2.

Finanzmathematik

2 Finanzmathematik

Während in der wissenschaftlichen **Literatur** die Analyse und der Vergleich von **Barwerten** als bestes Entscheidungskriterium angesehen werden, ist in der **Praxis der Wertpapiermärkte** nach wie vor die **Effektivverzinsung** das entscheidende Kriterium. Dies liegt auch an der Besonderheit, dass ein mehrfaches Wechseln von Einzahlungen und Auszahlungen in der Regel nicht vorkommt. Darüber hinaus haben sich die Akteure daran gewöhnt, in **Renditen** zu **denken**, so dass eine ausführliche Analyse dieses Bereichs für Finanzmarktteilnehmer sehr wichtig ist.

In diesem Abschnitt werden zuerst die Grundlagen der **Effektivverzinsung** einschließlich einiger **Näherungsformeln** bei festverzinslichen Wertpapieren besprochen. Anschließend werden Papiere des **Geldmarkts** analysiert, denen in der Regel eine lineare Zinsverteilung zugrunde liegt. Danach wird der **Anleihenmarkt** bei glatter Restlaufzeit diskutiert und unter diesem Gesichtspunkt auch die **Zinsstrukturkurve** und das **Zinsänderungsrisiko** behandelt. Schließlich werden dann Effektivzinsen bei **gebrochenen Laufzeiten** mit einbezogen.

2.1 Grundlagen der Effektivverzinsung

Grundsätzlich ist es denkbar, anfallende Zahlungen auf den Endpunkt des Zahlungsstroms aufzuzinsen, d.h. theoretisch **wiederanzulegen**, um daraus den Effektivzins zu ermitteln. Dies geschieht beispielsweise bei **Krediten** und ist sogar in Deutschland in der **Preisangabenverordnung** vorgeschrieben. **Wertpapierhändler** denken jedoch in Kursen, so dass die Zahlungen auf den **Abrechnungstag** bezogen werden. Die zukünftigen Zahlungen werden also auf den Valutatag **abgezinst**.

Beim Kauf **zwischen** zwei **Kuponterminen** muss der Käufer meist auch anteilig Zinsen für die bereits abgelaufene Zeit des nächsten Kupons entrichten; es müssen bei Kauf zusätzlich **Stückzinsen** gezahlt werden. Die **Kurse** werden jedoch meist **clean** notiert, d.h. ohne Stückzinsen, während sich die Effektivzinsen im Regelfall auf die geleistete Zahlung, also einschließlich der Stückzinsen, beziehen **(dirty price).**

Bei verbrieftem Fremdkapital handelt es sich in der Regel um endfällige Papiere mit regelmäßigen Zinszahlungen, so dass bei der Entwicklung von Rechenformeln einige Vereinfachungen möglich sind. Bei **Renditen** sind **unterschiedliche Defi-**

T. Heidorn und C. Schäffler, *Finanzmathematik in der Bankpraxis*,
DOI 10.1007/978-3-658-13448-8_2

nitionen üblich, die im Weiteren kurz erläutert werden. Zur Verdeutlichung dient eine Anleihe mit folgenden Ausstattungsmerkmalen:

Beispielanleihe:

Kupon: 8%

Restlaufzeit: 9 Jahre

Tilgung: 102 (102 ist sehr selten, im Regelfall wird zu 100 getilgt)

Kündigungsmöglichkeit für Emittenten (Call): nach 5 Jahren zu 104

Kurs: 110

Da eine glatte Restlaufzeit vorliegt, müssen auch keine Stückzinsen gezahlt werden, der dirty price entspricht also dem clean price.

- **Nominalverzinsung**

Dies ist der vom Emittenten versprochene Zinssatz, im Regelfall also der **Kupon**. Bezogen auf das Beispiel beträgt er 8%. Da hier jedoch weder Kapitaleinsatz noch mögliche höhere Rückzahlungen miteinbezogen werden, spielt diese Verzinsung nur im Hinblick auf das direkt zufließende Geld und die Besteuerung im privaten Vermögen eine Rolle.

- **Laufende Verzinsung (current yield)**

Die laufende Verzinsung ist der Quotient aus **Nominalverzinsung** und **Kapitaleinsatz**. Dies trägt dem einfachen Zusammenhang Rechnung, dass ein gleicher Kupon bei geringerem Kapitaleinsatz eine höhere Rendite erbringen muss.

$$r_c = \frac{Kupon}{Kurs}$$

Beispiel:

$$r_c = \frac{8}{110} = 7{,}27\%$$

Bei dieser Berechnung bleiben Disagiogewinne oder -verluste außer Betracht, so dass sie auch nur ein sehr ungenaues Maß für die Rendite eines Wertpapiers sind. Bei der Berechnung einer Rendite müssen aber Zins, Ausgabekurs, Rückzahlungskurs und Tilgungsmodalitäten berücksichtigt werden, um einen genauen Effektivzins zu erhalten.

❑ Einfache Verzinsung (simple yield-to-maturity)

Bei dieser oft auch als kaufmännisch bezeichneten Methode werden **Zins** und **anteiliger Rückzahlungsgewinn** auf das **eingesetzte Kapital** bezogen und **linear** über die Laufzeit **verteilt**.

$$r_{sim} = \frac{Kupon + \dfrac{(Rückzahlung - Kurs)}{Laufzeit}}{Kurs}$$

Beispiel:

$$r_{sim} = \frac{8 + \dfrac{(102 - 110)}{9}}{110} = 6{,}47\ \%$$

Dies ergibt eine erste **Annäherung für eine Effektivverzinsung**. Allerdings spielt hier der **Zeitpunkt** der Disagiogewinne und -verluste **keine Rolle**, daher eignet sich dieses Verfahren nur für **Überschlagsrechnungen** bzw. für erste Näherungen bei Iterationsverfahren. Unterjährige Kupons werden nicht berücksichtigt, so dass sich dieses Verfahren kaum bei mehr als einer Kuponzahlung im Jahr anbietet. Das Ergebnis liegt allerdings relativ nah beim finanzmathematisch exakten Effektivzins von 6,66 (vgl. 2.3.1).

❑ Yield-to-call, Yield-to-put

Hat der **Emittent** einer Anleihe das Recht, die Anleihe zu **kündigen (Call),** wird er bei fallenden Zinsen davon Gebrauch machen. Im Regelfall gibt dann die Yield-to-call über die Rendite im entsprechenden Zeitraum Auskunft. Meist sollten Papiere, die über dem Kündigungskurs notieren, mit der Yield-to-call-Rendite bewertet werden, da eine Kündigung wahrscheinlich ist.

Beim Yield-to-put hat der **Anleihekäufer** das **Kündigungsrecht (Put)**, das er in der Regel bei steigenden Zinsen ausüben wird, um Renditeverbesserungen zu erreichen.

❑ Yield to average life

Bei laufenden Tilgungen wird nicht auf die letzte Tilgungstranche abgestellt, sondern eine Rendite in Bezug auf die mittlere Restlaufzeit errechnet.

Bei der Berechnung von **Renditen** wird auf dem **Geldmarkt** und dem **Anleihemarkt** unterschiedlich vorgegangen. Da der Geldmarkt relativ ähnlich der Vorgehensweise der einfachen Zinsberechnung ist, wird er hier zuerst analysiert.

2.2 Verzinsung von Geldmarktpapieren

Im Regelfall wird auf dem Geldmarkt mit **endfälligen Papieren ohne laufende Zinszahlung** gearbeitet. Sie haben in der Regel eine Laufzeit unter einem Jahr, so dass der Effektivzins leicht zu berechnen ist. Im Gegensatz zu den anschließend behandelten Anleihen werden die **einfachen Zinsen** berechnet, d.h. nur mit dem **Anteil der Tage an der Periode** gewichtet.

Die **Zinstage** werden von Land zu Land unterschiedlich gezählt. Generell werden die **wirklich abgelaufenen Tage (actual)** berechnet und dann durch die **Basisperiode** (in der Regel ein Jahr) geteilt. Dabei wird das **Jahr** zum Teil mit **360 Tagen** (USA, Deutschland), zum Teil aber auch mit **365 Tagen** (Großbritannien) berechnet. Die alte Usance in Deutschland waren sogar 30 Zinstage pro vollständig abgelaufenem Monat (vgl. Abschnitt 2.6.1).

2.2.1 Diskontpapiere

In den meisten Fällen ist eine **Zinseszinsberechnung nicht erforderlich**, da zwischenzeitlich keine Cash Flows anfallen. Eine **einfache Diskontierung des Rückzahlungsbetrages** mit dem **Effektivzins** ergibt den **Kaufpreis**. Beispiele für solche Typen sind Handelswechsel, Schatzwechsel, Treasury Bills und meistens Commercial Papers.

Generell folgt bei Diskontpapieren aus der simple yield-to-maturity:

$$r = \frac{Rückzahlung - Preis}{Preis \cdot \frac{Haltedauer}{Basisperiode}}$$

Der Zähler der Formel gibt den Ertrag an, der während der Haltedauer zufließt, während der Nenner dies ins Verhältnis zum eingesetzten Kapital, bezogen auf die Bindungsdauer, setzt. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel:

Abrechnungstag: 15.5.2000

Fälligkeit: 1.8.2000

Preis: 98,69

a) Usance: $\frac{\text{act}}{360}$ (in Deutschland Geldmarktusance unter Banken)

b) Usance: $\frac{30}{360}$ (in Deutschland zum Teil Geldmarktusance bei Kunden)

Zuerst müssen die Tage berechnet werden. Bei der Usance a) sind dies 78, während bei der Usance b) durch die Monatszählweise mit 30 Tagen nur mit 76 Tagen gerechnet wird.

Daraus ergibt sich eine Verzinsung von

a) $$r_e = \frac{100 - 98{,}69}{98{,}69 \cdot \frac{78}{360}} = \frac{1{,}31}{21{,}3828} = 6{,}126\%,$$

b) $$r_e = \frac{100 - 98{,}69}{98{,}69 \cdot \frac{76}{360}} = \frac{1{,}31}{20{,}8346} = 6{,}288\%.$$

Wenn der Zins für **unterschiedliche Basisperioden** berechnet werden soll, kann er leicht **umgerechnet** werden. Aufgrund des linearen Zusammenhangs gilt:

$$IRR_{360} \cdot \frac{365}{360} = IRR_{365}$$

2.2.2 Einmalige Zinszahlung bei Fälligkeit

In seltenen Fällen werden Geldmarktpapiere auch zum Nennbetrag ausgegeben und dann bei Fälligkeit **einschließlich einer Zinszahlung zurückbezahlt**. Da diese Papiere einen Nominalzins (C) haben, muss beim Kauf während der Laufzeit mit **Stückzinsen** gearbeitet werden. Daraus ergibt sich dann folgende Formel:

$$r_e = \frac{\mathit{Rückz.} + \mathit{Laufzeit} \cdot \mathit{Kupon} - \mathit{Preis} - \mathit{Stückzinsen}}{(\mathit{Preis} + \mathit{Stückzinsen}) \cdot \frac{\mathit{Haltedauer}}{\mathit{Basisperiode}}}$$

Auch hier gibt der Zähler die Differenz von Zahlung bei Kauf und dem am Ende zu erhaltenden Betrag an. Dies muss auf das eingesetzte Kapital, gewichtet mit der Haltedauer, bezogen werden. Der Unterschied zu Diskontpapieren liegt in den eventuell zu leistenden Stückzinsen auf den Kupon.

Beispiel:

Emission:	5.3.2000
Kaufvaluta:	15.5.2000
Fälligkeit:	20.6.2000
Kupon:	6%
Preis:	99,975
Usance:	30/360

Von der Emission bis zum Kauf sind 70 Tage vergangen, bis zur Fälligkeit wird das Papier dann weitere 35 Tage gehalten, so dass die Gesamtlaufzeit 105 Tage beträgt.

$$r_e = \frac{100 + \frac{105}{360} \cdot 6 - \left(99{,}975 + \frac{70}{360} \cdot 6\right)}{\left(99{,}975 + \frac{70}{360} \cdot 6\right) \cdot \frac{35}{360}} = 6{,}19\%$$

Literatur: Uhlir/Steiner (2000), Wagner (1988)

2.3 Effektivverzinsung bei Anleihen mit glatter Restlaufzeit

Bei der Analyse von Gegenwartswerten wird der Zinssatz der entsprechenden Periode genutzt, um den Barwert eines Cash Flows zu ermitteln. Diese Form der Bewertung wird meist bei Projekten angewandt, um die Kosten mit den möglichen Erträgen vergleichbar zu machen. Da aber am Rentenmarkt in der Regel ein **Kurs zur Verfügung steht**, wird als Vergleichskriterium von Anleihen meist die **Effektivverzinsung** (*IRR*, Internal Rate of Return) herangezogen. Die Effektivverzinsung ist der Zinssatz, mit dem man alle **zukünftigen Zahlungen abzinsen** muss, damit ihr **Barwert** dem **Kurs** der Anleihe entspricht.

$$P = \frac{C_1}{(1+IRR)^1} + \frac{C_2}{(1+IRR)^2} + \frac{C_3}{(1+IRR)^3} + \ldots + \frac{C_n + Rückzahlung}{(1+IRR)^n}$$

Der Zinssatz (*IRR*), der diese Gleichung löst, ist also die **Effektivverzinsung** (r_e). Da es sich im Regelfall um eine **Gleichung *n-ten* Grades** handelt, muss die Lösung durch ein **Iterationsverfahren** gefunden werden. Bessere kaufmännische Taschenrechner und Computerprogramme bieten dies für glatte Restlaufzeiten regelmäßig an, so dass hier entsprechende Formeln nur kurz erwähnt werden.

2.3.1 Endfällige Anleihen

Die einfachste Form der endfälligen Anleihe ist der **Zerobond**. Die Verzinsung beruht nur auf dem **Unterschiedsbetrag** von **Ausgabepreis** und **Rückzahlung**. Bei der finanzmathematischen Betrachtung ist es egal, ob es sich um einen **Zinssammler (Aufzinsungspapier)** handelt, d.h. Zinsen werden nicht ausgeschüttet, sondern wieder angelegt, oder ob es sich um ein **Diskontpapier (Abzinsungspapier)** handelt. Da alle Kupons gleich 0 sind, reduziert sich die Formel auf:

$$P = \frac{Rückzahlung}{(1+IRR)^n}.$$

So lässt sich der Effektivzins leicht ermitteln.

$$r_e = IRR = \left(\frac{Rückzahlung}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Beispiel:

Die Effektivverzinsung eines 5-jährigen Zerobonds mit einer Laufzeit von 5 Jahren und einem Ausgabekurs von 62,09 ist also 10%.

$$r_e = IRR = \left(\frac{100}{62{,}09}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 = 10\%$$

Als Usance wird in Deutschland von einer **jährlichen Zinsvergütung** ausgegangen, die dann zum Effektivsatz wieder angelegt wird. Da es jedoch auch Anleihen gibt, die **halbjährlich zahlen**, sollte genau analysiert werden, wie solche Papiere bewertet werden müssen. Bei mehreren Zahlungen im Jahr können Beträge schon **unterjährig** wieder angelegt werden. Sie werden dann entsprechend **mitverzinst**. Eine Anlage von 1000 über 3 Jahre, die mit 6% verzinst wird, erreicht einen Endwert von 1191,02.

Tabelle 2.1

JÄHRLICHE VERZINSUNG MIT 6%

Jahr	PV	Verzinsung	FV
1	1 000,00	$\cdot 1{,}06$	$=$ 1 060,00
2	1 060,00	$\cdot 1{,}06$	$=$ 1 123,60
3	1 123,60	$\cdot 1{,}06$	$=$ 1 191,02

Ist der Zinsmodus halbjährlich, wird jeweils die Hälfte der Zinsen bereits in der Jahresmitte ausgeschüttet. Da sie schon zu diesem Zeitpunkt wieder angelegt werden können, ergibt sich folgende Zahlungsreihe:

Tabelle 2.2 **HALBJÄHRLICHE VERZINSUNG MIT 6%**			
Jahr	**PV**	**Verzinsung**	**FV**
0,5	1 000,00	$\cdot 1{,}03$	= 1 030,00
1	1 030,00	$\cdot 1{,}03$	= 1 060,90
1,5	1 060,90	$\cdot 1{,}03$	= 1 092,73
2	1 092,73	$\cdot 1{,}03$	= 1 125,51
2,5	1 125,51	$\cdot 1{,}03$	= 1 159,27
3	1 159,27	$\cdot 1{,}03$	= 1 194,05

Durch die Möglichkeit der früheren Wiederanlage steigt der gesamte Zinserfolg bis zur Periode 3 von 191,02 auf 194,05. Soll sich diese Wirkung im Zinssatz widerspiegeln, muss bei einer nicht jährlichen Verzinsung der **Periodeneffektivsatz** auf einen **Jahreseffektivsatz** hochgerechnet werden. Daraus resultiert entsprechend die Formel:

$$IRR_{ann\_effektiv} = \left(1 + \frac{IRR_{nominal}}{Kupons\ pro\ Jahr}\right)^{Kupons\ pro\ Jahr} - 1$$

Beispiel:

$$IRR_{ann} = \left(1 + \frac{0{,}06}{2}\right)^{2} - 1 = 0{,}0609 = 6{,}09\%$$

Die Umrechnung bezieht sich nur auf den Wiederanlageeffekt. Legt man zu diesem Satz einen Betrag jährlich an, erhält man das gleiche Endvermögen wie bei halbjährlicher Zahlung:

Tabelle 2.3 **JÄHRLICHE VERZINSUNG MIT DEM PERIODENEFFEKTIVSATZ**			
Jahr	**PV**	**Verzinsung**	**FV**
1	1 000,00	$\cdot 1{,}0609$	$= 1\ 060{,}90$
2	1 060,90	$\cdot 1{,}0609$	$= 1\ 125{,}51$
3	1 125,51	$\cdot 1{,}0609$	$= 1\ 194{,}05$

Erhöht man die Zahlungen pro Jahr weiter, ergibt sich bei einer monatlichen Zahlung und einem Nominalzins von 6% ein Effektivsatz von 6,17%.

$$IRR_{ann} = \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}0617 = 6{,}17\%$$

Auch der Zukunftswert kann dann leicht in Abhängigkeit von der Häufigkeit der Kuponzahlungen ermittelt werden.

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{Nominalzinssatz}{Kupons\ pro\ Jahr}\right)^{Laufzeit \cdot Kupons\ pro\ Jahr}$$

$$1194{,}05 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^{3 \cdot 2}$$

Mit dieser Formel kann dann der Effekt einer Verkürzung der Zinsperioden untersucht werden. Bei der Anlage von 100 zu 10% für 5 Jahre entstehen

- bei jährlicher Verzinsung $100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{1}\right)^{1 \cdot 5} = 161{,}05$
- bei halbjährlicher Verzinsung $100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{2 \cdot 5} = 162{,}89$
- bei monatlicher Verzinsung $100 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 164{,}53$

– bei täglicher Verzinsung $100 \cdot \left(1+\frac{0{,}1}{365}\right)^{365 \cdot 5} = 164{,}86$

Die Veränderung der Verzinsung nimmt zwar bei jeder Verkürzung der Verzinsungsperiode zu, jedoch werden die Unterschiede immer kleiner. Bei einer "**sekündlichen"** Verzinsung erreicht man dann fast den Grenzwert einer **kontinuierlichen Verzinsung**. Dies ist eine Funktion der natürlichen Zahl *e= 2,718* (vgl. 7.2).

$$\left(1+\frac{Nominalzinssatz}{Kupons\,pro\,Jahr}\right)^{Laufzeit \cdot Kupons\,pro\,Jahr} = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha \cdot Nominalzins \cdot Laufzeit}$$

$$mit\ \alpha = \frac{Kupons\,pro\,Jahr}{Nominalzinssatz} \quad \text{Kupons pro Jahr} \rightarrow \infty \text{ dann } \alpha \rightarrow \infty$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha \cdot Nominalzins \cdot Laufzeit} = \left(\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{Nominalzins \cdot Laufzeit} = e^{Nominalzins \cdot Laufzeit}$$

Damit ergibt sich für die kontinuierliche Verzinsung:

$$\mathrm{FV} = \mathrm{PV} \cdot e^{Laufzeit \cdot r_{cont}}$$

mit r_{cont} = kontinuierlicher Vergleichszins.

Bei einer Verzinsung von 10% und einer Laufzeit von 5 Jahren ergibt sich bei Anlage von 100:

$$FV = 100 \cdot 2{,}71828^{5 \cdot 0{,}1} = 164{,}872$$

Der Wert unterscheidet sich kaum noch von der täglichen Verzinsung. Der kontinuierliche Zins ist sehr wichtig in der Optionstheorie. Dabei spielt es eine Rolle, die **Zinssätze** ineinander **umrechnen** zu können. Damit der Zukunftswert bei diskreter und kontinuierlicher Verzinsung identisch ist, muss gelten:

$$PV \cdot e^{r_{cont} \cdot n} = FV = PV \cdot \left(1 + \frac{Nominalzins}{Kupons\ pro\ Jahr}\right)^{Kupons\ pro\ Jahr \cdot n}$$

$$\Leftrightarrow e^{r_{cont} \cdot n} = \left(1 + \frac{Nominalzins}{Kupons\ pro\ Jahr}\right)^{Kupons\ pro\ Jahr \cdot n}$$

$$\Leftrightarrow r_{cont} = Kupons\ pro\ Jahr \cdot \ln\left(1 + \frac{Nominalzins}{Kupons\ pro\ Jahr}\right)$$

Ein jährlicher Zinssatz von 10% entspricht also einer kontinuierlichen Verzinsung von 9,53%.

$$r_{cont} = 1 \cdot \ln\left(1 + \frac{0{,}1}{1}\right) = 9{,}53\%\,,$$

da $100 \cdot e^{0{,}0953 \cdot 5} = 161{,}05$

Die Umrechnung von Zinssätzen ist bei allen Anleiheformen möglich.

Bei einem Zerobond mit halbjährlicher Zinsverrechnung gilt entsprechend folgende Formel:

$$P = \frac{Rückzahlung}{\left(1 + \frac{IRR}{2}\right)^{n \cdot 2}}$$

So lässt sich der Jahreseffektivzins mit

$$IRR = 2 \cdot \left[\left(\frac{Rückzahlung}{P}\right)^{\frac{1}{n \cdot 2}} - 1\right] \text{ errechnen.}$$

Also ergibt sich die Effektivverzinsung eines 5-jährigen Zerobonds mit einer Laufzeit von 5 Jahren und einem Ausgabekurs von 62,09 auf 9,76% wie folgt:

$$IRR = 2 \cdot \left[\left(\frac{100}{62{,}09}\right)^{\frac{1}{5 \cdot 2}} - 1\right] = 0{,}0976 = 9{,}76\%$$

Die meisten **Anleihen** sind jedoch mit einem **Kupon** ausgestattet, so dass die Analyse des Zahlungsstroms schwieriger wird. In der allgemeinen Formel kann dann statt der Zahlung (Z) der identische **Kupon** (*C*) benutzt werden.

$$P = \frac{C_1}{(1+IRR)^1} + \frac{C_2}{(1+IRR)^2} + \frac{C_3}{(1+IRR)^3} + \ldots + \frac{C_n + Rückzahlung}{(1+IRR)^n}$$

Dieser Zahlungsstrom setzt sich einerseits aus der Rückzahlung am Ende der Laufzeit und andererseits aus den Kuponzahlungen während der Laufzeit zusammen.

$$P = \frac{Rückzahlung}{(1+IRR)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+IRR)^i}$$

Die Summe der Kuponzahlungen ist eine endliche geometrische Reihe (vgl. 8.1). Unter Ausnutzung der Summenformel kann die Gleichung wie folgt umgeformt werden:

$$P = \frac{Rückzahlung}{(1+IRR)^n} + C \cdot \frac{(1+IRR)^n - 1}{(1+IRR)^n \cdot IRR}.$$

Diese Gleichung lässt sich **nicht mehr einfach nach der Verzinsung auflösen**, so dass das Ergebnis durch **"Probieren",** also durch ein Suchverfahren, gefunden werden muss. Dies ist heutzutage mit Computern und Taschenrechnern relativ einfach.

Beispiel:

Bei einer 9%-Anleihe mit Restlaufzeit von 5 Jahre und einem Rückzahlungskurs von 102 ergibt sich bei einem Kurs von 114,13:

$$114{,}13 = \frac{102}{(1+IRR)^5} + 9 \cdot \frac{(1+IRR)^5 - 1}{(1+IRR)^5 \cdot IRR}$$

Der Taschenrechner zeigt einen Effektivzins von 6%. Dies kann durch Einsetzen leicht überprüft werden:

$$\frac{102}{(1{,}06)^5} + 9 \cdot \frac{(1{,}06)^5 - 1}{(1{,}06)^5 \cdot 0{,}06} = 76{,}22 + 9 \cdot \frac{0{,}3382}{0{,}0803} = 114{,}13$$

Insoweit ist der Effektivzins unabhängig von der Rechenmethode, bei **glatten Laufzeiten** wird bei **allen Verfahren in dieser Weise** gearbeitet.

Literatur: Wagner (1988), Weston (2000)

2.3.2 Anleihen mit besonderen Tilgungsformen

Im Allgemeinen werden Anleihen am Ende der Laufzeit getilgt, jedoch kommen auch andere Tilgungsformen vor. Generell muss dann dieser Zahlungsstrom entsprechend diskontiert werden, um dann durch "Probieren" eine Lösung zu ermitteln.

$$P = \frac{Z_1}{(1+IRR)^1} + \frac{Z_2}{(1+IRR)^2} + \frac{Z_3}{(1+IRR)^3} + \ldots\ldots + \frac{Z_n}{(1+IRR)^n}$$

$Z_n =$ Zahlung zum Zeitpunkt n

Eine häufige Variante, die insbesondere aus dem Kreditgeschäft bekannt ist, ist die **Verbindung von Tilgung und Zinszahlungen.** Der Bond leistet also über die gesamte Laufzeit in jeder Periode die gleiche Rate, wobei der Zinsanteil ständig abnimmt, während der Tilgungsanteil steigt. Somit ist in der letzten Periode ohne zusätzliche Zahlung die gesamte Schuld zurückgeführt.

Beispiel:

Bei einem 4-jährigen Bond wird jeweils eine Rate von 31,55 fällig. Der Kurs liegt bei 100, so dass durch "Probieren" ein Effektivsatz von 10% ermittelt wird. Dies lässt sich leicht veranschaulichen:

$$\frac{31{,}55}{1{,}1^1} + \frac{31{,}55}{1{,}1^2} + \frac{31{,}55}{1{,}1^3} + \frac{31{,}55}{1{,}1^4} = 28{,}68 + 26{,}07 + 23{,}70 + 21{,}55 = 100{,}00$$

Jedoch verändert sich der Anteil von Zins und Tilgung bei jeder Zahlung.

Tabelle 2.4 **RATENKREDIT**				
Jahr	**Rate**	**Zinszahlung**	**Tilgung**	**Restschuld**
0				100,00
1	31,55	$-100{,}00 \cdot 0{,}1$	$= 21{,}55$	78,45
2	31,55	$-78{,}45 \cdot 0{,}1$	$= 23{,}71$	54,74
3	31,55	$-54{,}74 \cdot 0{,}1$	$= 26{,}08$	28,66
4	31,55	$-28{,}66 \cdot 0{,}1$	$= 28{,}68$	0

An diesem Beispiel kann anschaulich die Idee des Effektivzinses erklärt werden. Der Effektivzins berücksichtigt jede Zahlung und diskontiert sie entsprechend ihres Zeitpunkts. So werden die Zinsen immer nur auf die Restschuld berechnet. Mit jeder Zahlung nimmt diese Restschuld ab, so dass der Zinsanteil von 10 auf 2,866 zurückgeht. Gleichzeitig wächst der Tilgungsteil von 21,55 auf 28,68.

2.3.3 Fallstudie Neuemissionen

Die Firma Power plant die Aufnahme von 100 Millionen € für fünf Jahre. Eine Möglichkeit ist die Emission einer Anleihe, wobei den Usancen gemäß Power eine Gebühr von 2% des Nominalbetrags und 200.000 € am Zahltag als Emissionskosten aufwenden müsste. Das Entscheidungskriterium für Power sind die All-in-Kosten, also der Effektivsatz, der alle Zahlungen berücksichtigt.

Wenige Tage vorher wurde von der Firma Boom bereits eine 8%-Anleihe mit fünf Jahren Laufzeit platziert. Da Power und Boom vom Kapitalmarkt ähnlich eingeschätzt werden, wird diese Anleihe für den Renditevergleich auf der Investorenseite herangezogen. Die Anleihe handelt unter Banken zum Kurs 98,00. Damit errechnet sich eine Effektivverzinsung von 8,51%.

Der Markt scheint im Moment eher an höheren Kupons interessiert zu sein, und so entscheidet sich die Emissionsbank für 8,25%. Bei einem Ausgabekurs von 99% ergibt sich eine Rendite von 8,50%.

$$99{,}00 = \frac{8{,}25}{(1{,}085)^1} + \frac{8{,}25}{(1{,}085)^2} + \frac{8{,}25}{(1{,}085)^3} + \frac{8{,}25}{(1{,}085)^4} + \frac{108{,}25}{(1{,}085)^5}$$

Da die Handelsabteilung für eine solche Ausstattung Bedarf sieht, kann ein Angebot an Power unterbereitet werden. Um die Effektivkosten zu berechnen, müssen vom Emissionspreis 2% der Nominalsumme und zusätzlich 200 000 € abgezogen werden. Damit fließen Power 96,8 Mio. € bei Emission zu. Die Effektivverzinsung liegt damit bei 9,07%.

$$96{,}8 = \frac{8{,}25}{(1{,}0907)^1} + \frac{8{,}25}{(1{,}0907)^2} + \frac{8{,}25}{(1{,}0907)^3} + \frac{8{,}25}{(1{,}0907)^4} + \frac{108{,}25}{(1{,}0907)^5}$$

Power muss nun vergleichen, ob andere Anleihen oder Kredite zu einer günstigeren Finanzierung führen. Ist dies nicht der Fall, wird Power das Emissionsangebot annehmen.

2.3.4 Effektivverzinsung unter Steuergesichtspunkten

Bei der Ermittlung von Effektivzinsen blieben **Steuern** bisher außer Acht. Da aber im Regelfall nicht die zufließenden Beträge, sondern die netto verfügbaren Gelder wichtig sind, muss eine **Effektivverzinsung nach Steuern** berechnet werden.

Viele Steuersysteme behandeln **Zinsen** und **Kapitalerträge** bei privaten Investoren unterschiedlich. Teilweise müssen im **Privatvermögen Zinsen** nach Erreichen des Freibetrags mit dem individuellen Grenzsteuersatz **versteuert werden,** hingegen sind **Kapitalerfolge** unter Wahrung bestimmter Haltedauern **steuerfrei.** In Deutschland wurde dieser Unterschied aufgehoben.

Für jeden Anleger kommt es dann, je nach Situation und **persönlichem Steuersatz,** zu unterschiedlichen Anlageentscheidungen. Bei der Ermittlung der Effektivverzinsung wird vom Zahlungsstrom nur der netto zufließende Betrag berücksichtigt. Ist z.B. der Rückzahlungsgewinn steuerfrei der Kupon aber nicht ergibt sich folgende Formel:

$$P = \frac{Rückzahlung}{\left(1 + IRR_{nach\ Steuer}\right)^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(1 - Steuersatz\right) \cdot C}{\left(1 + IRR_{nach\ Steuer}\right)^i}$$

Beispiel:

Diese Formel wird am Beispiel folgender 3-jährige Anleihen erklärt:

Tabelle 2.5

ANLEIHEN

Kürzel	Laufzeit	Kupon	Preis netto
A	3 Jahre	6%	96,20
B	3 Jahre	10%	102,70

Die beiden Investoren Poor und Rich haben einen marginalen Steuersatz von 20% bzw. 60%. Ihre Freibeträge sind bereits ausgeschöpft. Entsprechend ergibt sich eine Effektivverzinsung der Anleihen von:

A) Kupon $=$ 6%, Preis $= -$ 96,20 $\quad r_{vor\ Steuern} = 7{,}46\%$
Netto Zufluss Poor sind 80% von 6 $=$ 4,8 $\quad r_{Poor} = 6{,}23\%$
Netto Zufluss Rich sind 40% von 6 $=$ 2,4 $\quad r_{Rich} = 3{,}76$

B) Kupon $=$ 10%; Preis $= -$ 102,7 $\quad r_{vor\ Steuern} = 8{,}93\%$
Netto Zufluss Poor sind 80% von 10 $=$ 8 $\quad r_{Poor} = 6{,}97\%$
Netto Zufluss Rich sind 40% von 10 $=$ 4 $\quad r_{Rich} = 3{,}04\%$

Obwohl vor Steuern die Anleihe *B* eindeutig eine höhere Verzinsung erbrachte, ergibt sich nach Steuerbetrachtung, dass sich nur Poor für diese Anleihe entscheiden sollte.

Durch das Disagio der Anleihe *A* fließt Rich ein steuerfreier Kapitalgewinn zu. Dies bedeutet eine Effektivverzinsung nach Steuern von 3,76% und ist für ihn der höhere Satz. Diese Steuerproblematik stellt sich bei den meisten Anleihetypen, so dass eine sinnvolle Auswahl für Privatinvestoren unbedingt die steuerliche Seite berücksichtigen muss. Weiterhin wird zwischen **Privatvermögen** und **Betriebsvermögen** unterschieden. Generell müssen beim Betriebsvermögen sowohl die Zinsen als auch der Kapitalerfolg versteuert werden. Im Allgemeinen können dabei Kapitalverluste aus der **Differenz von Erwerbs- und Tilgungskurs über die Laufzeit verteilt** abgeschrieben werden, **sonst** gilt das **Realisationsprinzip**. Somit sind im Betriebsvermögen oft die Zeitpunkte des Zuflusses über den Effektivzins hinaus wichtig.

Literatur: Uhlir/Steiner (2000)

2.4 Bedeutung der Zinsstrukturkurve

Eine große Schwierigkeit bei der Bewertung mit **Effektivzinsen** ist die Tatsache, dass alle Zahlungen mit dem **gleichen Zinssatz diskontiert** werden. In der Realität werden jedoch oft unterschiedliche Zinssätze in Abhängigkeit von der Laufzeit vergütet. Dies wird in der Regel durch eine **Zinsstrukturkurve** beschrieben. Bei einem horizontalen Verlauf sind die Zinsen in den Laufzeitsegmenten annähernd gleich, bei steigender Kurve (auch oft als "normale" Zinskurve bezeichnet) liegen die langfristigen Zinsen über den kurzfristigen, beim inversen Verlauf ist es dann umgekehrt. Bei einer **nicht horizontalen Zinskurve** muss also der **Effektivzins** einen **Durchschnitt** bilden, man versucht mit einer einzigen Zinszahl eine Zinsstruktur zu beschreiben. Solange relativ **ähnliche Zahlungsströme** in Bezug auf Struktur und Laufzeit verglichen werden, ist die **Gefahr einer Fehlentscheidung relativ gering**. Bei **komplizierteren Strukturen** ist das **Effektivzinskriterium nicht unbedingt ausreichend**.

2.4.1 Spot Rates und Forward Rates

Eine Alternative ist die Diskontierung der Zahlungen mit den periodengerechten Zinssätzen, um dann die Barwerte mit dem Preis am Markt zu vergleichen. Betrachten wir diesen Ansatz näher:

$$P = \frac{C_1}{(1+r_1)^1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \frac{C_3}{(1+r_3)^3} + \ldots + \frac{C_n + Rückzahlung}{(1+r_n)^n}.$$

Bei einer gegebenen Zinsstruktur kann leicht der Gegenwartswert und damit der finanzmathematisch richtige Preis errechnet werden. Dazu werden die **Spot Rates** (r_{sn}) herangezogen, also der Zerozins, der genau für den Zeitraum von heute bis n verlangt wird.

Gegebene Zinsstruktur:

Laufzeit von heute bis Ende Jahr 1 $r_{s1} = 10\%$

Laufzeit von heute bis Ende Jahr 2 $r_{s2} = 11\%$

Laufzeit von heute bis Ende Jahr 3 $r_{s3} = 12\%$

Für einen 3-jährigen Bond mit einem Kupon von 10% ergibt sich dann ein Gegenwartswert von 95,50.

$$PV = \frac{10}{1,1} + \frac{10}{(1,11)^2} + \frac{110}{(1,12)^3} = 95,50$$

Bei der Berechnung des Effektivzinses für den Preis von 95,5 ergibt sich 11,87%, die Zinsstruktur geht damit verloren.

Bei solchen Strukturen kann das Effektivzinskriterium in die Irre führen. Dies soll folgendes Beispiel verdeutlichen.

Beispiel:

Am Markt wird die folgende Zinsstruktur beobachtet:

$r_{s1} = 10\% \quad r_{s2} = 11\% \quad r_{s3} = 12\%$

Zwei 3-jährige Anleihen mit einem Kupon von 6% bzw. 12% haben einen finanzmathematisch richtigen Barwert von 85,77 bzw. 100,37.

$$\frac{6}{1,1} + \frac{6}{1,11^2} + \frac{106}{1,12^3} = 85,77 \Rightarrow IRR = 11,92\%$$

$$\frac{12}{1,1} + \frac{12}{1,11^2} + \frac{112}{1,12^3} = 100,37 \Rightarrow IRR = 11,85\%$$

Bei diesem Preis scheint der 6%-Kupon jedoch eine höhere Verzinsung mit einem Satz von 11,92% im Vergleich zu 11,85% zu erzielen. Das Effektivzinskriterium täuscht einen Wertunterschied von 0,07% vor.

Zur korrekten Analyse müssen zuerst **Spot Rates** errechnet werden. Die einfachste Möglichkeit, aus dem Kapitalmarkt Spot Rates abzuleiten, ist die **Analyse von Zerobonds** der entsprechenden Laufzeit, da ja explizit keine Zahlungen in den Zeitraum fallen sollen.

Für einen Zerobond mit der Restlaufzeit von *n* Jahren und jährlicher Verzinsung errechnet sich der Effektivzins mit:

$$r_{sn} = \left(\frac{Rückzahlung}{Preis}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Entsprechend können aus den Kursen dreier Zerobonds, die mit 100 zurückgezahlt werden, die Spot Rates errechnet werden.

Beispiel:

Laufzeit 1 Jahr	Kurs: 90,91
Laufzeit 2 Jahre	Kurs: 81,16
Laufzeit 3 Jahre	Kurs: 71,18

Spot Rates:

$$r_{S1} = \left(\frac{100}{90{,}91}\right)^{\frac{1}{1}} - 1 = 10\%$$

$$r_{S2} = \left(\frac{100}{81{,}16}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 11\%$$

$$r_{S3} = \left(\frac{100}{71{,}18}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 12\%$$

Während die Spot Rates zur Diskontierung eines Cash Flows die einfachste Möglichkeit darstellen, können aus der Spot-Rate-Struktur auch implizit die Sätze für zukünftige Perioden errechnet werden. Diese Forward Rates (r_{fn}) sind ein **in der Zukunft beginnender einperiodiger Zinssatz.** Sie beruhen auf der Idee, dass eine Anlage über zwei Jahre genau so viel Zinsen erbringen muss, wie die Anlage für ein Jahr und gleichzeitiger Abschluss einer Forward-Anlage in einem Jahr für ein Jahr. Dabei bezeichnet also r_{fn} eine Anlage vom Jahr *n*–1 bis zum Jahr *n*. Aus den **Spot Rates** sollten sich bei informationseffizienten Märkten immer die **Forward Rates (implied) errechnen** lassen. Eine Anlage für *n*–1 Jahre bei gleichzeitigem Abschluss einer zukünftigen Anlage einschließlich der Zinsen in *n*–1 Jahren für ein Jahr muss den gleichen Ertrag ergeben, wie die Anlage des Betrages für *n* Jahre. Es gilt daher:

$$\left(1+r_{s(n-1)}\right)^{n-1} \cdot \left(1+r_{fn}\right) = \left(1+r_{Sn}\right)^{n}$$

$$\Leftrightarrow r_{fn} = \frac{\left(1+r_{Sn}\right)^{n}}{\left(1+r_{s(n-1)}\right)^{n-1}} - 1$$

Beispiel:

Aus den o.g. Angaben ergibt sich folgende Forwardstruktur:

Die Forward Rate (r_{f2}) in einem Jahr für ein Jahr liegt bei 12,01%.

$$r_{f2} = \frac{\left(1+r_{S2}\right)^{2}}{\left(1+r_{S1}\right)^{1}} - 1 = \frac{\left(1{,}11\right)^{2}}{1{,}1} - 1 = 12{,}01\%$$

Der Forwardsatz in zwei Jahren für ein Jahr liegt bei 14,03%.

$$r_{f3} = \frac{\left(1+r_{S3}\right)^{3}}{\left(1+r_{S2}\right)^{2}} - 1 = \frac{\left(1{,}12\right)^{3}}{\left(1{,}11\right)^{2}} - 1 = 14{,}03\%$$

Definitionsgemäß gilt:

$$r_{f1} = r_{s1} = 10\%$$

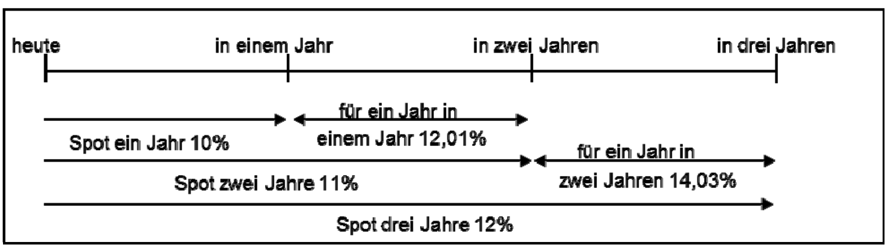

Abbildung 2.1: **Zinsstruktur mit Spot- und Forward Rates**

Es fällt sofort auf, dass eine steigende Zinskurve deutlich stärker steigende Forwards zur Folge hat. Um die Rechnung für die impliziten Forwards zu überprüfen, wird ein Betrag von 100 einmal zum Spotsatz für 2 Jahre angelegt. Dies ergibt:

$$FV = 100 \cdot (1+r_{s2})^{2} = 100 \cdot (1{,}11)^{2} = 123{,}21$$

Alternativ können 100 zum Spotsatz für ein Jahr angelegt werden und gleichzeitig eine weitere Anlage einschließlich der Zinsen in einem Jahr für ein Jahr abgeschlossen werden.

$$FV = 100 \cdot (1+ r_{s1}) \cdot (1+ r_{f2}) = 100 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1201 = 123{,}21$$

Die **impliziten Forwards** stellen also keine Meinung über zukünftige Sätze dar, sondern sind ein **reines Arbitrageergebnis** aus der heutigen Zinskurve und können damit auch risikofrei abgesichert werden.

2.4.2 Spot Rates als Bewertungskriterium

Im Regelfall liegt aber **keine ausreichende Zahl liquider Zerobonds** vor. Als Hilfestellung können beispielsweise die Festsatzseite von Swaps und der Geldmarkt benutzt werden. Eine weitere interessante Möglichkeit ist das **Zerlegen von Kupon-Bonds** in ihre Bestandteile, d.h., es wird sozusagen eine Folge von künstlichen Zerobonds gebildet. Durch diesen Ansatz ist es möglich, die Anleihen mit Hilfe des **Zinssatzes**, der **für die letzte Periode** gezahlt wird, zu vergleichen. Dies wird an folgender Anleihenstruktur deutlich:

Tabelle 2.6

MARKTSITUATION AM ANLEIHENMARKT

Anleihe	Laufzeit	P	C1	C2	C3	IRR
A1	1	100,00	108	-	-	8,00%
A2	2	96,54	7	107	-	8,97%
A3	3	95,00	8	8	108	10,00%
B3	3	102,49	11	11	111	10,00%

Die Spot Rate der ersten Periode ist leicht mit 8% zu ermitteln.

$$r_{s1} = \frac{8}{100} = 8\%$$

Der zweite Zahlungsstrom wird in die Zahlung von 7 in einem Jahr und die Zahlung von 107 in zwei Jahren zerlegt. Diskontiert man die erste Zahlung (7) mit dem

Spotsatz für ein Jahr, ergibt sich deren Barwert. Dieser wird vom Preis der Anleihe abgezogen.

$$96{,}54 - \frac{7}{1{,}08} = 90{,}0585$$

Für die Zahlung von 107 in zwei Jahren werden entsprechend 90,0585 aufgewandt.

Daraus lässt sich ein Spotsatz für 2 Jahre errechnen.

$$90{,}0585 = \frac{107}{(1+r_{s2})^2} \quad => \quad (1+r_{s2})^2 = 1{,}1881 \quad => \quad r_{s2} = 9{,}00\%$$

Daraufhin können nun die Anleihen *A3* und *B3* bewertet werden. Beide Anleihen haben eine Effektivverzinsung von 10%, müssten nach diesem Kriterium also gleichwertig sein. Zieht man jedoch die Spot Rate der letzten Periode heran, ergibt sich ein anderes Bild:

$$95{,}00 = \frac{8}{1{,}08} + \frac{8}{1{,}09^2} + \frac{108}{(1+r_{s3A3})^3} => 80{,}86 = \frac{108}{(1+r_{s3A3})^3}$$

$$(1+r_{s3A3})^3 = 1{,}33564$$

$$r_{s3A3} = 10{,}13\%, \quad IRR_{A3} = 10\%$$

$$102{,}49 = \frac{11}{1{,}08} + \frac{11}{1{,}09^2} + \frac{111}{(1+r_{s3B3})^3} => 83{,}05 = \frac{111}{(1+r_{s3B3})^3}$$

$$(1+r_{s3B3})^3 = 1{,}33654$$

$$r_{s3B3} = 10{,}15\% \quad IRR_{B3} = 10\%$$

Die Anleihe *B*3 ist nach dem Kriterium der Spot Rate in der letzten Laufzeit-Periode vorzuziehen. Durch eine Bewertung mit Hilfe des Effektivzinses wird die Wiederanlagemöglichkeit nur verzerrt wiedergegeben. Folglich muss es möglich sein, aus der Kombination von *A*1, *A*2 und *B*3 den Cash Flow von *A*3 zu reproduzieren, jedoch zu einem geringeren Kurs.

Dazu benötigt man für jeweils 100 nominal der Anleihe (vgl. Tabelle 2.7):

1. Zur Reproduktion der Endzahlung von 108:

   $\frac{108}{111} = 0{,}97297$ der Anleihe $B3$.

2. Zur Reproduktion des Cash Flows in der zweiten Periode muss der Arbitrageur $\frac{2{,}7}{107} = 0{,}0252336$ Anteile der Anleihe $A2$ verkaufen, um die zu hohe Zahlung aus $B3$ auszugleichen. Zur Duplikation der Zahlung in Periode 1 müssen dann $\frac{2{,}52}{108} = 0{,}0233333$ Anteile der Anleihe $A1$ verkauft werden. Folglich ist ein Leerverkauf sinnvoll. Damit ergibt sich folgendes Arbitrage-Portfolio:

Tabelle 2.7
ARBITRAGE-PORTFOLIO ZUR REPRODUKTION VON *A3*

Anleihe	Laufzeit	P	C1	C2	C3
*A*1	1	100,00	108	-	-
*A*2	2	96,54	7	107	-
*A*3	3	95,00	8	8	108
*B*3	3	102,49	11	11	111
Arbitrage-Portfolio					
$+B3 \cdot 0{,}973$	3	99,72	10,7	10,7	108
$-A2 \cdot 0{,}025$	2	–2,44	–0,18	–2,7	
$-A1 \cdot 0{,}023$	1	–2,33	–2,52	0	0
Summe	3	94,95	8	8	108

Mit Hilfe der Arbitrage ist es gelungen, den Cash Flow von *A*3 zu reproduzieren, jedoch kostet dieses Portfolio 0,05 weniger als die Anleihe *A*3. Trotz gleicher Effektivverzinsung ist es also sinnvoller, die Anleihe *B*3 zu erwerben, da das entscheidende **Kriterium** zum Vergleich der Anleihen einer **Laufzeitklasse,** die **Spot Rates** des letzten Zeitraums sind. Dabei sollten die Anleihen mit den jeweils höchsten Spot Rates gekauft und die mit den niedrigsten verkauft werden.

2.4.3 Beispiel Coupon Stripping

Coupon Stripping bezeichnet den Vorgang der Trennung von Mantel und Bogen einer ursprünglichen Kuponanleihe. Die Anleihe wird dadurch in ihre einzelnen Cash Flows zerlegt, die anschließend zu ihrem jeweiligen Barwert veräußert werden. Die einzelnen Komponenten (Zinsscheine und Stammrecht) werden als Strips bezeichnet. Sie sind wirtschaftlich gesehen Nullkuponanleihen, da sie heute zu ihrem jeweiligen Barwert erworben werden können und bei Fälligkeit zum Nennwert zurückgezahlt werden, laufende Kuponzahlungen finden nicht statt.

Das Coupon Stripping ist seit Juli 1997 bei Bundesanleihen zulässig. Damit wird es möglich, die Zahlungsströme einer Bundesanleihe einzeln als Zerobond zu handeln. Strippingberechtigt sind sowohl institutionelle als auch private Investoren, während die Wiederzusammenführung der Strips zur Ursprungsanleihe, das sog. Rebundling, institutionellen Anlegern bzw. für zinsabschlagpflichtige Anleger Kreditinstituten vorbehalten ist. Durch diese Möglichkeit entstehen neue Investitionsstrategien. Dem Investor wird nun eine Vielzahl von Zerobonds mit der Bonität des Bundes angeboten und damit das Problem der geringen Verfügbarkeit von Nullkuponanleihen gelöst. Hinzu kommen steuerliche Aspekte, da der Strip (die Sequenz der Zerobonds) unter Umständen anders als die Anleihe behandelt wird.

Dem Stripping-Vorgang liegt die Überlegung zugrunde, dass es sich bei einem festverzinslichen Wertpapier um ein Portfolio aus Nullkuponanleihen mit unterschiedlichen Fälligkeiten handelt. Somit entstehen beispielsweise durch das Stripping einer zehnjährigen Kuponanleihe mit einem 10%-Kupon p.a. und jährlicher Zinszahlung beim Stripping 11 Nullkuponanleihen (10 Zinskupons mit Nennwert 10 €, plus 1 Stammrecht mit Nennwert 100 €). Die Bewertung der einzelnen Strips erfolgt durch Diskontierung des Nennwertes mit dem jeweiligen Zerozins der Zinsstrukturkurve. Bei Emission wird für die Cum-Anleihe (mit Kupons) eine Wertpapier-Kenn-Nummer (WKN) vergeben. Zusätzlich erhalten die einzelnen Strippingkomponenten (Zinsscheine und Stammrecht) jeweils separate Kennnummern.

Das Stripping ist für Investoren am deutschen Rentenmarkt in zweierlei Hinsicht attraktiv.

1. Seit 1985 die Begebung von Nullkuponanleihen in Deutschland möglich wurde, sind im Verhältnis zum Volumen des Rentenmarktes relativ wenige emittiert worden. Die durch Stripping von Bundesanleihen entstehenden Bund-Strips könnten den Markt für die unter Analysten beliebten Nullkuponanleihen in Deutschland beleben. Durch ein breites Laufzeitband „Zeros“ würden viele — bisher unter Zuhilfenahme von Kuponanleihen konstruierte — Anlagestrategien eine neue Qualität gewinnen.

2. Das weitere Charakteristikum von stripbaren Anleihen ist die unterschiedliche steuerliche Behandlung von Kuponanleihen und Strips. Stripbare Anleihen beinhalten eine Option, die dem Besitzer der Anleihe das Recht einräumt, zwei Portfolios gegeneinander zu tauschen. Die ungestripte Anleihe und das jeweils korrespondierende Portfolio der Strips können durch Stripping bzw. Rebundling gegeneinander getauscht werden. Somit hat der Investor eine zusätzliche Option und kann dieses Recht je nach steuerlichem Umfeld mehrfach ausüben.

Beim Stripping kann der Zusammenhang der Renditen von Kuponanleihen im Bezug auf Zeroanleihen des Bundes anschaulich erläutert werden. Zur Zeit werden meist aus den Zinssätzen der Kuponanleihen mit Hilfe des Bootstrapping die impliziten Preise für die Zerobonds ermittelt. Als Beispiel wird ein Markt mit drei Kuponanleihen (*K*1 bis *K*3) betrachtet:

Tabelle 2.8
MARKTSITUATION AM ANLEIHENMARKT VOR STRIPPING

Anleihe	Laufzeit	Preis	C1	C2	C3	Rendite
*K*1	1	100	108	-	-	8,00%
*K*2	2	96,54	7	107	-	8,97%
*K*3	3	95	8	8	108	10,00%

Der Zinssatz für einen einjährigen Zerobond r_{z1} ist leicht mit 8% zu ermitteln:

$$r_{z1} = \frac{8}{100} = 8\%$$

Der zweite Zahlungsstrom wird in die Zahlungen von 7 in einem Jahr und 107 in zwei Jahren zerlegt. Diskontiert man die erste Zahlung (7) mit dem Zerosatz für ein Jahr ab, ergibt sich deren Barwert. Dieser wird vom Preis der Anleihe abgezogen:

$$96{,}54 - \frac{7}{1{,}08} = 90{,}0585$$

Für die Zahlung von 107 in zwei Jahren werden 90,0585 aufgewandt. Dies entspricht dem theoretischen Preis eines Zerobonds, der sich auf den gestripten letzten Kupon und die Rückzahlung der Kuponanleihe bezieht. Daraus lässt sich ein impliziter Zerozinssatz für zwei Jahre errechnen:

$$90{,}0585 = \frac{107}{\left(1+r_{z2}\right)^2} \quad \Leftrightarrow r_{z2} = 9{,}00\%$$

Mit der gleichen Logik wird dann die nächst längere Anleihe zerlegt. Dies ergibt für das Beispiel

$$95 = \frac{8}{1{,}08} + \frac{8}{1{,}09^2} + \frac{108}{\left(1+r_{z3}\right)^3} \quad \Leftrightarrow r_{z3} = 10{,}13\%$$

Während früher diese Zerlegung nur analytischer Natur war, ist sie nun tatsächlich direkt am Markt umsetzbar. Hinzu kommen jetzt für Anlageentscheidungen die entsprechenden gestripten Bonds (*Z*1 bis *Z*4).

Tabelle 2.9

MARKTSITUATION AM ANLEIHENMARKT NACH STRIPPING

Anleihe	Laufzeit	Preis	C1	C2	C3	Rendite
*K*1	1	100,00	108	-	-	8,00%
*K*2	2	96,54	7	107	-	8,97%
*K*3	3	95,00	8	8	108	10,00%
*Z*1a	1	6,48	7	-	-	8,00%
Z1b	1	7,41	8	-	-	8,00%
*Z*2a	2	90,06	-	107	-	9,00%
*Z*2b	2	6,73	-	8	-	9,00%
*Z*3	3	80,86	-	-	108	10,13%

Zu beachten ist dabei, dass der Barwert des Strips dem Preis der Anleihe finanzmathematisch entsprechen muss. Da sich bei den Kuponanleihen die Rendite aus einem kapitalgewichteten Durchschnitt der Zerozinssätze ergibt, müssen die Zerorenditen bei einer normalen Zinsstrukturkurve über, bei einer inversen unter den Kuponrenditen liegen.

Dies ist eine wesentliche Überlegung, da sich sonst der Investor an der scheinbar höheren Zerorendite (normale Zinsstruktur) bzw. scheinbar kleineren Zerorendite (inverse Struktur) orientieren könnte. Der Effekt beruht auf der Möglichkeit, bei normaler Zinsstruktur die Kupons schon heute zum höheren Forwardsatz anlegen zu können (invers vice versa). Vergleicht der Investor die Anleihen jedoch auf der richtigen Basis, ergeben sich viele Vorteile aus Zerobonds:

– kein Wiederanlagerisiko von Kupons,
– keine Problematik mit „kleinen“ Kuponzahlungen, die schwierig wieder anzulegen sind,
– stärkere Preisreaktion bei Zinsveränderung aufgrund der längeren Duration,
– Reproduktion beliebiger Cash-Flow-Profile,
– Abhängigkeit von nur einem Zinssatz (einfachere Bewertung).

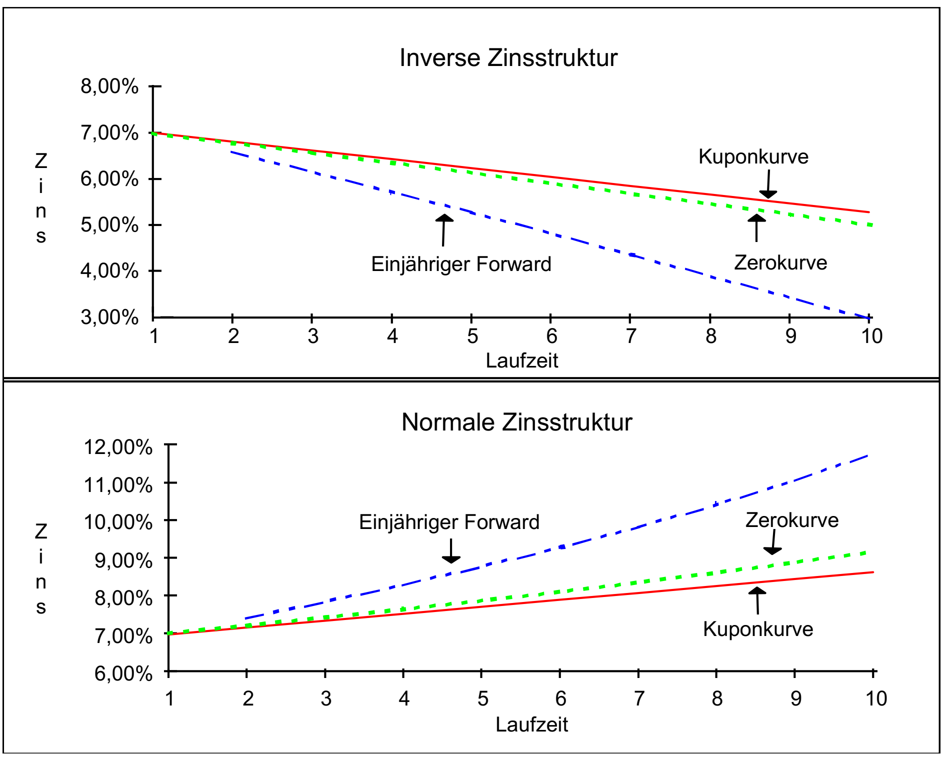

Abbildung 2.2: **Normale und inverse Zinsstruktur**

Diese Aspekte treffen jedoch auf alle Zeroanleihen zu, das Stripping führt nur zu einem größeren liquideren Markt in risikofreien Zerobonds, was aus Investorensicht sehr zu begrüßen ist. Echte Unterschiede ergeben sich in zwei Hinsichten:

1. Wenn Investoren verstärkt Nullkuponanleihen nachfragen und die einzelnen Strips am Markt zu einem höheren Gesamtpreis verkauft werden können als die Cum-Anleihe. Je nach Markteinschätzung der Marktteilnehmer wird die Anlage in Strips dem Kauf der Cum-Anleihe vorgezogen bzw. umgekehrt. Dies bedeutet, dass das Arbitragegleichgewicht zwischen Cum-Anleihe und Strips gestört ist. Durch Stripping oder Rebundling kann ein risikofreier Gewinn erzielt werden.
2. Wenn das Portfolio der Strips aufgrund unterschiedlicher steuerlicher Behandlung einen höheren Wert nach Steuern hat als die Cum-Anleihe. Dies hängt von der individuellen steuerlichen Situation jedes einzelnen Investors ab.

Literatur: Heidorn/Bruttel (1993); Uhlir/Steiner (1991), Heidorn/Vogt (1997)

2.5 Zinsänderungsrisiko

In den letzten Jahren ist die Analyse von Zinsrisiken immer mehr in den Vordergrund getreten. Viele Aktivitäten der Finanzabteilungen beschäftigen sich mit der Frage, in welcher Weise sich Zinskosten bzw. Kurse von **Wertpapieren** bei einer **Zinsänderung** entwickeln. Das Zinsänderungsrisiko kann im Allgemeinen am besten durch eine Veränderung des Marktwertes, also des **Barwertes** eines Zahlungsstroms, beschrieben werden. Dieser Ansatz wird auch im folgenden Abschnitt gewählt.

2.5.1 Sensitivitätsanalyse

Der **Marktwert** eines festverzinslichen Papiers hängt ab von:

- Marktzins,
- Laufzeit,
- Kupon,
- Tilgungsbetrag und -struktur.

Am besten kann die Wirkung einer Änderung dieser Parameter am Beispiel einer Anleihe untersucht werden. Generell muss sich der **Preis** beim Kauf einer Rente so einstellen, dass eine **marktgerechte Verzinsung** erfolgt. Dies gilt insbesondere dann, wenn der Marktzins vom Kupon abweicht. In diesem Abschnitt wird das **Zinsrisiko** als **Kursänderungsrisiko** in Bezug auf Marktzinsänderungen analysiert. Als Beispiel dient eine Anleihe mit folgender Ausstattung:

> **Beispielanleihe:**
>
> Laufzeit: 10 Jahre
> Kupon: 10%
> Tilgung: 100

Entspricht der **Marktzins** dem **Kupon**, muss auch der Kurswert gleich der Tilgung sein.

> **Beispiel:**
>
> Marktzins: 10% $\Rightarrow$ Kurs: 100

Bei einem **Marktzins,** der **größer** als der **Kupon** ist, müssen die Zahlungen stärker diskontiert werden, so dass der Marktwert kleiner als der Tilgungsbetrag ist.

> **Beispiel:**
>
> Marktzins: 12% $\Rightarrow$ Kurs: 88,70 $\Rightarrow$ Rückgang um 11,30

Fällt der **Marktzins,** werden alle Zahlungen geringer abgezinst, der Kurswert muss also steigen.

> **Beispiel:**
>
> Marktzins: 8% $\Rightarrow$ Kurs: 113,42 $\Rightarrow$ Anstieg um 13,42

Daran wird deutlich, dass die Wertveränderungen nicht proportional sind, bei fallenden Zinsen sind die Änderungen größer als bei steigenden Zinsen. Dieser Effekt wird auch als Konvexität bezeichnet.

- ❑ **Abhängigkeit von der Restlaufzeit**

Der Kursänderungseffekt ist größer, je länger die Restlaufzeit ist, denn die Kursunterschiede müssen dann den Zinsunterschied für einen längeren Zeitraum ausgleichen.

Beispiel:

Marktzins: 12% bei Restlaufzeit 5 Jahre $\Rightarrow$ 92,79 $\Rightarrow$ Veränderung um 7,21

Aufgrund der sich automatisch verkürzenden Restlaufzeit verringert sich der Unterschied von Marktwert und Tilgungsbetrag sukzessiv, bis beide kurz vor Fälligkeit praktisch identisch sind.

❑ **Kupon-Höhe**

Ein **höherer Kupon** führt zu einer **kleineren Änderung**, da die Bindungsdauer der Anlage kürzer ist und entsprechend schneller wieder angelegt werden können.

Beispiel:

Marktzins: 13%, Kupon 11% $\Rightarrow$ Kurs: 89,15 $\Rightarrow$ Rückgang von 10,85

Am stärksten wirkt sich eine Zinsänderung bei einem Zerobond aus, da hier das gesamte Kapital für die Restlaufzeit gebunden ist.

❑ **Tilgungsstruktur**

Wird die Anleihe nicht zu 100 zurückgezahlt, sondern zu einem höheren Betrag, wirkt sich dies steigernd auf die absolute Kursveränderung aus, da eine sehr späte Zahlung auch stark diskontiert wird.

Beispiel:

Marktzins: 10% Tilgung 110 $\Rightarrow$ Kurs: 103,86

Marktzins: 12% Tilgung 110 $\Rightarrow$ Kurs: 91,92 $\Rightarrow$ Rückgang von 11,93

(bzw. $\frac{11,93}{103,85} = 11,5\%$)

2.5.2 Sensitivität (Price Value of a Basis Point)

Häufig wird die **Sensitivität** (Price Value of a Basis Point) als Maßzahl für die Wertveränderung des Kurses benutzt. Sie gibt an, wie stark der Preis sich bei einer Marktzinsveränderung von 0,01% (ein Basispunkt) bewegt.

Beispiel:

Marktzins: 10% $\Rightarrow$ Kurs 100

Marktzins: 10,01% $\Rightarrow$ Kurs 99,93858 $\Rightarrow$ Veränderung um -0,06142

Sensitivität: -0,06142

Bei einer Erhöhung des Zinsniveaus um einen Basispunkt fällt die Anleihe um ca. 0,06 €. Dieser Zusammenhang ist also eine spezielle Form der **Zinselastizität,** die wie folgt definiert ist:

$$Zinselastizität = -\frac{relative\ Barwertänderung}{relative\ Zinsänderung}$$

Beispiel:

a)

$$Zinselastizität = -\frac{\frac{0{,}0614}{100}}{\frac{0{,}01}{10}} = -0{,}614$$

b) Bei einer Anleihe mit 10 Jahren Restlaufzeit und einem Kupon von 8% ergibt sich bei einem Marktsatz von 10% ein Kurs von 87,71. Steigt der Marktsatz auf 10,01%, fällt der Kurs auf 87,65. Damit kann die Sensitivität mit –0,0561 und die Zinselastizität mit –0,6396 bestimmt werden.

$$Zinselastizität = -\frac{\frac{0{,}0561}{87{,}71}}{\frac{0{,}01}{10}} = -0{,}6396$$

Diese Sensitivität eignet sich zur **Abschätzung** von erwarteten **Kursänderungen**, denn generell gilt:

$$Kursveränderung = -\ Sensitivität \cdot Zinsänderung_{\%Punkte}$$

Für das Beispiel kann die Kursveränderung mit 0,06 abgeschätzt werden:

$Kursveränderung = -0{,}0561 \cdot 1 = -0{,}06$

Da der Zusammenhang zwischen Kursveränderung und Marktzinsveränderung **nicht linear** ist, **steigt** der **Fehler** der Abschätzung mit der **Höhe der Zinsveränderung**.

Beispiel:

Zinsänderung auf 11%

$$abgeschätzte\ Kursveränderung = -\ 0{,}0561 \cdot 100 = -5{,}61$$
$$wirkliche\ Kursveränderung = 82{,}33 - 87{,}71 = -5{,}38$$

Zinsänderung auf 12%

$$abgeschätzte\ Kursveränderung = -0{,}0561 \cdot 200 = -11{,}22$$
$$wirkliche\ Kursveränderung = 77{,}40 - 87{,}71 = -10{,}31$$

Dieser Effekt kann leicht erklärt werden. Bei einer Abschätzung mit Hilfe der Zinselastizität wird ein linearer Zusammenhang unterstellt, d.h., man zeichnet eine Tangente an die wirkliche Wertveränderungskurve. Da diese jedoch konvex ist, muss der Schätzfehler bei größeren Zinsänderungen zunehmen (vgl. 2.5.3).

2.5.3 Duration

Bei der Analyse von festverzinslichen Anleihen steht die Bindungsdauer als wichtiges Kriterium im Mittelpunkt. Oft wird die Restlaufzeit herangezogen, um unterschiedliche Anleihen zu vergleichen. Jedoch berücksichtigt diese Überlegung nicht, dass schon vor der Fälligkeit im Regelfall Zahlungen erfolgen, die bei einem Vergleich eine wichtige Rolle spielen, da sie zum aktuellen Zinssatz wieder angelegt werden können. Als besseres Kriterium wurde daher die Duration entwickelt, die sich in modifizierter Form auch gut zum Abschätzen von Kursveränderungen eignet.

Das Konzept geht auf **Macaulay** (1938) zurück und wurde dann in den siebziger Jahren wiederentdeckt. Die **Duration** (*D*) gewichtet den Barwert der Zahlungen mit ihrem Zahlungszeitpunkt und setzt sie dann ins Verhältnis zum Barwert. Sie stellt damit die **durchschnittliche Bindungsdauer** des **Barwertes** eines Cash Flows dar.

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t \cdot C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+r)^t}}$$

Im Nenner steht nichts anderes als der Barwert des Cash Flows, also der Kurs der Anleihe. Im Zähler hingegen wird jede Zahlung diskontiert, aber darüber hinaus mit der Zeitperiode gewichtet, die sie vom Starttag entfernt ist. Die Berechnung der Duration für eine Anleihe mit 8% Kupon und 5 Jahren Restlaufzeit bei einem Marktzins von 8,5% ergibt 4,3045 Jahre.

$$D = \frac{421{,}9693}{98{,}0297} = 4{,}3045$$

Bildlich kann man sich diese Berechnung als eine Reihe von Blöcken mit jeweils dem Gewicht des Barwertes der Zahlung, aufgereiht auf einem Brett, vorstellen. Wenn der Abstand der Blöcke von der linken Brettkante der jeweiligen Zeit bis zur Zahlung entspricht, liegt die Duration genau an der Stelle, an der das Brett im Gleichgewicht ist.

Tabelle 2.10

BERECHNUNG DER DURATION EINER 5-JÄHRIGEN 8%-ANLEIHE BEI 8,5% RENDITE

Periode (*t*)	Zahlung	$PV_{Zahlung}$	Periode $\cdot$ $PV_{Zahlung}$	$\frac{PV_{Zahlung}}{PV_{gesamt}}$	$\frac{PV_{Zahlung}}{PV_{gesamt}} \cdot t$
1	8	7,3733	7,3733	7,52%	0,0752
2	8	6,7956	13,5913	6,93%	0,1386
3	8	6,2633	18,7898	6,39%	0,1917
4	8	5,7726	23,0904	5,89%	0,2355
5	108	71,8249	359,1245	73,27%	3,6634
Summe		98,0297	421,9693	100,00%	4,3045

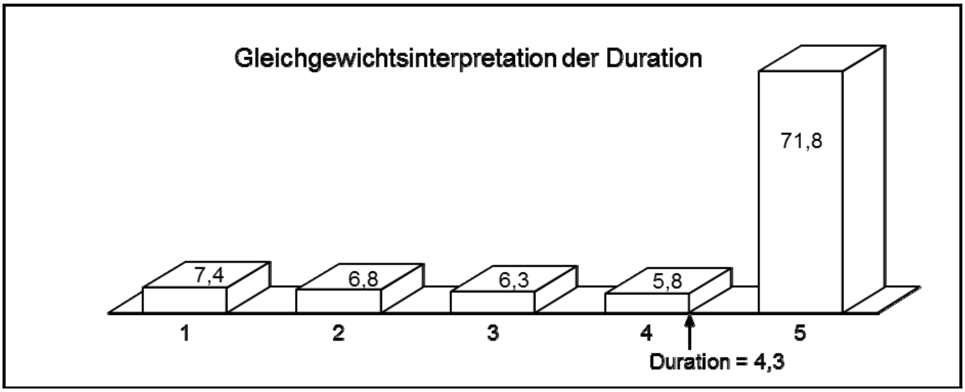

Abbildung 2.3: **Gleichgewichtsinterpretation der Duration**

D ist also ein Zeitmaß, nach dessen Erreichen die **Hälfte des zeitlich gewichteten Barwerts** an den Investor geflossen ist. Solange **keine Zahlungen** anfallen, **verkürzt** sich die **Duration** daher im selben Maß, **wie die Zeit vergeht**. Nach einem weiteren halben Jahr wäre damit $D = 4{,}3045 - 0{,}5 = 3{,}8045$.

Eine alternative Beschreibung bietet die letzte Spalte der Tabelle. Die Duration ist die Summe des prozentualen Anteils des Barwertes einer Zahlung am Kurs der Anleihe, gewichtet mit dem Zeitpunkt der Zahlung.

Vergleicht man die Duration von Kuponanleihen mit deren **Restlaufzeit,** wird deutlich, dass die **Duration** um so **kürzer** ist**,**

- je **höher** der **Kupon**,
- je **höher** die **vorzeitigen Tilgungen** (z.B. Annuitäten),
- je **früher** die **vorzeitigen Tilgungen**,
- je **höher** der **Marktsatz**

ist.

Dies läuft letzlich auf nichts anderes hinaus, als dass die Duration berücksichtigt, wie schnell der Barwert an den Investor zurückfließt. Jede Zinsänderung löst neben der Kursänderung immer einen entgegen wirkenden Wiederanlageeffekt aus, der langfristig auch überwiegt. Am Zeitpunkt der Duration gleichen sich Kursveränderung und Wiederanlageeffekt aus, so dass der Zukunftswert gegen Zinsänderungen immunisiert ist. Die folgende Grafik zeigt diesen Effekt am Beispiel einer 5-jährigen Anleihe mit 8%-Kupon und unterschiedlichen Marktzinsen zum Zeitpunkt 0.

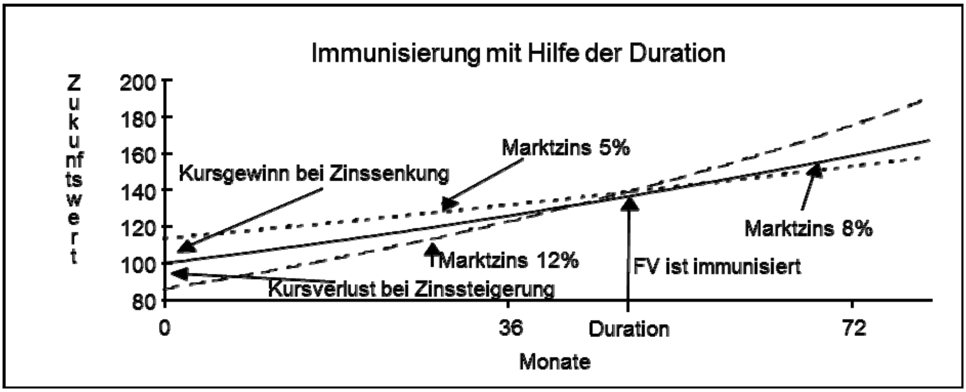

Abbildung 2.4: **Immunisierung mit Hilfe der Duration**

Eine weitere erfreuliche Eigenschaft der Duration ist ihre **Additivität**. Die Duration eines Portfolios kann leicht durch anteilige Gewichtung mit Hilfe des Barwerts der einzelnen Anleihen errechnet werden, da ein Zeitmaß addiert wird.

$$D_{Portfolio} = \sum_{i=1}^{n} \frac{PV_i}{PV_{Portfolio}} \cdot D_i$$

Beispiel:

Portfolio aus den Anleihen *A* und *B*

Anleihe *A*: Kurswert 30 Mio. mit Duration 6

Anleihe *B*: Kurswert 20 Mio. mit Duration 4

$$Duration_{Portfolio} = \frac{30}{50} \cdot 6 + \frac{20}{50} \cdot 4 = 5{,}2$$

Die Duration kann auch als **Risikomaß** herangezogen werden, da sich eine Beziehung von Zinsänderung und Kursänderung mit Hilfe der Duration ableiten lässt. Hierzu benötigt man jedoch die **modified Duration** (D_{mod}) die in einem anderen Zusammenhang schon von Hicks 1939 entwickelt wurde. Für Anleihen mit einem Kupon pro Jahr muss dabei die Macauly-Duration durch ($1 +$ Marktzins) geteilt werden.

$$D_{mod} = \frac{D}{(1+r)}$$

Der Zusammenhang von Kursänderung und Zinsänderung ergibt sich, indem der Barwert einer Anleihe bezüglich des Marktzinses abgeleitet wird:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} C_t \cdot (1+r)^{-t}$$

$$\frac{dPV}{dr} = \sum_{t=1}^{n} - C_t \cdot t \cdot (1+r)^{-t-1} = -\frac{1}{1+r} \cdot \sum_{t=1}^{n} C_t \cdot t \cdot (1+r)^{-t} = -\frac{1}{1+r} \cdot \frac{\sum_{t=1}^{n} C_t \cdot t \cdot (1+r)^{-t}}{PV} \cdot PV$$

$$\Leftrightarrow \frac{dPV}{dr} = -\underbrace{\frac{1}{1+r} \cdot D}_{\substack{\text{modified} \\ \text{Duration}}} \cdot PV \Rightarrow dPV = -\underbrace{\frac{1}{1+r} \cdot D}_{\substack{\text{modified} \\ \text{Duration}}} \cdot PV \cdot dr$$

bzw.

$$Preisveränderung = -D_{mod} \cdot Kurs_{dirty} \cdot Zinsveränderung$$

Die 8%-Kuponanleihe hat eine Restlaufzeit von fünf Jahren. Bei einem Marktsatz von 8,5% wurde die Duration mit 4,3045 Jahren und der Preis mit 98,03 berechnet. Bei einer Änderung des Zinsniveaus auf 8,8% (also $dr = 0{,}003$) kann die Preisveränderung der Anleihe mit $-1{,}167$ approximiert werden.

$$-\frac{4{,}3045}{1{,}085} \cdot 0{,}003 \cdot 98{,}03 = -1{,}167 \text{ €}$$

Dem steht eine rechnerische Kursveränderung von $96{,}87 - 98{,}03 = -1{,}16$ € gegenüber.

Die beiden Ergebnisse liegen also sehr nahe beieinander. Bei größeren Änderungen nimmt die Differenz aber deutlich zu. Fällt das Zinsniveau auf 7,5%, ergibt sich

$$dPV_{approx} = -\frac{4{,}3045}{1{,}085} \cdot 0{,}01 \cdot 98{,}03 = -3{,}889 \text{ €}$$

Die rechnerische Kursveränderung beträgt $102{,}03 - 98{,}03 = 4{,}00$ €.

Zur schnellen Ermittlung der Duration wird die Formel oft auch direkt mit Hilfe der Preisveränderung errechnet. Bei einer Renditeveränderung um 0,01% ergibt sich entsprechend eine Sensitivität der betrachteten Anleihe von:

$$dPV_{8{,}5\%\to 8{,}51\%} = Sensi = 97{,}99079798 - 98{,}02967896 = -0{,}038881$$

Da diese Wertveränderung auch mit Hilfe der modified Duration berechnet werden kann, muss also gelten:

$$dPV_{8{,}5\%\to 8{,}51\%} = Sensi = -\frac{D}{1+r} \cdot 0{,}0001 \cdot PV$$
$$\Leftrightarrow -0{,}038881 = -\frac{D}{1{,}085} \cdot 0{,}0001 \cdot 98{,}03$$
$$\Leftrightarrow D = 4{,}3034$$

Die Sensitivität entspricht einer numerisch bestimmten Tangente durch Berechnung bei einer kleinen Zinsänderung, während die modified Duration die Tangente analytisch bestimmt, also für infinitesimal kleine Änderungen. In der Praxis kann der Unterschied meist vernachlässigt werden.

2.5.4 Konvexität (Convexity)

Wie im Abschnitt 2.5.2 gezeigt wurde, kann mit Hilfe der modifizierten Duration eine approximative Rechnung in Bezug auf die Preisveränderung einer Anleihe erstellt werden. Das Ergebnis weicht um so mehr vom wirklichen Wert ab, je größer die Renditeveränderung ist. Dieser Effekt kommt dadurch zustande, dass bei der Approximation an der Stelle des aktuellen Kurses eine Tangente an die wirkliche Rendite-Kurskurve gelegt wird. Da diese Kurve jedoch gekrümmt (konvex) ist, ist der Abstand zwischen der Kurve und der Tangente um so größer, je weiter der neue Anleihekurs vom alten entfernt ist. Die Formel für die **Convexity** an einer Stelle ergibt sich entsprechend als **zweite Ableitung der Rendite-Kurskurve** (Duration ist die erste Ableitung), erklärt also die **Veränderung der Duration** bei einer weiteren Veränderung der Zinsen.

$$Convexity = \frac{d^2PV}{dr^2}$$

$$\frac{dPV}{dr} = \sum_{t=1}^{n} -C_t \cdot t \cdot (1+r)^{-t-1}$$

$$\frac{d^2PV}{dr^2} = \sum_{t=1}^{n} -(-t-1) \cdot C_t \cdot t \cdot (1+r)^{-t-2} = \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{t \cdot (t+1) \cdot C_t}{(1+r)^t}$$

Diese **"Gebogenheit"** ist bei Portfolios gleicher Duration auch eine sehr angenehme Eigenschaft, denn bei **größerer Konvexität** führt eine **Zinssteigerung** zu **kleineren Verlusten** und eine **Zinssenkung zu größeren Gewinnen** im Vergleich zu einer Kurve mit geringerer Konvexität.

Die **Schwierigkeiten** bei dieser Analyse sind die Annahmen

- einer Parallelverschiebung der Zinskurve
  und
- der **Konstanz der Spreads** (Renditedifferenz) verschiedener Anleihen bei einer Veränderungen der Zinsen.

Grundsätzlich **steigt** die **Convexity** einer Anleihe mit gleicher Duration bei:

- **sinkendem Kupon** (bei gleicher Rendite und Restlaufzeit),
- **sinkender Rendite** (bei gleichem Kupon und Restlaufzeit),
- **längerer Restlaufzeit** (bei gleichem Kupon und gleicher Rendite).

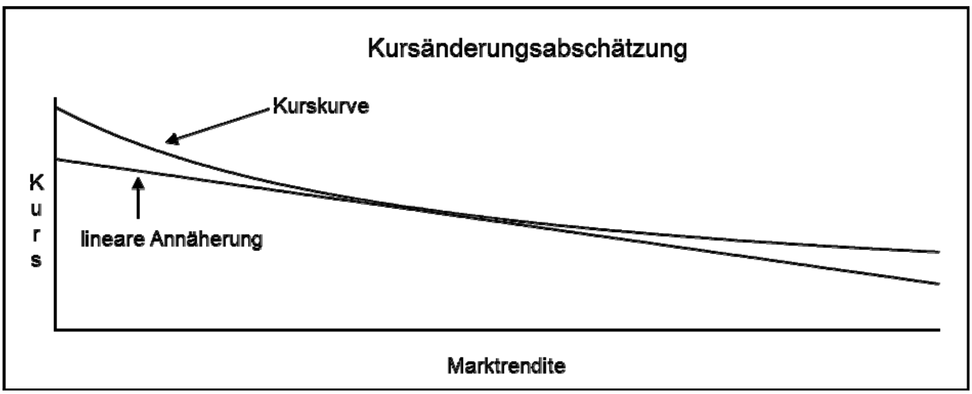

Abbildung 2.5: **Kursänderungsabschätzung**

Jedoch muss betont werden, dass bei Renditeveränderungen der **Löwenanteil** der **Preisveränderung** mit der **Duration** erklärt werden kann. Da der Preis für Convexity im Normalfall eine geringere Rendite bzw. eine Optionsprämie ist, sind meistens sehr starke Zinsänderungen für eine ertragreiche Steuerung der Convexity notwendig. Darüber hinaus überlagern die Veränderungen der Zinsstrukturkurve oft diesen Effekt, so dass die **Kernentscheidung** bei der Portfolioplanung immer die **Duration** sein muss. Erst dann sollte eventuell die Konvexität analysiert werden. Letztlich ist der "Kauf" zusätzlicher Konvexität nichts anderes als eine Vergrößerung der Position in Bezug auf Zinsvolatilität. Bei gleicher Duration ist die Anleihe mit der höheren Konvexität zu bevorzugen, da der Besitzer bei fallenden

Zinsen überproportional profitiert und bei steigenden Zinsen unterproportional verliert.

Bei der Aufstellung eines **Hedges** ist es immer vorteilhaft, wenn bei gleicher Duration die **Long Position konvexer** als die Short Position ist. Dies bedeutet bei einer Renditeerhöhung, dass die im Besitz befindliche Position langsamer an Wert verliert als die einzudeckende Position. Fällt der Zins, gewinnt die Long Position schneller an Wert als die Short Position verliert. Die **Wertveränderung** der Gesamtposition ist also **bei jeder Zinsveränderung positiv!**

Literatur: Klotz (1985), Salomon Brothers (1985), Kempfle (1990), Uhlir/Steiner (2000)

2.6 Effektivverzinsung bei gebrochenen Laufzeiten

Bei der Ermittlung einer Effektivverzinsung mit **gebrochenen Perioden** muss zuerst der zu zahlende Betrag ermittelt werden. Da zum Kurs die **Stückzinsen** hinzukommen, werden einige Anmerkungen zu deren Berechnung vorangestellt.

2.6.1 Stückzinsen

In vielen Ländern wird zur Vereinfachung bei den **Stückzinsen** das **Jahr** mit einer Basis von **360 Tage**n gerechnet, d.h. **jeder Monat wird mit 30 Zinstagen** gezählt. In **anderen** Ländern (u.a. in Deutschland) werden teilweise die **Zinstage genau** gezählt und dann mit der Basis 360, 365 oder **taggenau** (actual) kombiniert. Hinzu kommt im Rahmen der Preisangabenverordnung die Teilung des Jahres in zwölf gleich lange Monate, dies entspricht also einer Monatslänge von $365/12 = 30{,}42$ Tagen. Darum ist es wichtig, die Usancen eines Marktes genau zu kennen. Diese Zählweisen spielen für die Stückzinsen, aber auch für die Kuponhöhe bei einem kurzen bzw. langen ersten Kupon eine Rolle. Im Folgenden sollen die wichtigsten Methoden kurz angesprochen werden.

Bei normalen Kuponbonds werden dazu folgende Informationen benötigt:

T_{-1} = Termin der letzten Kuponzahlung vor dem Verkauf

T_s = Abrechnungstag (Settlement oder Valuta-Datum)

T_1 = Termin für die nächste Kuponzahlung

Die Zeitspanne **zwischen** den **Kuponzahlungen** bestimmt dabei die **Basisperiode**. Die **gebrochene Periode** (*f*) dauert hingegen vom **Abrechnungstag bis** zur nächsten darauffolgenden **Kuponzahlung**, dabei spielt die gebrochene Periode eine wichtige Rolle bei der Abzinsung. Die gerechnete Länge der Zeit ist abhängig von der gewählten Usance. Im Folgenden soll dies mit der Anleihe der Deutschen Bundespost von 1986 als Beispiel erläutert werden. Dabei gehen wir von der Valuta 4.10.2000 aus. Die Anleihe ist am 2.4.2010 fällig und mit einem 5 3/4-Kupon ausgestattet.

- **Usance 30/360**

Volle Monate werden mit 30 Zinstagen gerechnet. Bei **Perioden pro Jahr** (*p*) ergibt sich also:

$$f = \frac{T_1 - T_s}{\frac{360}{p}}$$

$$Stückzinsen\ (S) = \frac{(1-f)\ Kupon}{p} \text{ für } f < 1 \text{ und } S = 0 \text{ für } f = 1$$

Dies ergibt für unser Beispiel:

$T_1 \quad = 2.4.2001$

$T_s \quad = 4.10.2000$

$T_1 - T_s \quad = 178$

$$f = \frac{178}{360} = 0{,}494444$$

$$Stückzinsen = 0{,}50556 \cdot 5{,}75 = 2{,}9069 = 2{,}91$$

Früher war bei Monaten mit 31 Tagen in der Regel der 31. kein Zinstag (d.h. die Zeit vom 1. bis 31. Mai zählte als 29 Zinstage, da der erste Mai als Valutatag nicht mitzählt). Heute wird meist mit der amerikanischen SIA Usance gearbeitet. Fällt das Enddatum auf den 31., wird dieser wie der 1. des Folgemonats behandelt.

- **Usance act/360**

Bei dieser Berechnung werden die Tage zwischen den Terminen zwar genau gezählt, jedoch als Basis ein Jahr mit 360 Tagen zugrunde gelegt.

$$f = \frac{(T_1 - T_s)}{\frac{360}{p}}$$

$$Stückzinsen = (T_S - T_{-1}) \cdot \frac{Kupon}{360}$$

$T_1 \quad = 2.4.2001$

$T_s \quad = 4.10.2000$

$T_1 - T_s \quad = 180$

$T_{-1} \quad = 2.4.2000$

$(T_s - T_{-1}) = 185$

$$f = \frac{180}{360} = 0{,}5$$

$$Stückzinsen = 185 \cdot \frac{5{,}75}{360} = 2{,}9549 = 2{,}95$$

❑ **Usance act/act** (gültig im Euro Anleihenmarkt)

Sowohl im Zähler als auch im Nenner werden die wirklichen Tage berücksichtigt. Dies ergibt daher

$$f = \frac{(T_1 - T_s)}{(T_1 - T_{-1})}$$

$$Stückzinsen = \frac{(T_s - T_{-1})}{(T_1 - T_{-1})} \cdot Kupon$$

Für unser Beispiel ergibt sich:

$T_1 - T_{-1} = 365$

$$f = \frac{180}{365} = 0{,}4932$$

$$Stückzinsen = \frac{185}{365} \cdot 5{,}75 = 2{,}9144 = 2{,}91$$

❑ **Usance 30,42/365**

Für die Angabe von Effektivzinsen im Kundengeschäft wird ab 1999 bei gleichen Monatsabständen der Zahlungen mit 30,42 Tagen pro Monat unabhängig von der wirklichen Monatslänge gearbeitet. Dies entspricht letztlich der 30/360-Methode. Ändern sich die Termine jedoch im Zeitablauf, muss die act/act-Methode angewandt werden.

2.6.2 Grundsätzliche Analyse

Während bei **glatten Laufzeiten** die Errechnung des **Effektivsatzes eindeutig** war, da jeder Kupon mit den entsprechenden Jahren abgezinst wurde, gibt es bei der gebrochenen Periode verschiedene Methoden. Die Unterschiede bestehen in den **Annahmen der Häufigkeit der Zinsverrechnung pro Jahr** und damit der Zinseszinswirkung, in der Art der Diskontierung und der Umrechnung in entsprechende periodenkonforme Zinssätze. Im Folgenden wird immer von der Usance 30/360 ausgegangen.

Grundsätzlich ändert sich der Zahlungsstrom nur leicht. Da die **Kupon- und Tilgungszahlungen** zu **unveränderten Terminen** erfolgen, verändert sich nur der ursprüngliche Bezugszeitpunkt T_s. Dabei wird die gebrochene Periode immer an den Anfang des Zahlungsstroms gestellt. Zusätzlich zum Kaufpreis müssen die Stückzinsen gezahlt werden.

Bei der **Verschiebung** um die **gebrochene Periode** (*f*) muss nur die Diskontierung um f erhöht werden. Dies wird an einem Beispiel deutlich. Beim Kauf einer Anleihe mit einem Kupon von 10% und einer Restlaufzeit von 1,5 Jahren müssen als Kaufpreis 98 zuzüglich Stückzinsen aufgewandt werden. Die Stückzinsen ergeben sich aus:

$$Stückzinsen = \frac{180}{360} \cdot 10 = 5$$

Damit ergibt sich ein Cash Flow von:

Tabelle 2.11

CASH FLOW EINER ANLEIHE MIT 1,5 JAHREN RESTLAUFZEIT

Datum	1.7.1999	1.1.2000	1.7.2000	1.7.2001
	$= T_{-1}$	$= T_s$	$= T_1$	$= T_2$
Tage	0	180	360	720
Cash flow		–103	10	110

Bei einer genauen Einbeziehung der Tage in die Effektivzinsberechnung muss dies entsprechend bei der Diskontierung berücksichtigt werden. Die entsprechenden Abzinsungsfaktoren werden nicht mehr mit den Jahren, sondern mit dem Zinstageabstand, geteilt durch 360, berechnet.

$$103 = \frac{10}{(1+IRR)^{\frac{180}{360}}} + \frac{110}{(1+IRR)^{\frac{540}{360}}}$$

Für die betrachtete Anleihe errechnet sich ein interner Zins von 11,4223%; es muss also gelten:

$$103 = \frac{10}{(1+0{,}114223)^{\frac{180}{360}}} + \frac{110}{(1+0{,}114223)^{\frac{540}{360}}} = \frac{10}{1{,}0556} + \frac{110}{1{,}1761} = 9{,}4736 + 93{,}5264$$

Jedoch hilft es zur Verallgemeinerung und Erklärung anderer Methoden, die Analyse einmal etwas anders aufzubauen. Betrachten wir zuerst die ungebrochenen Laufzeiten und diskontieren alle Zahlungsströme der Anleihe auf die Periode T_1 ab. Anschließend wird dann mit Hilfe der gebrochenen Periode die Zahlung auf den Kaufzeitpunkt abgezinst.

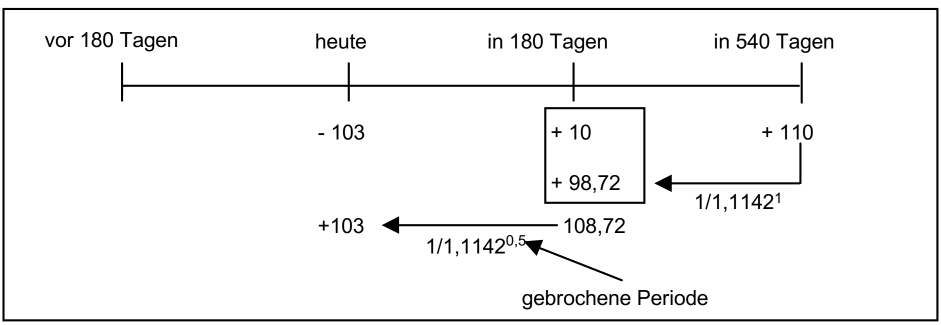

Abbildung 2.6: **Diskontierung der Zahlung auf den Kaufzeitpunkt**

Die Formel für glatte Laufzeitjahre ergab

$$P = \frac{Rückzahlung}{q^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{Koupon}{q^j}$$

mit $q = 1 + \frac{IRR}{100}$

Unter Ausnutzung der Summenformel lautet die Gleichung folgendermaßen:

$$P = \frac{Rückzahlung}{q^n} + C \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)}$$

Dies muss jetzt um die Stückzinsen und die Verschiebung der gebrochenen Periode verändert werden. Es ergibt sich also:

$$P + Stückzinsen = \frac{1}{q^f} \cdot \left(\frac{Rückzahlung}{q^n} + C \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q^n \cdot (q-1)} \right)$$

Dies entspricht der Effektivverzinsung nach ISMA bei glatten Laufzeiten und kann als Basisformel für den Vergleich unterschiedlicher Berechnungsmethoden herangezogen werden.

2.6.3 Unterschiedliche Usancen

Während sich die unterschiedlichen Effektivzinsmethoden bei glatten und vollen Jahren Laufzeit nicht unterscheiden, sind die Annahmen in Bezug auf die gebrochene Periode, auf Restlaufzeiten unter einem Jahr und bei der Umrechnung vom Periodenzins auf den Jahreszins unterschiedlich. Dies soll hier an den gängigsten Verfahren kurz erläutert werden.

Als Beispiel dienen die Anleihen aus den Abschnitten 2.1 und 2.6 mit folgenden Ausstattungsmerkmalen:

Beispielanleihen *A* und *B*:

Kupon:	8%
Restlaufzeit:	9 Jahre
Tilgung:	102
Kurs:	110
Anleihe *A*:	jährlicher Kupon
Anleihe *B*:	halbjährlicher Kupon

Beispielanleihen *C* und *D*:

Kupon:	5,75%
Valuta:	4.10.2000
Fälligkeit:	2.4.2010
Tilgung:	100
Kurs:	85,20
Anleihe *C*:	jährlicher Kupon
Anleihe *D*:	halbjährlicher Kupon

❑ ISMA (AIBD)

Um die unterschiedliche Renditerechnung auf dem Euromarkt zu vereinheitlichen, beschloss die **Association of International Bond Dealers** (AIBD) die "Rule 803". Inzwischen hat sich die Vereinigung in International Securities Market Association (ISMA) umbenannt. Da die Methode weltweit angewendet wird, spricht man häufig auch von der internationalen Methode. Die ISMA-Formel geht im Prinzip genauso vor, wie im Abschnitt 2.6.1 beschrieben wurde. Alle Zahlungen werden **ab der ersten vollständigen Periode auf diesen Zeitpunkt abgezinst** und dann durch **exponentielle Abzinsung mit der gebrochenen Periode auf den Valutatag** gebracht. Erweitert man die Formel für *p* Kupons, ergibt sich:

$$P + Stückzinsen = \frac{1}{q^f} \cdot \left(\frac{Rückzahlung}{q^n} + \frac{C}{p} \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q^n \cdot (q-1)} \right)$$

p = Anzahl der Kupons im Jahr

n = Anzahl der Perioden

Diese Formel ergibt einen periodenbezogenen Effektivsatz, d.h. bei halbjährigem Kupon ist das Ergebnis semi annual. Da aber für die Vergleichbarkeit ein Jahreszins vorgeschrieben ist, wird er dann entsprechend nach der Formel:

$$IRR_{ann} = \left(1 + IRR_{Periode}\right)^{Periode} - 1$$

exponentiell umgerechnet (vgl. 2.3.1).

Für die letzte Periode des Bonds gibt es keine expliziten Angaben, es kann davon ausgegangen werden, dass die Rechenformel erhalten bleibt und nicht mit einer Geldmarktverzinsung gearbeitet wird (vgl. SIA).

Ergebnis für Anleihe A:	IRR_{pa}	$= 6{,}66\%$
Ergebnis für Anleihe B:	IRR_{sa}	$= \frac{6{,}67}{2}\% = 3{,}335\% \Rightarrow IRR_{pa} = 6{,}78\%$
Ergebnis für Anleihe C:	IRR_{pa}	$= 8{,}03\%$
Ergebnis für Anleihe D:	IRR_{sa}	$= \frac{8}{2}\% = 4\% \Rightarrow IRR_{pa} = 8{,}16\%$

(Anmerkung: Der Taschenrechner HP17B berechnet den Jahressatz mit multiplikativer Verknüpfung aus dem halben Jahr heraus; vgl. SIA.)

❑ SIA-Methode

Die Methode der **Securities Industry Association (SIA)** liegt vielen Taschenrechnern (z.B. HP17B und folgende) zugrunde. Sie entspricht weitgehend dem **ISMA-Verfahren** bis auf zwei **Ausnahmen**:

Bei der **Umrechnung auf den jährlichen Zins** wird nicht aufgezinst, sondern einfach **multipliziert**:

$$IRR_{ann} = IRR_p \cdot p$$

Außerdem wird in der letzten Periode vor Fälligkeit der Effektivsatz nach Geldmarktusancen berechnet, da Anleihen dann Opportunitätsprodukte für den Geldmarkt (vgl. 2.2) sind.

$$IRR = \left(\frac{Rückzahlung + \frac{C}{p}}{P + Stückzinsen} - 1 \right) \cdot \frac{100}{f}$$

Ergebnis für Anleihe *A*:	IRR_{pa}	$= 6{,}66\%$
Ergebnis für Anleihe *B*:	IRR_{sa}	$= \frac{6{,}67}{2}\% = 3{,}335\% \Rightarrow IRR_{pa} = 6{,}67\%$
Ergebnis für Anleihe *C*:	IRR_{pa}	$= 8{,}03\%$
Ergebnis für Anleihe *D*:	IRR_{sa}	$= \frac{8}{2}\% = 4\% \Rightarrow IRR_{pa} = 8\%$

❑ US-Treasury

Das **Schatzamt der Vereinigten Staaten** berechnet die glatten Perioden identisch mit der SIA-Methode, jedoch wird in der gebrochenen Periode nicht exponentiell, sondern **linear abgezinst.** Daraus ergibt sich folgende Formel:

$$P + Stückzinsen = \frac{1}{1 + f \cdot \frac{IRR}{100}} \cdot \left(\frac{Rückzahlung}{q^n} + \frac{C}{p} \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q^n \cdot (q-1)} \right)$$

In der letzten Periode mit $n = 0$ entspricht diese Formel dann genau der SIA-Methode. Auch die Umrechnung in den Jahreseffektivzins ist identisch mit SIA.

Ergebnis für Anleihe *A*:	$IRR_{pa} = 6{,}66\%$	
Ergebnis für Anleihe *B*:	$IRR_{sa} = \frac{6{,}67}{2}\% = 3{,}335\%$	$\Rightarrow IRR_{pa} = 6{,}67\%$
Ergebnis für Anleihe *C*:	$IRR_{pa} = 8{,}02\%$	
Ergebnis für Anleihe *D*:	$IRR_{sa} = 4{,}01\%$	$\Rightarrow IRR_{pa} = 8{,}02\%$

❑ Moosmüller

Im deutschen Rentenhandel wird häufig nach der Moosmüller-Formel gerechnet. Die Rechenformel stimmt mit der **US Treasury-Methode** überein, die **gebrochene Periode** wird also **linear abgezins**t. Jedoch wird bei der **Umrechnung in einen Jahreseffektivzins** wie bei der ISMA-Methode **exponentiell** aufgezinst.

Ergebnis für Anleihe *A*:	$IRR_{pa} = 6{,}66\%$	
Ergebnis für Anleihe *B*:	$IRR_{sa} = \frac{6{,}67}{2}\% = 3{,}335\%$	$\Rightarrow IRR_{pa} = 6{,}78\%$
Ergebnis für Anleihe *C*:	$IRR_{pa} = 8{,}02\%$	
Ergebnis für Anleihe *D*:	$IRR_{sa} = 4{,}01\%$	$\Rightarrow IRR_{pa} = 8{,}17\%$

Um dieses Ergebnis zu verdeutlichen, wird im Folgenden das Beispiel aus der grundsätzlichen Analyse (vgl. 2.6.2), also eine Anleihe mit einem Kupon von 10% bei einer Restlaufzeit von 1,5 Jahren zum Kurs von 98, dargestellt. Nach ISMA ergab sich eine Verzinsung von 11,423%; hingegen errechnet sich bei Moosmüller eine Rendite von 11,301%, da die gebrochene Periode linear abgezinst wird. Dies ergibt dann folgendes Bild:

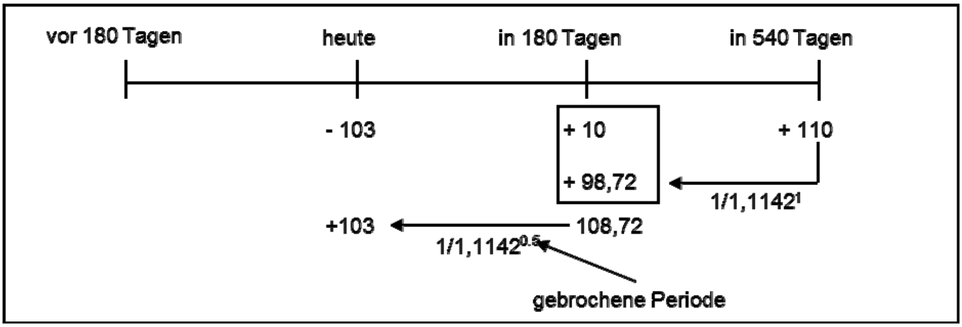

Abbildung 2.7: **Renditeberechnung nach Moosmüller**

❑ Preisangabenverordnung (PAngV)

Auf Basis der Verbraucherkreditrichtlinie wird in Europa im Regelfall mit einem taggenauen Abstand (act/act) und exponentieller Diskontierung (ISMA) gearbeitet. Da Kredite jedoch keine Stückzinsen zahlen, liegt die gebrochene Periode am Ende der Laufzeit, während sie bei Anleihen meist am Anfang liegt. Der deutsche Gesetzgeber wird vermutlich bei monatlichen Krediten die Usance 30,42/365 nutzen, da dann bei gleichem Cash Flow der Effektivzins nicht mit dem Tag der Aufnahme schwanken kann.

Um die Auswirkungen der unterschiedlichen Verfahren zu demonstrieren, sind in den folgenden Tabellen die Annahmen und einige Ergebnisse der Verfahren bei unterschiedlichen Bedingungen angegeben.

Tabelle 2.12

ÜBERSICHT ÜBER UNTERSCHIEDLICHE EFFEKTIVZINSVERFAHREN

	ISMA/PAngV	**SIA**	**Treasury**	**Moosm.**
Zins ver.	bei jeder Zahlung			
Diskont gebr. Per.	exponentiell		linear	
$r_{e_{ann}}$	expo.	Multiplikation mit p		expo.

Tabelle 2.13

ÜBERSICHT ÜBER RENDITEUNTERSCHIEDE DER EFFEKTIVZINSVERFAHREN

Kurs	100	100	100	90	90	90	98	98	98	98	98
Kupon	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
Kupon/Jahr	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
Laufzeit:	5	5	1	9	9,1	9,5	1,1	1,2	1,37	1,5	1,9
ISMA	8,00	8,16	8,16	9,72	9,70	9,64	9,97	9,79	9,56	9,42	9,18
SIA	8,00	8,00	8,00	9,72	9,70	9,64	9,97	9,79	9,56	9,42	9,18
ISMA – SIA	0,00	0,16	0,16	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Treasury	8,00	8,00	8,00	9,72	9,69	9,62	9,93	9,72	9,48	9,35	9,16
ISMA-Treasury	0,00	0,16	0,16	0,00	0,01	0,02	0,04	0,07	0,08	0,08	0,02
Moosmüller	8,00	8,16	8,16	9,72	9,69	9,62	9,93	9,72	9,48	9,35	9,16
ISMA – Moos	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,07	0,08	0,08	0,02

Es zeigt sich, dass bei einer Bewertung nach **ISMA und Moosmüller** deutliche **Unterschiede** der Renditen bei der Bewertung eines **identischen Cash Flows** möglich sind. Ein Vergleich von Renditen unterschiedlicher Verfahren kann also schnell zu Fehlschlüssen führen.

Literatur: Wagner (1988), Fage (1987), Wimmer/Stöckl-Pukall (1998)

http://www.springer.com/978-3-658-13447-1

Finanzmathematik in der Bankpraxis
Vom Zins zur Option
Heidorn, Th.; Schäffler, C.
2017, X, 330 S. 128 Abb., Hardcover
ISBN: 978-3-658-13447-1