

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Vektoranalysis</b> .....	1
<b>1 Ebene und räumliche Kurven</b> .....	1
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve .....	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter .....	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors .....	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes ..	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve .....	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor .....	16
1.5 Krümmung einer Kurve .....	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleuni- gung in Tangential- und Normalkomponenten .....	27
<b>2 Flächen im Raum</b> .....	31
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche .....	31
2.2 Flächenkurven .....	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement .....	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$ .....	43
<b>3 Skalar- und Vektorfelder</b> .....	47
3.1 Ein einführendes Beispiel .....	47
3.2 Skalarfelder .....	50
3.3 Vektorfelder .....	52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik .....	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld .....	55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld) .....	56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld .....	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder .....	59
<b>4 Gradient eines Skalarfeldes</b> .....	60
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten .....	60
4.2 Richtungsableitung .....	64
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$ .....	66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung .....	68
<b>5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes</b> .....	70
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes .....	70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz .....	74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	77

5.2	Rotation eines Vektorfeldes .....	79
5.2.1	Definition und Eigenschaften der Rotation .....	79
5.2.2	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe .....	83
5.3	Spezielle Vektorfelder .....	85
5.3.1	Quellenfreies Vektorfeld .....	85
5.3.2	Wirbelfreies Vektorfeld .....	87
5.3.3	Laplace- und Poisson-Gleichung .....	89
5.3.4	Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ..	93
<b>6</b>	<b>Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme .....</b>	<b>94</b>
6.1	Polarkoordinaten .....	94
6.1.1	Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten .....	94
6.1.2	Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten .....	95
6.1.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten .....	101
6.1.4	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung .....	105
6.2	Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.1	Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.2	Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten .....	111
6.2.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten .....	116
6.2.4	Zylindersymmetrische Vektorfelder .....	119
6.2.5	Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten .....	121
6.3	Kugelkoordinaten .....	124
6.3.1	Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten .....	124
6.3.2	Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten .....	129
6.3.3	Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten .....	135
6.3.4	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	137
6.3.5	Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel .....	140
<b>7</b>	<b>Linien- oder Kurvenintegrale .....</b>	<b>143</b>
7.1	Ein einführendes Beispiel .....	143
7.2	Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	146
7.3	Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	148
7.4	Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder .....	152
7.5	Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	163
7.5.1	Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	163
7.5.2	Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	164
7.5.3	Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes .....	165
7.6	Arbeitsintegral .....	167
7.6.1	Arbeit eines Kraftfeldes .....	167
7.6.2	Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld .....	168

<b>8 Oberflächenintegrale</b> .....	170
8.1 Ein einführendes Beispiel .....	170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals .....	175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals .....	177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten ..	178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern .....	190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels .....	195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders .....	199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel .....	202
<b>9 Integralsätze von Gauß und Stokes</b> .....	205
9.1 Gaußscher Integralsatz .....	205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum .....	207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene .....	211
9.2 Stokesscher Integralsatz .....	214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	227
<b>Übungsaufgaben</b> .....	230
Zu Abschnitt 1 .....	230
Zu Abschnitt 2 .....	232
Zu Abschnitt 3 .....	234
Zu Abschnitt 4 .....	236
Zu Abschnitt 5 .....	237
Zu Abschnitt 6 .....	239
Zu Abschnitt 7 .....	242
Zu Abschnitt 8 .....	245
Zu Abschnitt 9 .....	248
 <b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	 251
<b>1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik</b> .....	251
1.1 Urnenmodell .....	251
1.2 Permutationen .....	252
1.3 Kombinationen .....	255
1.4 Variationen .....	260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln .....	264
<b>2 Grundbegriffe</b> .....	264
2.1 Einführende Beispiele .....	264
2.2 Zufallsexperimente .....	268

2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments .....	269
2.4 Ereignisse und Ereignisraum .....	270
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen .....	273
<b>3 Wahrscheinlichkeit .....</b>	<b>276</b>
3.1 Laplace-Experimente .....	276
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome .....	281
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten .....	281
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff .....	284
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit) .....	286
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum .....	287
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse .....	290
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	292
3.5 Multiplikationssatz .....	295
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse .....	299
3.7 Ereignisbäume .....	302
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel .....	308
<b>4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen .....</b>	<b>315</b>
4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen .....	315
4.1.1 Einführende Beispiele .....	315
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen .....	317
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen .....	318
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung) .....	319
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung) .....	327
<b>5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung .....</b>	<b>335</b>
5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	336
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	336
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen .....	336
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen .....	337
5.2 Erwartungswert einer Funktion .....	339
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufalls- variablen .....	340
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufalls- variablen .....	344
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion .....	348
<b>6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....</b>	<b>350</b>
6.1 Binomialverteilung .....	350
6.2 Hypergeometrische Verteilung .....	361
6.3 Poisson-Verteilung .....	367

6.4	Gaußsche Normalverteilung	371
6.4.1	Allgemeine Normalverteilung	371
6.4.2	Standardnormalverteilung	374
6.4.3	Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	376
6.4.4	Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	378
6.4.5	Quantile der Standardnormalverteilung	388
6.5	Exponentialverteilung	390
6.6	Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung	393
6.7	Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung	401
<b>7</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen</b>	<b>403</b>
7.1	Ein einführendes Beispiel	403
7.2	Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen	406
7.2.1	Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen	406
7.2.2	Diskrete zweidimensionale Verteilung	408
7.2.3	Stetige zweidimensionale Verteilung	411
7.3	Stochastisch unabhängige Zufallsvariable	417
7.4	Funktionen von mehreren Zufallsvariablen	423
7.5	Summen und Produkte von Zufallsvariablen	425
7.5.1	Additionssatz für Mittelwerte	425
7.5.2	Multiplikationssatz für Mittelwerte	427
7.5.3	Additionssatz für Varianzen	430
7.5.4	Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen	433
7.6	Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen	436
7.6.1	Zentraler Grenzwertsatz	436
7.6.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen	438
7.6.3	Grenzwertsatz von Moivre-Laplace	440
<b>8</b>	<b>Prüf- oder Testverteilungen</b>	<b>441</b>
8.1	Chi-Quadrat-Verteilung	441
8.2	$t$ -Verteilung von Student	446
	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>451</b>
	Zu Abschnitt 1	451
	Zu Abschnitt 2	453
	Zu Abschnitt 3	454
	Zu Abschnitt 4	457
	Zu Abschnitt 5	459
	Zu Abschnitt 6	462
	Zu Abschnitt 7	467

<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	471
<b>1 Grundbegriffe</b> .....	471
1.1 Ein einführendes Beispiel .....	471
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit .....	472
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe .....	474
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe .....	474
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe .....	477
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen) .....	479
<b>2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe</b> .....	485
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe .....	486
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe .....	489
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeits- funktion .....	489
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe .....	491
<b>3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)</b> .....	493
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung .....	493
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“) .....	494
3.2.1 Ein einführendes Beispiel .....	495
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen .....	495
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert $\mu$ .....	498
3.2.4 Schätzungen für die Varianz $\sigma^2$ .....	499
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomial- verteilung) .....	500
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte .....	500
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen .....	503
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode .....	504
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....	506
3.3.2.1 Binomialverteilung .....	506
3.3.2.2 Poisson-Verteilung .....	508
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung .....	511
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannt Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“) .....	514
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit .....	514
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannt Parameter Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ .....	518
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannt Parameter Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ .....	525
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannt Parameter Varianz $\sigma^2$ einer Normal- verteilung .....	530

3.4.5	Vertrauensintervalle für einen unbekanntem Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung).....	534
3.4.6	Vertrauensintervalle für den unbekanntem Mittelwert $\mu$ einer beliebigen Verteilung .....	539
<b>4</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekanntem Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)</b> .....	<b>540</b>
4.1	Ein einführendes Beispiel .....	540
4.2	Statistische Hypothesen und Parametertests .....	544
4.3	Planung und Durchführung eines Parametertests .....	545
4.4	Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest .....	550
4.5	Spezielle Parametertests .....	555
4.5.1	Tests für den unbekanntem Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekanntem Varianz $\sigma^2$ .....	555
4.5.2	Tests für den unbekanntem Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekanntem Varianz $\sigma^2$ .....	564
4.5.3	Tests für die Gleichheit der unbekanntem Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen (Differenzentests) .....	569
4.5.3.1	Abhängige und unabhängige Stichproben .....	569
4.5.3.2	Differenzentests bei abhängigen Stichproben .....	571
4.5.3.3	Differenzentests bei unabhängigen Stichproben .....	576
4.5.4	Tests für die unbekanntem Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung .....	588
4.5.5	Tests für einen unbekanntem Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung).....	593
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten .....	599
<b>5</b>	<b>Statistische Prüfverfahren für die unbekanntem Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)</b> .....	<b>604</b>
5.1	Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests .....	604
5.2	Ein einführendes Beispiel .....	605
5.3	Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“) .....	607
<b>6</b>	<b>Korrelation und Regression</b> .....	<b>620</b>
6.1	Korrelation .....	620
6.1.1	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe .....	620
6.1.2	Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit ...	630
6.2	Regression .....	633
<b>Übungsaufgaben</b>	.....	<b>639</b>
Zu Abschnitt 1	.....	639
Zu Abschnitt 2	.....	641
Zu Abschnitt 3	.....	642
Zu Abschnitt 4	.....	644
Zu Abschnitt 5	.....	647
Zu Abschnitt 6	.....	648

<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	650
<b>1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen). Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	650
<b>2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)</b>	654
2.1 Häufigkeitsverteilungen .....	654
2.2 Normalverteilte Messgrößen .....	656
<b>3 Auswertung einer Messreihe</b> .....	662
3.1 Mittelwert und Standardabweichung .....	662
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$ , Messunsicherheit, Messergebnis ...	670
<b>4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß</b> .....	679
4.1 Ein einführendes Beispiel .....	679
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße .....	680
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz).....	683
4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße .....	687
<b>5 Ausgleichs- oder Regressionskurven</b> .....	694
5.1 Ein einführendes Beispiel .....	694
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“ .....	696
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade .....	701
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden .....	701
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung ...	709
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel .....	715
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurück- führbar sind .....	719
<b>Übungsaufgaben</b> .....	730
Zu Abschnitt 3 .....	730
Zu Abschnitt 4 .....	732
Zu Abschnitt 5 .....	734



---

<b>Anhang</b> .....	739
<b>Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b> .....	740
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung ....	740
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung .....	742
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	744
Tabelle 4: Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	746
<b>Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	749
<b>I Vektoranalysis</b> .....	750
Abschnitt 1 .....	750
Abschnitt 2 .....	753
Abschnitt 3 .....	757
Abschnitt 4 .....	760
Abschnitt 5 .....	763
Abschnitt 6 .....	769
Abschnitt 7 .....	777
Abschnitt 8 .....	783
Abschnitt 9 .....	790
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	796
Abschnitt 1 .....	796
Abschnitt 2 .....	797
Abschnitt 3 .....	798
Abschnitt 4 .....	801
Abschnitt 5 .....	804
Abschnitt 6 .....	808
Abschnitt 7 .....	814
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	819
Abschnitt 1 .....	819
Abschnitt 2 .....	824
Abschnitt 3 .....	826
Abschnitt 4 .....	829
Abschnitt 5 .....	836
Abschnitt 6 .....	840
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	844
Abschnitt 3 .....	844
Abschnitt 4 .....	847
Abschnitt 5 .....	851
<b>Literaturhinweise</b> .....	859
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	860



<http://www.springer.com/978-3-658-11923-2>

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Band 3

Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung,

Mathematische Statistik, Fehler- und

Ausgleichsrechnung

Papula, L.

2016, XXI, 870 S. 550 Abb. in Farbe., Softcover

ISBN: 978-3-658-11923-2