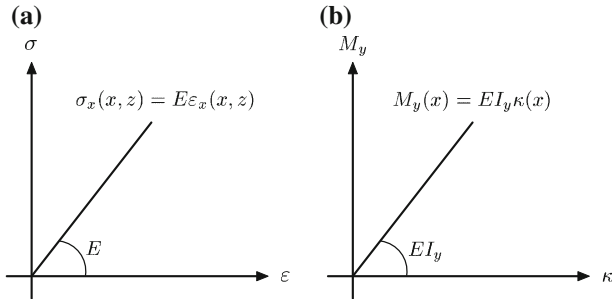


Abb. 2.7 Formulierung des Stoffgesetzes mittels **a** Spannung und **b** Schnittgröße (verallgemeinerte Spannung)

2.2.3 Gleichgewicht

Die Gleichgewichtsbedingungen werden an einem infinitesimalen Balkenelement der Länge dx abgeleitet, das durch eine konstante Streckenlast q_z belastet ist, vgl. Abb. 2.8. An beiden Schnittufern, d. h. an der Stelle x und $x + dx$, sind die Schnittreaktionen in ihrer positiven Richtung eingezeichnet.

Im Folgenden wird das Gleichgewicht hinsichtlich der vertikalen Kräfte betrachtet. Unter der Annahme, dass Kräfte in Richtung der positiven z -Achse positiv anzusetzen sind, ergibt sich:

$$-Q_z(x) + Q_z(x + dx) + q_z dx = 0. \quad (2.13)$$

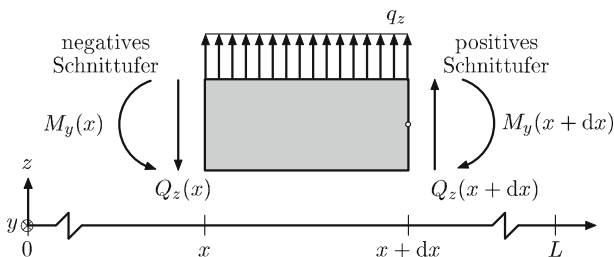


Abb. 2.8 Infinitesimales Balkenelement mit Schnittreaktionen und Belastung durch konstanter Streckenlast bei Verformung in der x - z -Ebene

Entwickelt man die Querkraft am rechten Schnittufer in eine TAYLORSche Reihe erster Ordnung, ergibt sich Gl. (2.13) zu:

$$\frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z. \quad (2.14)$$

Das Momentengleichgewicht um den Bezugspunkt an der Stelle $x + dx$ liefert:

$$M_y(x + dx) - M_y(x) - Q_z(x)dx + \frac{1}{2}q_z dx^2 = 0. \quad (2.15)$$

Entwickelt man das Biegemoment am rechten Schnittufer in eine TAYLORSche Reihe erster Ordnung und berücksichtigt, dass der Term $\frac{1}{2}q_z dx^2$ als unendlich kleine Größe höherer Ordnung vernachlässigt werden kann, ergibt sich schließlich:

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x). \quad (2.16)$$

Kombination von Gl. (2.14) und (2.16) ergibt die Beziehung zwischen Biegemoment und Streckenlast zu:

$$\frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x). \quad (2.17)$$

2.3 Differenzialgleichung der Biegelinie

Zweimalige Differenziation von Gl. (2.11) und Berücksichtigung der Beziehung zwischen Biegemoment und Streckenlast nach Gl. (2.17) führt auf die klassische Form der Differenzialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 u_z}{dx^2} \right) = q_z, \quad (2.18)$$

die auch als Biegelinie-Streckenlast-Beziehung bezeichnet wird. Bei einer entlang der Stabachse unveränderlichen Biegesteifigkeit EI_y folgt hieraus:

$$EI_y \frac{d^4 u_z}{dx^4} = q_z. \quad (2.19)$$


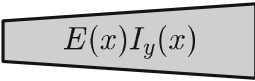
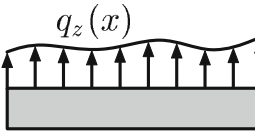
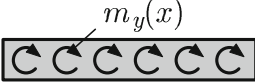
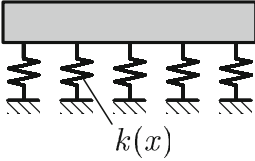
Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (2.19), d. h. für konstante Biegesteifigkeit EI_y und zusätzlich konstanter Streckenlast q_z , erhält man durch Integration zu:

$$u_z(x) = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{q_z x^4}{24} + \frac{c_1 x^3}{6} + \frac{c_2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right), \quad (2.20)$$

$$\varphi_y(x) = -\frac{1}{EI_y} \left(\frac{q_z x^3}{6} + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right), \quad (2.21)$$

$$M_y(x) = -\frac{q_z x^2}{2} - c_1 x - c_2, \quad (2.22)$$

Tab. 2.1 Verschiedene Formulierungen der partiellen Differenzialgleichung für einen EULER-BERNOULLI-Balken bei Biegung in der x - z -Ebene (positive x -Achse nach rechts zeigend; positive z -Achse aufwärts gerichtet)

Konfiguration	Differenzialgleichung
	$EI_y \frac{d^4 u_z}{dx^4} = 0$
	$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I_y(x) \frac{d^2 u_z}{dx^2} \right) = 0$
	$EI_y \frac{d^4 u_z}{dx^4} = q_z(x)$
	$EI_y \frac{d^4 u_z}{dx^4} = \frac{dm_y(x)}{dx}$
	$EI_y \frac{d^4 u_z}{dx^4} = -k(x)u_z$

Tab. 2.2 Elementare Grundgleichungen für einen EULER-BERNOULLI-Balken bei Biegung in der x - z -Ebene. Die Differenzialgleichungen sind unter der Annahme konstanter Biegesteifigkeit EI_y angegeben

Name	Gleichung
Kinematik	$\varepsilon_x(x, z) = -z \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2}$
Stoffgesetz	$\sigma_x(x, z) = E \varepsilon_x(x, z)$
	$M_y(x) = EI_y \kappa_y(x)$
Gleichgewicht	$\frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x); \frac{dM_y(x)}{dx} = Q_z(x)$
Spannung	$\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z(x)$
Diff' gleichung	$EI_y \frac{d^2 u_z(x)}{dx^2} = -M_y(x)$
	$EI_y \frac{d^3 u_z(x)}{dx^3} = -Q_z(x)$
	$EI_y \frac{d^4 u_z(x)}{dx^4} = q_z(x)$

$$Q_z(x) = -q_z x - c_1, \quad (2.23)$$

wobei auch die Beziehungen für die Verdrehung, das Biegemoment und die Querkraft in allgemeiner Form angegeben wurden. Durch die Berücksichtigung von vier Randbedingungen kann diese allgemeine Lösung durch Bestimmung der Integrationskonstanten c_1, \dots, c_4 an spezielle Probleme angepasst werden, siehe (Öchsner 2014).

In Abhängigkeit von der speziellen Problemstellung, d. h. für verschiedene Geometrien oder Last- bzw. Lagerfälle, kann die Lösung des Problems auch von einer anderen Formulierung der Differenzialgleichung erfolgen, siehe Tab. 2.1.

Abschließend sind in Tab. 2.2 die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen und verschiedene Formulierungen der Differenzialgleichung für konstante Biegesteifigkeit zusammengefasst.



<http://www.springer.com/978-3-658-14637-5>

Theorie der Balkenbiegung
Einführung und Modellierung der statischen
Verformung und Beanspruchung
Öchsner, A.
2016, XI, 44 S. 20 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-14637-5