II Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit den *Permutationen*, *Kombinationen* und *Variationen.* Diese aus der Kombinatorik stammenden Abzählmethoden sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der Lösung zahlreicher Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik und lassen sich in sehr anschaulicher Weise anhand des *Urnenmodells* einführen.

1.1 Urnenmodell

In einer Urne befinden sich n *verschiedene* Kugeln, die sich z. B. in ihrer *Farbe* voneinander unterscheiden. Wir wollen uns dann in den nächsten Teilabschnitten mit den folgenden, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig vorkommenden Fragestellungen beschäftigen:

1. Auf wie viel *verschiedene* Arten lassen sich diese Kugeln anordnen? Dies führt uns zu dem Begriff *Permutation*.
2. Aus der Urne werden *nacheinander* k Kugeln gezogen, wobei wir noch die folgenden Fälle unterscheiden müssen:

   a) Ziehung ohne Zurücklegen (Bild II-1):

   Die jeweils gezogene Kugel wird *nicht* in die Urne zurückgelegt und scheidet somit für alle weiteren Ziehungen aus. Jede der n Kugeln kann also nur *einmal* gezogen werden.

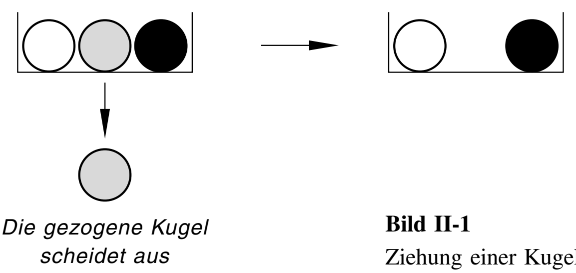

Bild II-1
Ziehung einer Kugel *ohne* Zurücklegen

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3*, DOI 10.1007/978-3-658-11924-9_2

b) Ziehung mit Zurücklegen (Bild II-2):

Jede Kugel darf *mehrmals* verwendet werden, d. h. dass jede gezogene Kugel *vor* der nächsten Ziehung in die Urne *zurückgelegt* wird und somit bei der nachfolgenden Ziehung abermals gezogen werden kann.

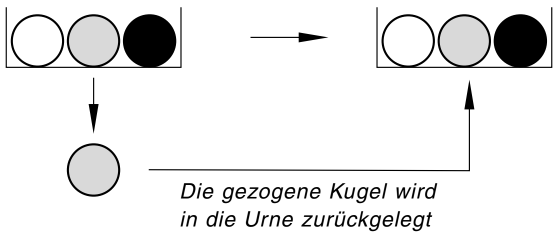

Bild II-2
Ziehung einer Kugel *mit* Zurücklegen

In beiden Fällen unterscheiden wir ferner, ob die *Reihenfolge* der Ziehung berücksichtigt werden soll oder nicht. Wir stoßen so auf die Begriffe *Variation* und *Kombination*.

In der *Statistik* wird eine solche *zufällige* Entnahme von k Kugeln als *Stichprobe* vom Umfang k bezeichnet [1)]. Sie heißt *geordnet*, wenn die *Reihenfolge*, in der die Stichprobenelemente (hier: Kugeln) gezogen werden, *berücksichtigt* wird. Spielt die Reihenfolge jedoch *keine* Rolle, so liegt eine *ungeordnete* Stichprobe vor.

1.2 Permutationen

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem folgenden Problem:

In einer Urne befinden sich n *verschiedenfarbige* Kugeln. Auf wie viel verschiedene Arten lassen sich diese Kugeln (beispielsweise nebeneinander) anordnen?
Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

■ **Beispiel**

Drei *verschiedenfarbige* Kugeln, z. B. je eine weiße, graue und schwarze Kugel, lassen sich auf genau 6 *verschiedene* Arten wie folgt anordnen (Bild II-3):

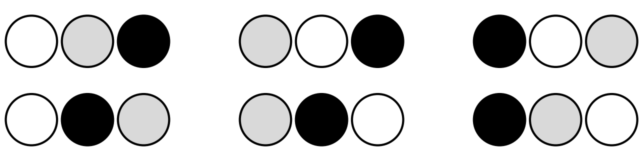

Bild II-3 Drei verschiedenfarbige Kugeln lassen sich auf sechs verschiedene Arten (nebeneinander) anordnen

■

1) Der in der Statistik grundlegende Begriff *Stichprobe aus einer Grundgesamtheit* wird in Kap. III, Abschnitt 1.2 noch ausführlich erörtert.

Allgemein heißt eine Anordnung von *n verschiedenen* Elementen (Kugeln) in einer bestimmten Reihenfolge eine *Permutation* der n Elemente (Kugeln). *Wie viele* Möglichkeiten gibt es dann, n *verschiedene* Elemente (Kugeln) anzuordnen? Wie groß ist somit die *Anzahl* der Permutationen von n Elementen?

Wir lösen dieses Problem wie folgt:

Es sind n Plätze vorhanden, die wir in der üblichen Weise von 1 bis n durchnummerieren, und n *verschiedene* Kugeln, mit denen wir diese Plätze besetzen wollen. Den Platz Nr. 1 können wir mit *jeder* der n Kugeln belegen. Ist diese Stelle jedoch einmal besetzt, so bleiben für die Besetzung des 2. Platzes nur noch $n - 1$ Möglichkeiten. Denn *jede* der $n - 1$ übrig gebliebenen Kugeln kann diesen Platz einnehmen. Ist schließlich auch dieser Platz besetzt, so bleiben für die Besetzung des 3. Platzes nur noch $n - 2$ Möglichkeiten übrig u. s. w.. Für die Besetzung der Plätze $1, 2, 3, \ldots, n$ gibt es daher der Reihe nach $n, n - 1, n - 2, \ldots, 1$ Möglichkeiten. Bild II-4 verdeutlicht diese Aussage.

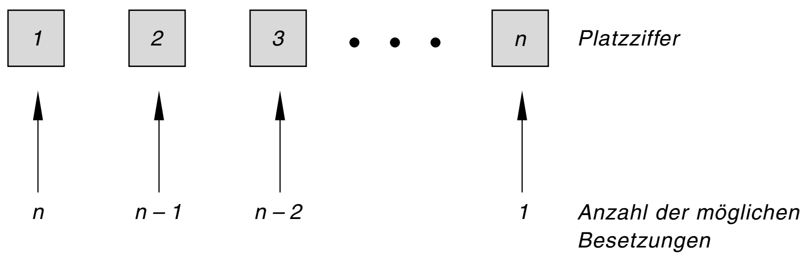

Bild II-4 Besetzungsmöglichkeiten für die verschiedenen Plätze

Die *Anzahl* der Permutationen von *n verschiedenen* Kugeln (oder allgemein: von *n verschiedenen* Elementen) ist daher

$$P(n) = n(n - 1)(n - 2) \ldots 1 = n! \tag{II-1}$$

Befinden sich jedoch unter den n Kugeln n_1 *gleiche* (z. B. n_1 schwarze Kugeln), so fallen alle jene Anordnungen zusammen, die durch *Vertauschungen* der gleichen Kugeln *untereinander* hervorgehen (alle übrigen Kugeln behalten dabei ihre Plätze). Bild II-5 verdeutlicht dies für eine Anordnung von 5 Kugeln, unter denen sich 3 *gleiche* (nämlich schwarze) Kugeln befinden. Werden diese *untereinander* vertauscht, was auf genau $P(3) = 3! = 6$ *verschiedene* Arten möglich ist, so entstehen dabei *keine* neuen Anordnungen.

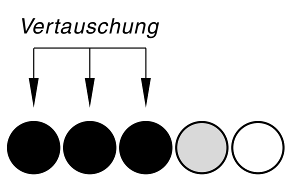

Bild II-5
Durch Vertauschung der schwarzen Kugeln untereinander entstehen *keine* neuen Anordnungen

Bei n_1 *gleichfarbigen* Kugeln gibt es somit $P(n_1) = n_1!$ *verschiedene* Möglichkeiten, diese *untereinander* zu vertauschen. Daher gibt es genau

$$P(n; n_1) = \frac{P(n)}{P(n_1)} = \frac{n!}{n_1!} \qquad \text{(II-2)}$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten für n Kugeln, unter denen sich n_1 *gleiche* Kugeln befinden.

Analog lässt sich zeigen: Die *Anzahl* der verschiedenen Permutationen von n Kugeln, unter denen sich jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *gleiche* befinden, ist

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \qquad \text{(II-3)}$$

$(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$[2].

Wir fassen diese Ergebnisse in etwas allgemeinerer Form wie folgt zusammen:

Permutationen von n Kugeln (Elementen)

Jede mögliche *Anordnung* von n Kugeln (Elementen) heißt eine *Permutation* der n Kugeln (Elemente). Die *Anzahl* der Permutationen hängt dabei noch davon ab, ob alle n Kugeln (Elemente) voneinander *verschieden* sind oder ob gewisse Kugeln (Elemente) unter ihnen *mehrmals* auftreten:

1. Alle n Kugeln (Elemente) sind voneinander *verschieden*. Die *Anzahl* der Permutationen ist dann

$$P(n) = n! \qquad \text{(II-4)}$$

2. Unter den n Kugeln (Elementen) befinden sich jeweils $n_1, n_2, \ldots, n_k$ einander *gleiche*. Es gibt dann

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \qquad \text{(II-5)}$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten für die n Kugeln (Elemente) $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ und $k \le n)$.

[2] Die n Kugeln zerfallen somit in k *verschiedene* Klassen, wobei die Kugeln einer jeden Klasse *gleichfarbig* sind. Es treten somit nur $k \le n$ *verschiedene* Farben auf.

■ **Beispiele**

(1) Auf einem Regal sollen 5 *verschiedene* Gegenstände angeordnet werden. Es gibt dann

$$P(5) = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen).

(2) Wir betrachten 6 Kugeln, darunter 3 weiße, 2 graue und 1 schwarze Kugel (Bild II-6):

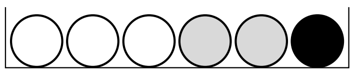

Bild II-6

Es gibt dann genau

$$P(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3!\,2!\,1!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen). ■

1.3 Kombinationen

Kombinationen ohne Wiederholung

Einer Urne mit n *verschiedenen* Kugeln entnehmen wir nacheinander k Kugeln *ohne* Zurücklegen. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll dabei *ohne* Bedeutung sein, bleibt also *unberücksichtigt*. Eine solche *ungeordnete* Stichprobe von k Kugeln (oder allgemein: von k Elementen) heißt eine *Kombination k-ter Ordnung ohne Wiederholung* [3].

■ **Beispiel**

Befinden sich in einer Urne drei *verschiedenfarbige* Kugeln (z. B. je eine weiße, graue und schwarze Kugel) und ziehen wir nacheinander wahllos zwei Kugeln *ohne* Zurücklegen, so ist z. B. die folgende Ziehung eine von mehreren *möglichen* (Bild II-7):

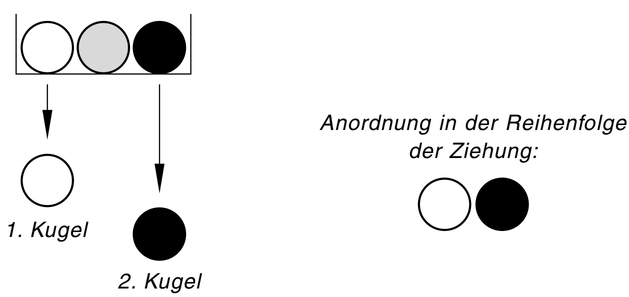

Bild II-7

[3] Jede Kugel darf nur *einmal* verwendet werden und ist daher in der Stichprobe *höchstens einmal* vertreten.

Spielt dabei die Reihenfolge, in der die beiden Kugeln gezogen werden, *keine* Rolle, so wird diese Ziehung *nicht* von der folgenden Ziehung unterschieden (Bild II-8):

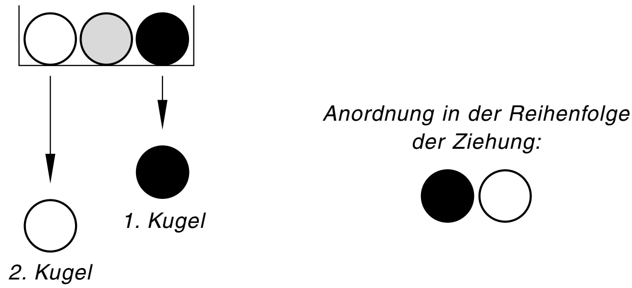

Bild II-8

Die beiden Stichproben (Anordnungen) unterscheiden sich lediglich in der *Reihenfolge* ihrer Elemente und werden daher als *ungeordnete* Stichproben oder Kombinationen 2. Ordnung *nicht* unterschieden.

■

Die Fragestellung lautet jetzt: Auf wie viel *verschiedene* Arten lassen sich k Kugeln aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln *ohne* Zurücklegen und *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge ziehen? Wie groß ist somit die *Anzahl* der Kombinationen k-ter Ordnung *ohne* Wiederholung bei n verschiedenen Kugeln (Elementen)?

Zur Klärung dieser Frage ordnen wir die n verschiedenen Kugeln $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zunächst in einer Reihe an und kennzeichnen dann diejenigen k Kugeln, die wir *gezogen* haben, durch die Zahl 0, alle übrigen $n - k$ Kugeln durch die Zahl 1 (Bild II-9):

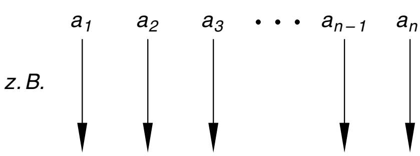

Bild II-9
Eine gezogene Kugel kennzeichnen wir durch die Zahl „0“, alle übrigen Kugeln durch die Zahl „1“

In dieser Anordnung tritt somit die Zahl 0 genau *k-mal* und die Zahl 1 genau $(n - k)$*-mal* auf. Wir können nun unsere Fragestellung auch wie folgt formulieren:

Wie viel verschiedene Anordnungsmöglichkeiten gibt es für die insgesamt n Zahlen, unter denen *k-mal* die Zahl 0 und $(n - k)$*-mal* die Zahl 1 vorkommt?

Offensichtlich handelt es sich dabei um die *Permutationen* von n Zahlen, die sich in *zwei* Klassen wie folgt aufteilen lassen (Bild II-10):

$$\boxed{\underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \ \cdots \ 0}_{n_1 = k} \ \Big| \ \underbrace{1 \quad 1 \ \cdots \ 1}_{n_2 = n - k}}$$

Bild II-10

Daher gibt es nach Gleichung (II-5) genau

$$C(n; k) = P(n; k, n - k) = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{k} \qquad (k \le n) \tag{II-6}$$

verschiedene Möglichkeiten, aus einer Urne mit n *verschiedenen* Kugeln k Kugeln *ohne* Zurücklegen und *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge herauszugreifen.

Kombinationen mit Wiederholungen

Darf jedoch *jede* der n verschiedenen Kugeln *mehrmals* verwendet werden, so erhält man *Kombinationen k-ter Ordnung mit Wiederholung*[4]. Ihre *Anzahl* ist

$$C_w(n; k) = \binom{n + k - 1}{k} \tag{II-7}$$

Dabei ist zu beachten, dass k jetzt auch *größer* als n sein kann. Auf die Herleitung dieser Formel soll verzichtet werden.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in etwas allgemeinerer Form wie folgt zusammen:

Kombinationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln (Elementen) werden nacheinander k Kugeln (Elemente) entnommen (mit *oder* ohne Zurücklegen), wobei die Reihenfolge der Ziehung *unberücksichtigt* bleibt. Die gezogenen k Kugeln (Elemente) bilden dann (in *beliebiger* Reihenfolge angeordnet) eine sog. *Kombination k-ter Ordnung*. Die *Anzahl* der möglichen Kombinationen k-ter Ordnung hängt dabei noch davon ab, ob die Ziehung der Kugeln (Elemente) *mit* oder *ohne* Zurücklegen erfolgt, d. h. ob eine Kugel (ein Element) *mehrmals* oder *höchstens einmal* verwendet werden darf. Wir unterscheiden daher zwischen Kombinationen k-ter Ordnung *mit* und *ohne* Wiederholung.

---

4) Jede gezogene Kugel wird dabei *vor* der nächsten Ziehung in die Urne *zurückgelegt* und hat somit die Chance, *mehrmals* gezogen zu werden (Ziehung *mit* Zurücklegen).

1. Kombinationen k-ter Ordnung ohne Wiederholung

Die Ziehung der k Kugeln (Elemente) erfolgt *ohne* Zurücklegen. Jede Kugel (jedes Element) kann also *höchstens einmal* gezogen werden und scheidet somit nach erfolgter Ziehung automatisch für alle weiteren Ziehungen aus. Die *Anzahl* der Kombinationen k-ter Ordnung *ohne* Wiederholung beträgt dann

$$C(n; k) = \binom{n}{k} \qquad (k \leq n) \tag{II-8}$$

2. Kombinationen k-ter Ordnung mit Wiederholung

Die Ziehung der k Kugeln (Elemente) erfolgt *mit* Zurücklegen. Jede Kugel (jedes Element) kann also *mehrmals* gezogen werden. Es gibt dann genau

$$C_w(n; k) = \binom{n + k - 1}{k} \tag{II-9}$$

verschiedene Kombinationen k-ter Ordnung *mit* Wiederholung, wobei auch $k > n$ sein kann.

Anmerkung

Bei *Kombinationen* findet also die Reihenfolge oder Anordnung der Elemente grundsätzlich *keine* Berücksichtigung. Sie können daher auch als *ungeordnete* Stichproben aufgefasst werden, die man einer sog. *Grundgesamtheit* mit n Elementen entnommen hat. Die Urne mit ihren n verschiedenen Kugeln liefert ein sehr anschauliches *Modell* für eine solche Grundgesamtheit [5)].

■ **Beispiele**

(1) Einer Warenlieferung von 12 Glühbirnen soll zu Kontrollzwecken eine *Stichprobe* von 3 Glühbirnen entnommen werden. Wie viel *verschiedene* Stichproben sind dabei möglich?

Lösung: Da es bei dieser (ungeordneten) Stichprobe auf die Reihenfolge der gezogenen Glühbirnen *nicht* ankommt und die Ziehung (wie in der Praxis allgemein üblich) *ohne* Zurücklegen erfolgt, gibt es genau

$$C(12; 3) = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

verschiedene Möglichkeiten, aus 12 Glühbirnen 3 auszuwählen (*Kombinationen 3. Ordnung* von 12 Elementen *ohne* Wiederholung).

---

5) Der Begriff „Grundgesamtheit“ wird in Kap. III, Abschnitt 1.2 näher erläutert.

(2) Für die in Bild II-11 dargestellte *Parallelschaltung* dreier Widerstände stehen uns insgesamt 5 *verschiedene* ohmsche Widerstände $R_1, R_2, \ldots, R_5$ zur Verfügung. Wie viel *verschiedene* Schaltmöglichkeiten gibt es, wenn jeder der 5 Widerstände

a) höchstens *einmal*,

b) *mehrmals*, d. h. hier bis zu dreimal

verwendet werden darf?

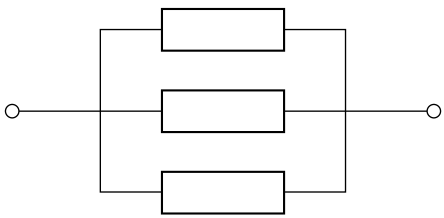

Bild II-11
Parallelschaltung dreier Widerstände

Lösung: Aus 5 Widerständen müssen wir 3 Widerstände auswählen, wobei die Anordnung (Reihenfolge) im Schaltkreis *keine* Rolle spielt. Es handelt sich also um *Kombinationen* 3. Ordnung von 5 Elementen (Widerständen)[6].

a) Da jeder Widerstand nur *einmal* verwendet werden darf, haben wir es hier mit Kombinationen 3. Ordnung *ohne* Wiederholung zu tun. In diesem Fall gibt es somit

$$C(5; 3) = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 2 = 10$$

verschiedene Parallelschaltungen.

b) Jeder Widerstand kann bis zu *dreimal* verwendet werden. Es handelt sich daher diesmal um Kombinationen 3. Ordnung *mit* Wiederholung. Wir haben somit

$$C_w(5; 3) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 5 = 35$$

verschiedene Möglichkeiten für eine Parallelschaltung aus drei Widerständen.

■

[6] Der Gesamtwiderstand ist *unabhängig* von der Reihenfolge, in der die Einzelwiderstände geschaltet werden.

1.4 Variationen

Variationen ohne Wiederholung

Wir gehen von den gleichen Überlegungen aus wie im vorangegangenen Abschnitt, *berücksichtigen* diesmal jedoch die *Reihenfolge*, in der wir die k Kugeln aus der Urne entnommen haben. Eine solche *geordnete* Stichprobe von k Kugeln heißt dann eine *Variation k-ter Ordnung ohne Wiederholung*, wenn die Ziehung *ohne* Zurücklegen der Kugeln erfolgte. Jede der n verschiedenen Kugeln ist in solch einer Anordnung also *höchstens einmal* vertreten.

■ **Beispiel**

In einer Urne befinden sich je eine weiße, graue und schwarze Kugel. Wir ziehen nacheinander zwei Kugeln *ohne* Zurücklegen und vergleichen die beiden folgenden *möglichen* Ergebnisse miteinander (Bild II-12):

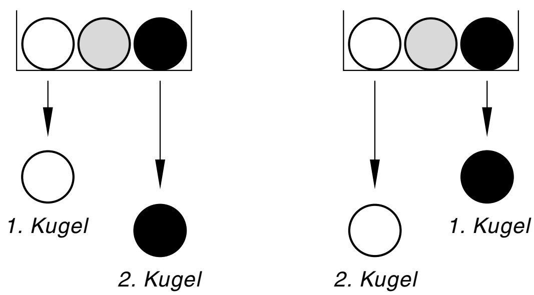

Bild II-12
Ziehung zweier Kugeln *ohne* Zurücklegen

Unter *Berücksichtigung* der Reihenfolge der gezogenen Kugeln notieren wir das Ergebnis der beiden Experimente wie folgt:

1. Experiment: ○ ● (zuerst weiß, dann schwarz)
2. Experiment: ● ○ (zuerst schwarz, dann weiß)

Die beiden Anordnungen unterscheiden sich lediglich in der *Reihenfolge* ihrer Elemente und werden daher *definitionsgemäß* als zwei *verschiedene* Variationen 2. Ordnung *ohne* Wiederholung betrachtet.

■

Die Fragestellung lautet jetzt allgemein: Auf *wie viel verschiedene* Arten lassen sich k Kugeln *ohne* Zurücklegen, aber unter *Berücksichtigung* der Reihenfolge ziehen? Wie groß ist somit die *Anzahl* der Variationen k-ter Ordnung *ohne* Wiederholung bei n Elementen?

http://www.springer.com/978-3-658-11923-2

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Band 3
Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung
Papula, L.
2016, XXI, 870 S. 550 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-11923-2