2 Definitionen und Vorüberlegungen

Seien M eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit und $\alpha, \beta > 0$.

Definition 2.1. Sei $0 \leqslant k \leqslant n$. Wir bezeichnen mit $\Omega^k(M) := \Gamma(\Lambda^k T^*M)$ den Raum aller glatten Differentialformen vom Grad k auf M, d.h., aller glatten Schnitte ω der k-ten äußeren Potenz des Kotangentialbündels von M. Das bedeutet, dass jedem $p \in M$ eine reelle alternierende Multilinearform ω_p auf dem Tangentialraum T_pM zugeordnet wird, und zwar so, dass für alle Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$ die Abbildung

$$M \to \mathbb{R} : p \mapsto \omega_p\big((X_1)_p, \dots, (X_k)_p\big)$$

glatt ist.
Der Raum $\Omega^k(M, \mathbb{C})$ sei wie oben mit "komplex" anstelle von "reell" und $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}$ definiert, d.h., $\Omega^k(M, \mathbb{C}) = \Omega^k(M) \otimes \mathbb{C}$.

Glatte Differentialformen können entlang differenzierbarer Abbildungen zurückgezogen werden. Die Räume $\Omega^k(M)$ sind zudem ausgestattet mit der äußeren Ableitung $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, welches mit dem Rücktransport verträglich ist:

Definition 2.2. Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N. Dann ist $f^* : \mathcal{C}^\infty(N) \to \mathcal{C}^\infty(M) : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ der induzierte Rücktransport auf Funktionen und $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ für $0 < k \leqslant n$ der durch

$$(f^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) := \omega_{f(p)}(df_p(X_1), \dots, df_p(X_k))$$

für alle $p \in M$, $X_1, \dots, X_k \in T_pM$ und $\omega \in \Omega^k(N)$ gegebene Rücktransport auf k-Formen.

Bemerkung 2.3. Die äußere Ableitung d ist natürlich, d.h., für alle differenzierbaren Abbildungen $f : M \to N$ zwischen zwei riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N gilt, dass $f^*d\omega = d(f^*\omega)$ für alle $\omega \in \Omega^k(N)$. ([Jän03, S. 145])

Definition 2.4. Sei $0 \leqslant k \leqslant n$. Das L^2-Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ von zwei glatten kompakt getragenen k-Formen ω und σ auf M ist wie folgt definiert:

$$(\omega, \sigma) := \int_M \langle \omega, \sigma \rangle.$$

Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche punktweise definierte Skalarprodukt auf Differentialformen und es wird bzgl. der riemannschen Volumendichte integriert.

S.F. Beitz, *Spektren verallgemeinerter Hodge-Laplace-Operatoren*,
BestMasters, DOI 10.1007/978-3-658-13110-4_2

Die Vervollständigung der glatten kompakt getragenen k-Formen $\Omega_c^k(M)$ bzgl. $(\cdot,\cdot)$ bezeichnen wir mit $\Omega_{L^2}^k(M) := L^2(M, \Lambda^k T^*M)$.
Weiterhin sei $\Omega_{L^2}^k(M,\mathbb{C}) := \Omega_{L^2}^k(M) \otimes \mathbb{C}$.

Wir haben nun alle Mittel beisammen um den zentralen Operator dieser Arbeit einzuführen.

Definition 2.5. Wir definieren den Operator

$$F_{\alpha\beta}^M := \alpha d\delta + \beta\delta d$$

auf dem Raum $\Omega^1(M)$. Hierbei ist δ der zu d formal adjungierte Operator, d.h., für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in \Omega_c^k(M)$ und $\eta \in \Omega_c^{k+1}(M)$ ist

$$(d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta).$$

Notation 2.6. Wir bezeichnen den Hodge-Laplace-Operator auf $\Omega^1(M)$ wie folgt:

$$\Delta^M := F_{11}^M = d\delta + \delta d.$$

Für den gewöhnlichen Laplaceoperator auf den glatten Funktionen $\mathcal{C}^\infty(M)$ schreiben wir $\Delta_0^M := \delta d$.

Bemerkung 2.7.

1. $F_{\alpha\beta}^M$ ist formal selbstadjungiert, denn für alle $\omega, \sigma \in \Omega_c^1(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}(F_{\alpha\beta}^M\omega, \sigma) &= \big((\alpha d\delta + \beta\delta d)\omega, \sigma\big) \\ &= \alpha(d\delta\omega, \sigma) + \beta(\delta d\omega, \sigma) \\ &= \alpha(\omega, d\delta\sigma) + \beta(\omega, \delta d\sigma) \\ &= (\omega, F_{\alpha\beta}^M\sigma).\end{aligned}$$

2. Eigenformen zu verschiedenen Eigenwerten von $F_{\alpha\beta}^M$ sind orthogonal bzgl. des L^2-Skalarproduktes. Denn seien $\lambda, \mu \in \mathrm{Spek}(F_{\alpha\beta}^M)$ mit $\lambda \neq \mu$, $\omega \in \mathrm{Eig}(F_{\alpha\beta}^M, \lambda)$ und $\sigma \in \mathrm{Eig}(F_{\alpha\beta}^M, \mu)$. Dann gilt:

$$\lambda(\omega, \sigma) = (F_{\alpha\beta}^M\omega, \sigma) = (\omega, F_{\alpha\beta}^M\sigma) = \mu(\omega, \sigma),$$

weshalb

$$(\lambda - \mu)(\omega, \sigma) = 0.$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ erhalten wir, dass $(\omega, \sigma) = 0$. Daher sind ω und σ orthogonal.

Definition 2.8. Sei $0 \leqslant k \leqslant n$. Der eindeutig bestimmte metrische torsionsfreie Zusammenhang

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

auf M, der Levi-Civita-Zusammenhang, induziert auf folgende Weise einen Zusammenhang

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$$

auf den glatten k-Formen auf M: Für $X, Y_1, \ldots, Y_k \in \Gamma(TM)$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ setzen wir

$$\begin{aligned}(\nabla_X \omega)(Y_1, \ldots, Y_k) := \partial_X \big(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)\big) \\ - \sum_{i=1}^{k} \omega(Y_1, \ldots, Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_k).\end{aligned}$$

Bemerkung 2.9.

1. Man kann nachprüfen, dass mit (2.8) tatsächlich ein Zusammenhang definiert wird. Das bedeutet, dass ∇ $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear im ersten, $\mathbb{R}$-linear im zweiten Eingang ist und die Produktregel

$$\nabla_X(f\omega) = \partial_X f \cdot \omega + f \cdot \nabla_X \omega$$

für alle $X \in \Gamma(TM)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erfüllt.

2. Für zerlegbare k-Formen $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k \in \Omega^k(M)$ gilt darüber hinaus die Produktregel

$$\nabla_X(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge \nabla_X \omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_k$$

für $X \in \Gamma(TM)$.

Lemma 2.10. *Seien $p \in M$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $\omega \in \Lambda^k T_p^* M$, $\eta \in \Lambda^{k+1} T_p^* M$ und $X \in T_p M$. Dann gilt, dass*

$$\langle \omega, X \lrcorner\, \eta \rangle = \langle X^\flat \wedge \omega, \eta \rangle,$$

wobei für alle $Y \in \Gamma(TM)$ die Abbildung $Y \lrcorner$ durch

$$Y \lrcorner : \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M) : \omega \mapsto Y \lrcorner\, \omega := \omega(Y, \cdot, \ldots, \cdot)$$

definiert und $Y^\flat := \langle Y, \cdot \rangle$ das metrisch Duale zu Y ist.

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von T_pM und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die zugehörige duale Basis von T_p^*M, d.h., $e^i(e_j) = \delta^i_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Aufgrund der Linearität in den drei Argumenten können wir annehmen, dass

$$\begin{aligned} \omega &= e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, \\ \eta &= e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{k+1}} \end{aligned}$$

und $X = e_l$ für $l \in \{1, \dots, n\}$, $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ und $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{k+1} \leqslant n$. Dann ist

$$\begin{aligned} X \lrcorner \eta &= e_l \lrcorner (e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{k+1}}) \\ &= \begin{cases} (-1)^{m-1} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^{j_m}} \wedge \cdots \wedge e^{j_{k+1}} & \exists m : l = j_m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^{j_m}} \wedge \cdots \wedge e^{j_{k+1}} \rangle \in \{0, 1\}.$$

Das letztere Skalarprodukt ist eins im Fall, dass $l = j_m$ und zusätzlich für die Indextupel

$$(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, \widehat{j_m}, \dots, j_{k+1})$$

gilt, ansonsten ist das Skalarprodukt null. Diese beiden Bedingungen sind äquivalent zu der Bedingung

$$(i_1, \dots, i_{m-1}, l, i_{m+1}, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_{k+1}).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} \langle e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^{j_m}} \wedge \cdots \wedge e^{j_{k+1}} \rangle \\ = \langle e^l \wedge e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{k+1}} \rangle \end{aligned}$$

gilt, also insgesamt

$$\langle \omega, X \lrcorner \eta \rangle = \langle X^\flat \wedge \omega, \eta \rangle.$$

□

Wir überlegen uns mit Hilfe von Lemma 2.10 wie das äußere Differential d und die Koableitung δ in Termen des Zusammenhangs auf Formen geschrieben werden können.

Proposition 2.11. *Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine lokale Orthonormalbasis von TM und $\{e^1, \dots, e^n\}$ die zugehörige duale Basis von T^*M. Dann gilt:*

$$d = \sum_{i=1}^n e^i \wedge \nabla_{e_i} \quad \textit{und} \quad \delta = -\sum_{i=1}^n e_i \lrcorner \nabla_{e_i}.$$

Beweis. Sei $0 \leqslant k \leqslant n$. Wir zeigen zunächst die Formel für d. Sei $\widetilde{U} \subseteq M$ offen, $\{E_1, \ldots, E_n\} \subset \Gamma(\widetilde{U}, TM)$ eine lokale Orthonormalbasis von TM, $\{E^1, \ldots, E^n\}$ die zugehörige duale Basis, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ und $p \in \widetilde{U}$. Wir definieren den Isomorphismus

$$f : \mathbb{R}^n \to T_pM : \sum_{i=1}^{n} v^i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} v^i E_i\big|_p.$$

Sei weiterhin $U \subset M$ eine offene Umgebung von p, sodass $\exp_p\big|_{\exp_p^{-1}(U)}$ ein Diffeomorphismus ist. Hierbei ist $\exp_p$ die riemannsche Exponentialabbildung in p. Dann definieren

$$x := f^{-1} \circ \exp_p^{-1} : U \to f^{-1}\big(\exp_p^{-1}(U)\big) =: V \subseteq \mathbb{R}^n$$

riemannsche Normalkoordinaten in p. Für die zugehörigen Koordinatenfelder $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ gilt in p:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p &\overset{\text{Def}}{=} (dx_p)^{-1}(e_i) = d(x^{-1})_{x(p)}(e_i) = d(\exp_p \circ f)_0(e_i) \\
&= \big(d(\exp_p)_{f(0)} \circ df_0\big)(e_i) = \big(\underbrace{d(\exp_p)_0}_{=\mathrm{id}_{T_pM}} \circ df_0\big)(e_i) \\
&= \underbrace{df_0}_{=f,\text{ da } f \text{ linear ist.}}(e_i) = f(e_i) = E_i\big|_p
\end{aligned}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da die Christoffelsymbole in riemannschen Normalkoordinaten in p verschwinden, ist für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p = 0.$$

Damit ist auch $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx^j\big|_p = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, denn für alle $X =$

$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(\widetilde{U}, TM)$ gilt dann in p, dass

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx^j)(X) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\big(dx^j(X)\big) - dx^j\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} X^j - \sum_{l=1}^n dx^j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} X^l\right)\frac{\partial}{\partial x_l} + X^l \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_l}}_{=0}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} X^j - \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} X^l\right) \underbrace{dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)}_{=\delta_l^j} \qquad (1) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} X^j - \frac{\partial}{\partial x_i} X^j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Sei nun $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \omega_{i_1 \cdots k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(M)$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \omega = &\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \omega_{i_1 \cdots k}\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right. \\
&\qquad \left. + \omega_{i_1 \cdots k} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})\right) \\
\overset{(1)}{=} &\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \omega_{i_1 \cdots k}\right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}
\end{aligned}$$

in p und dort somit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n E^i \wedge \nabla_{E_i} \omega &= \sum_{i=1}^n dx^i \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \omega \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \omega_{i_1 \cdots k}\right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\
&= d\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \omega_{i_1 \cdots k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\
&= d\omega.
\end{aligned}$$

Es folgt die erste Behauptung.
Der Beweis für die Formel für δ teilt sich in mehrere Schritte auf.

Schritt 1: Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $X \in \Gamma(TM)$ gilt bekanntlich die Produktregel

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = df(X) + f \cdot \operatorname{div}(X).$$

Mit dieser und dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\begin{aligned}\int_M \partial_X f = \int_M df(X) &= \underbrace{\int_M \operatorname{div}(f \cdot X)}_{=0} - \int_M f \cdot \operatorname{div}(X) \\ &= -\int_M f \cdot \operatorname{div}(X).\end{aligned}$$

Für $\omega, \sigma \in \Omega^1_c(M)$ gilt daher, dass

$$\begin{aligned}-\int_M \langle \omega, \sigma \rangle \operatorname{div}(X) &= \int_M \partial_X \langle \omega, \sigma \rangle \\ &= \int_M \big(\langle \nabla_X \omega, \sigma \rangle + \langle \omega, \nabla_X \sigma \rangle\big).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir, dass

$$\int_M \langle \nabla_X \omega, \sigma \rangle = -\int_M \langle \omega, \nabla_X \sigma \rangle - \int_M \langle \omega, \sigma \rangle \operatorname{div}(X). \tag{2}$$

Schritt 2: Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $X = \sum_{j=1}^n X^j E_j \in \Gamma(TM)$ gilt, dass

$$\begin{aligned}(\nabla_{E_i} E^i)(X) &= \partial_{E_i}\big(E^i(X)\big) - E^i(\nabla_{E_i} X) \\ &= \partial_{E_i} X^i - \sum_{j=1}^n E^i\big((\partial_{E_i} X^j) E_j + X^j \nabla_{E_i} E_j\big) \\ &= \partial_{E_i} X^i - \partial_{E_i} X^i - \sum_{j=1}^n X^j E^i(\underbrace{\nabla_{E_i} E_j}_{=\sum_{l=1}^n \Gamma^l_{ij} E_l}) \\ &= -\sum_{j=1}^n X^j \Gamma^i_{ij} = -\sum_{j=1}^n \Gamma^i_{ij} E^j(X).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\sum_{i=1}^n \nabla_{E_i} E^i = -\sum_{i,j=1}^n \Gamma^i_{ij} E^j. \tag{3}$$

Schritt 3: Es ist für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\operatorname{div}(E_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} E_i, E_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ji}^{j},$$

weshalb

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}(E_i) E^i = \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ji}^{j} E^i \overset{(3)}{=} -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} E^i. \tag{4}$$

Schritt 4: Seien nun $\omega \in \Omega_c^k(M)$ und $\eta \in \Omega_c^{k+1}(M)$. Dann gilt mit Lemma 2.10 und den Schritten 1 und 3, dass

$$\begin{aligned}
\left(\omega, -\sum_{i=1}^{n} E_i \lrcorner \nabla_{E_i} \eta\right) &= -\int_M \sum_{i=1}^{n} \langle \omega, E_i \lrcorner \nabla_{E_i} \eta \rangle \\
&\overset{2.10}{=} -\int_M \sum_{i=1}^{n} \langle E^i \wedge \omega, \nabla_{E_i} \eta \rangle \\
&\overset{(2)}{=} \int_M \sum_{i=1}^{n} \left(\langle \nabla_{E_i} (E^i \wedge \omega), \eta \rangle + \langle \eta, E^i \wedge \omega \rangle \operatorname{div}(E_i) \right) \\
&= \int_M \sum_{i=1}^{n} \langle E^i \wedge \nabla_{E_i} \omega, \eta \rangle \\
&\quad + \underbrace{\int_M \left(\left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{E_i} E^i \wedge \omega, \eta \right\rangle + \left\langle \eta, \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div}(E_i) E^i \wedge \omega \right\rangle \right)}_{\overset{(4)}{=} 0} \\
&= \int_M \langle d\omega, \eta \rangle = (d\omega, \eta) = (\omega, \delta\eta).
\end{aligned}$$

Da ω und η beliebig waren, folgt die zweite Behauptung. $\square$

Um vom Spektrum von $F_{\alpha\beta}^M$ (im Fall, dass M kompakt ist) als Menge von Eigenwerten mit zugehörigen Vielfachheiten sprechen zu können, führen wir das Konzept einer gewichteten Menge ein.

Definition 2.12.

1. Eine gewichtete Menge ist eine Funktion $W : \mathbb{C} \to \mathbb{N}_0$.
2. Falls W einen abzählbaren Träger $\operatorname{supp}(W) := \{z \in \mathbb{C} \mid W(z) \neq 0\} = \{z_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ hat, schreiben wir

$$W := \{(z_1, W(z_1)), (z_2, W(z_2)), \ldots\}$$

bzw.

$$W := \{\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{W(z_1)\text{-mal}}, \underbrace{z_2, \dots, z_2}_{W(z_2)\text{-mal}}, \dots\}_W.$$

3. Seien W und W' gewichtete Mengen, dann sei ihre gewichtete Vereinigung $W \Cup W'$ wie folgt definiert:

$$(W \Cup W')(z) := W(z) + W'(z)$$

   für alle $z \in \mathbb{C}$.

4. Außerdem führen wir für $m, m' \in \mathbb{N}_0$ folgende Notation ein:

$$W\ {}^{m}\Cup^{m'}\ W' := \underbrace{W \Cup \cdots \Cup W}_{m\text{ -mal}} \Cup \underbrace{W' \Cup \cdots \Cup W'}_{m'\text{ -mal}}.$$

   Für $m = 1$ oder $m' = 1$ lassen wir den Index meist weg.

5. Die Differenz von W und W' ist die gewichtete Menge $W \backslash W'$, welche durch

$$(W \backslash W')(z) := \max\{W(z) - W'(z), 0\}$$

   für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert ist.

6. Das Minimum einer gewichteten Menge W mit dem Träger $\operatorname{supp}(W) \subseteq \mathbb{R}$ legen wir durch $\min(W) := \min\big(\operatorname{supp}(W)\big)$ fest.

7. Für $r \in \mathbb{R}^*$ sei $rW(z) := W(\frac{z}{r})$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung 2.13. Anders als in gewöhnlichen Mengen können in gewichteten Mengen Elemente mehrfach auftreten.

Definition 2.14. Seien $\alpha, \beta > 0$ und M kompakt.

1. Wir bezeichnen mit

$$\operatorname{Eig}(F^M_{\alpha\beta}, \lambda) := \{\omega \in \Omega^1(M) \mid F^M_{\alpha\beta}\omega = \lambda\omega\}$$

   den Eigenraum von $F^M_{\alpha\beta}$ zum Eigenwert λ.

2. Das Spektrum von $F^M_{\alpha\beta}$ ist die gewichtete Menge

$$\operatorname{Spek}(F^M_{\alpha\beta}) := \dim\big(\operatorname{Eig}(F^M_{\alpha\beta}, \cdot)\big).$$

Für zweidimensionale orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeiten M sind die Spektren von $F^M_{\alpha\beta}$ und $F^M_{\beta\alpha}$, wie wir im Folgenden zeigen werden, identisch.

Definition 2.15. Sei M orientiert und vol_M die kanonische riemannsche Volumenform auf M. Dann nennt man die für alle $0 \leqslant k \leqslant n$ durch

$$\omega \wedge *\sigma = \langle \omega, \sigma \rangle \mathrm{vol}_M$$

für alle $\omega, \sigma \in \Omega^k(M)$ gegebene eindeutige lineare Abbildung

$$* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$$

den Hodge-Stern-Operator.

Bemerkung 2.16. In [Jän03, S. 220-225] kann man die folgenden Aussagen nachlesen:

1. Man kann zeigen, dass tatsächlich solch eine lineare Abbildung $*$ existiert und dass diese eindeutig ist.
2. Für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ ist
$$* * \omega = (-1)^{k(n-k)} \omega.$$
3. Auf orientierbaren Mannigfaltigkeiten M können wir für $0 \leqslant k \leqslant n$ das Kodifferential $\delta : \Omega^{n-k}(M) \to \Omega^{n-k-1}(M)$ nun auch mittels des Hodge-Stern-Operators ausdrücken:
$$\delta = (-1)^{k+1} * d *^{-1}.$$

Proposition 2.17. *Seien $\alpha, \beta > 0$ und M eine zweidimensionale orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann stimmen die Spektren von $F^M_{\alpha\beta}$ und $F^M_{\beta\alpha}$ überein.*

Beweis. Sei zunächst $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für $0 \leqslant k \leqslant n$ schreiben wir $*_k := *\big|_{\Omega^k(M)}$. Es gilt wegen

$$*_{n-k} *_k = (-1)^{k(n-k)} \mathrm{id}_{\Omega^k(M)} \tag{5}$$

und

$$\delta = (-1)^{k+1} *_{k+1} d *_k^{-1}, \tag{6}$$

für alle $0 \leqslant k \leqslant n$, dass

$$\begin{aligned} *_k \delta *_{k+1}^{-1} &\overset{(5)}{=} (-1)^{k(n-k)} (-1)^{(k+1)(n-k-1)} *_{n-k}^{-1} \delta *_{n-k-1} \\ &= (-1)^{(2k+1)(n-k)-k-1} *_{n-k}^{-1} \delta *_{n-k-1} \\ &= (-1)^{n-1} *_{n-k}^{-1} \delta *_{n-k-1} \\ &\overset{(6)}{=} (-1)^{n-1+n-k} d \\ &= (-1)^{k+1} d. \end{aligned} \tag{7}$$

Folglich ist

$$\underbrace{*_k d}_{\overset{(6)}{=}(-1)^k \delta *_{k-1}} \delta *_k^{-1} = (-1)^k \delta *_{k-1} \delta *_k^{-1} \overset{(7)}{=} (-1)^{2k} \delta d = \delta d$$

und

$$*_k \delta \underbrace{d *_k^{-1}}_{\overset{(6)}{=}(-1)^{k+1} *_{k+1}^{-1} \delta} = (-1)^{k+1} *_k \delta *_{k+1}^{-1} \delta \overset{(7)}{=} (-1)^{2(k+1)} d\delta = d\delta.$$

Insgesamt ergibt sich

$$*_k (\alpha d\delta + \beta \delta d) *_k^{-1} = \alpha \delta d + \beta d\delta.$$

Sei nun $n = 2$ wie vorausgesetzt. Dann ist $*_1$ eine bijektive Selbstabbildung von $\Omega^1(M)$. Wir haben also gezeigt, dass

$$*_1 F^M_{\alpha\beta} *_1^{-1} = F^M_{\beta\alpha}.$$

Sei nun $\omega \in \mathrm{Eig}(F^M_{\alpha\beta}, \lambda)$. Dann ist

$$F^M_{\beta\alpha} *_1 \omega = *_1 F^M_{\alpha\beta} \omega = *_1 \lambda \omega = \lambda *_1 \omega,$$

d.h., $*_1 \omega \in \mathrm{Eig}(F^M_{\beta\alpha}, \lambda)$. Ist umgekehrt $\eta \in \mathrm{Eig}(F^M_{\beta\alpha}, \lambda) \subseteq \Omega^1(M)$, so gibt es ein $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $\eta = *_1 \omega$ und es gilt

$$*_1 F^M_{\alpha\beta} \omega = *_1 F^M_{\alpha\beta} *^{-1} \eta = F^M_{\beta\alpha} \eta = \lambda \eta = \lambda *_1 \omega = *_1 \lambda \omega.$$

Daher ist

$$F^M_{\alpha\beta} \omega = \lambda \omega$$

und somit $\omega \in \mathrm{Eig}(F^M_{\alpha\beta}, \lambda)$. Wir haben insgesamt also gezeigt, dass die Abbildung

$$*_1 : \mathrm{Eig}(F^M_{\alpha\beta}, \lambda) \to \mathrm{Eig}(F^M_{\beta\alpha}, \lambda)$$

bijektiv ist und demzufolge

$$\mathrm{Spek}(F^M_{\alpha\beta}) = \mathrm{Spek}(F^M_{\beta\alpha}). \qquad \square$$

http://www.springer.com/978-3-658-13109-8

Spektren verallgemeinerter Hodge-Laplace-Operatoren
Am Beispiel von flachen Tori und runden Sphären
Beitz, S.F.
2016, VII, 62 S., Softcover
ISBN: 978-3-658-13109-8