2 Multiple Lösungsmöglichkeiten und ihre Nutzung beim mathematischen Modellieren

Kay Achmetli, André Krug, Stanislaw Schukajlow
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Beim Bearbeiten von realitätsbezogenen Aufgaben ist es möglich, mehrere Lösungen zu einer Aufgabe zu erstellen, indem man Annahmen variiert und/ oder verschiedene mathematische Lösungswege wählt. Um dies zu veranschaulichen, wurden Lösungsprodukte von Lernenden zu Aufgaben, die jeweils eine der genannten Möglichkeiten nahelegen, qualitativ-empirisch analysiert werden. Die Befunde zeigen, dass sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Studierende Schwierigkeiten haben, realitätsbezogene Aufgaben zu lösen. Der Aufforderung, eine zweite Lösung zu erstellen, kommen Studierende nach und variieren ihre Lösungen entsprechend stoffdidaktischer Vorüberlegungen, wobei sowohl positive wie auch fehlerbehaftete Arbeitsweisen gefestigt werden. Eine weitere Erkenntnis ist, dass die Wahl des mathematischen Lösungsweges einen Einfluss auf den Lösungserfolg einer realitätsbezogenen Aufgabe hat.

2.1 Einleitung

Die Behandlung von multiplen Lösungen im Unterricht ist schon lange ein wichtiges Thema in den didaktischen Diskussionen um vernetzte, gehaltvolle und nachhaltige Lernprozesse. Beispielsweise wird in den Ergebnissen der TIMSS-Videostudie das didaktisch-methodische Element der Erstellung multipler Lösungen als zentrales Element des so genannten „japanischen" Unterrichtsskriptes festgehalten. Nachfolgend fand die Aufforderung, multiple Lösungen im Unterricht zu thematisieren, den Eingang in die Bildungs- und Unterrichtsstandards in verschiedenen Ländern (NCTM 2000; Neubrand 2006). Allerdings, zeigte die Analyse von empirischen Ergebnissen, dass Effekte und Wirkungsbedingungen der Behandlung von multiplen Lösungen noch wenig untersucht sind. Die zusammenfassende Analyse des Forschungsstandes zu multiplen Lösungen im kompetenzorientierten Unterricht wurde unter einer aktiven Beteiligung von Werner Blum vorgenommen und in einem Beitrag festgehalten (Schukajlow und Blum 2011). Dieses Forschungsdesiderat wird im Forschungsprojekt MultiMa[1] (Multiple Lösungen im selbständigkeitsorientierten Mathematikunterricht) bearbeitet, welches unter anderem von Werner Blum als Kooperationspartner begleitet wird. Im vorliegenden Beitrag werden verschiedene Möglichkeiten realitätsbezogenen Aufgaben zu lösen (einerseits über die Variation von Annahmen und andererseits über die Wahl verschiedener mathematischer Lösungswege) unter Einbezug von zwei Populationen – Lehramtsstudierenden und Schülerinnen und Schüler – qualitativ-empirisch analysiert. Im Fokus dieser Analyse stehen Variationsmöglichkeiten bei der Aufgabenbearbeitung und die erreichten Lösungsquoten. Zusätzlich wird bei der Untersuchung der mathematischen Lösungswege der Einfluss des gewählten Lösungswegs auf den Lösungserfolg analysiert. Zugleich soll das Potenzial multipler Lösungen für das Lehren und Lernen in Schule und Hochschule sichtbar werden. So können beispielsweise Schülerinnen

[1] Das Forschungsprojekt MultiMa wird seit 2011 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanziert (GZ.: SCHU 2629/1-1 und SCHU 2629/1-2). Projektleiter: S. Schukajlow.

G. Kaiser, H.-W. Henn (Hrsg.), *Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht*, Realitätsbezüge im Mathematikunterricht, DOI 10.1007/978-3-658-09532-1_2

und Schüler mithilfe multipler Lösungen fachliche Inhalte erlernen und Studierende ihr fachdidaktisches Wissen verbessern. Ferner wird der Forschungsstand zu multiplen Lösungen und Ergebnisse aus kontrollierten Studien zu multiplen Lösungen beim Modellieren zusammengefasst. Letztere bringen erste empirische Hinweise auf die Wirksamkeit dieses Unterrichtselementes hervor.

2.2 Modellieren und multiple Lösungen

Realitätsbezüge und Modellierung sind ein zentrales Thema der Mathematik-Didaktik (siehe die ICMI Study Blum et al. 2007). Dabei beinhaltet Modellieren, „realitätsbezogene Situationen durch den Einsatz mathematischer Mittel zu verstehen, zu strukturieren und das der Situation zugrunde liegende Problem einer Lösung zuzuführen sowie Mathematik in der Realität zu erkennen und zu beurteilen“ (Leiß und Blum 2006, S. 41f). Die Übersetzungsprozesse von der Realität in die Mathematik durch das Mathematisieren eines Problems und die Interpretation der mathematischen Ergebnisse zur Rückführung in die Realität sind dabei zentral für die wechselseitigen Beziehungen zwischen der Mathematik und dem „Rest der Welt“ (Blum 1996).

Bei Modellierungen können gewisse Phasen unterschieden und anschaulich in Kreislaufschemata visualisiert werden. Diese bilden verschiedene Auffassungen des Begriffes des mathematischen Modellierens ab, indem die verwendeten Modelle je nach Begriffsverständnis ausdifferenziert werden (für eine Übersicht der unterschiedlichen idealisierten Ablaufschemata siehe Borromeo Ferri (2006) oder Brand (2014)). Wir möchten im Folgenden den Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2007) verwenden, in welchem der idealtypische Lösungsprozess einer Modellierungsaufgabe als siebenschrittige Sequenz von Teilaktivitäten charakterisiert wird: (1) die Aufgabestellung verstehen und ein Situationsmodell bilden; (2) das Situationsmodell strukturieren, idealisieren und präzisieren, ggf. durch Treffen geeigneter Annahmen, und ein Realmodell konstruieren; (3) das Realmodell in ein mathematisches Modell transformieren; (4) mathematische Verfahren anwenden und ein mathematisches Resultat herleiten; (5) dieses Resultat in der Realität interpretieren und so ein reales Resultat erzielen; (6) dieses Resultat unter der Gegebenheiten der Situation überprüfen; (7) den Lösungsprozess dokumentieren.

Sowohl aus theoretisch-kognitiver als auch aus empirischer Sicht lässt sich beschreiben, dass Modellieren schwer, aber nicht zu schwer für die Umsetzung im Schulalltag ist und Lernerfolge liefern kann (Blum 2007). Im Rahmen des DISUM-Projekts[2] konnte gezeigt werden, dass auftretende Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben den Schritten des Kreislaufs (Schukajlow 2006) zugeordnet werden können. Des Weiteren wurde deutlich, dass potenzielle kognitive Hürden bei allen Phasen in Erscheinung treten können (Blum 2006).

Orientiert man sich am Modellierungskreislauf und den sich daraus ergebenden Teilaktivitäten, kann man erkennen, dass bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben im Wesentlichen der zweite und vierte Modellierungsschritt die Möglichkeit bietet, multiple Lösungen zu entwickeln. Einerseits können bei der Erfassung komplexer Realsituationen verschiedene Modelle gebildet und verglichen werden (Schukajlow und Blum 2011). Andererseits kann das Finden unterschiedlicher Lösungswege u.a. durch eine Öffnung der Problemstellung realisiert werden (Schukajlow 2011). Wir unterscheiden zwischen drei verschiedenen Ansätzen zur Erstellung

[2] **Di**daktische Interventionsformen für einen **s**elbständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten **U**nterricht am Beispiel **M**athematik. Finanziert von der DFG, Projektleiter: W. Blum, R. Messner, R. Pekrun

multipler Lösungen (Schukajlow und Krug 2014); einen ähnlichen Ansatz verfolgen bspw. Tsamir et al. (2010):

1. Multiple Lösungen, die durch die Variation der realitätsbezogenen Annahmen zu fehlenden Angaben entstehen und zu multiplen Ergebnissen führen (multiple Ergebnisse),
2. Multiple Lösungen, die aus der Wahl verschiedener mathematischer Lösungswege resultieren (multiple mathematische Lösungswege) sowie
3. Multiple Lösungen, welche aus der Variation der realitätsbezogenen Annahmen und der Variation der mathematischen Lösungswege entstehen.

Die Idee, dass es bei der Lösung einer Aufgabe verschiedene Ergebnisse und Lösungswege geben kann, ist ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Kultur (Schukajlow und Blum 2011). Durch die Behandlung solcher Aufgaben in der Grundschule (Nührenbörger und Steinbring 2009) oder im Vorschulalter (Tsamir et al. 2010) werden Schüler bereits früh darauf vorbereitet. Dabei gilt die Entwicklung multipler Lösungen als Qualitätskriterium für einen kognitiv aktivierenden Unterricht und wird insbesondere in den Bildungsstandards hervorgehoben (Neubrand 2006). Da die alleinige Existenz multipler Lösungen für einen effektiven Mathematikunterricht allerdings nicht ausreicht, sind eine sinnvolle Implementierung in die Unterrichtsstunde, die Art der Schülerpartizipation und die Qualität der ausgewählten alternativen Zugänge die Basis deren Wirksamkeit (Neubrand und Neubrand 1999).

Die Behandlung von realitätsbezogenen Aufgaben, die multiple Ergebnisse oder multiple mathematische Lösungswege ermöglichen, bringt Vorteile im lernpsychologischen Bereich mit sich. Durch den Vergleich mehrerer Lösungen bietet sich dann die Gelegenheit, die Lernaktivitäten stärker auf die Lösungswege zu fokussieren und so die Problemlösefähigkeiten von Lernenden zu steigern (Guberman und Leikin 2013). Kognitive Vernetzungen können in diesem Zusammenhang durch die Thematisierung von multiplen Lösungen verstärkt werden, sodass einzelne kognitive Prozesse leichter abrufbar sind (Fennema und Romberg 1999; Leikin und Levav-Waynberg 2007; Pólya 1948). Ferner werden mathematische Inhalte und Operationen nicht nacheinander abgearbeitet, sondern zur Lösung neuartiger Problemstellungen miteinander verknüpft sodass ein tiefgreifendes, verstehendes Wissen gefördert wird. Durch das neuerworbene Wissen über verschiedene Lösungsstrategien können selbstregulative Kompetenzen gefördert werden, sodass Lernende ihren eigenen Lösungsweg selbständig kontrollieren können (Schukajlow und Blum 2011). Dies kann als Beitrag zur Realisierung übergeordneter Bildungsziele dienen, da durch die selbständige Betrachtung komplexer Realsituationen bspw. die Grunderfahrungen nach Winter (1995) unmittelbar realisiert werden können.

Neben diesen theoriegeleiteten Vermutungen weisen empirische Ergebnisse experimenteller Studien auf Vorteile von Lernumgebungen, in denen mehrere Lösungswege zu einer innermathematischen Aufgabe behandelt und gegenübergestellt werden, im Vergleich zu Lernsettings, in denen die jeweilige Lösungsmethode nach einander und an verschiedenen, innermathematischen Aufgaben behandelt wird. Rittle-Johnson und Star (2009) sowie Große und Renkl (2006) konnten positive Effekte von multiplen Lösungen auf die Leistungen bezugnehmend auf die Flexibilität und Effektivität von Lösungswegen sowie das konzeptuelle Wissen der Lernenden feststellen.

Im Projekt MultiMa wird die Entwicklung von multiplen Lösungen bei der Bearbeitung von realitätsbezogenen Aufgaben untersucht. Themenfelder des Projekts umfassen theoretische Studien zur Wirkung von multiplen Lösungen bei mathematischen Aufgaben (Schukajlow und Blum 2011), den Umgang von Lernenden mit realitätsbezogenen Aufgaben, die mehrere Lösungsergebnisse (Schukajlow und Krug 2013a) bzw. mehrere mathematische Lösungswege (Achmetli et al. 2014a, b) einfordern sowie die Entwicklung empirisch fundierter Evaluation von Lernumgebungen zu Modellierungsaufgaben, in denen das Erstellen von mehreren Lösungen gefördert und gefordert wird (Schukajlow und Krug 2014). In der ersten Förderperiode von 2011 bis 2012 wurden die Wirkungen von multiplen Ergebnissen auf Leistungen und kognitive, strategische sowie motivational-affektive Merkmale von Neuntklässlern im Inhaltsbereich „Satz des Pythagoras" untersucht. Im Zentrum der aktuellen Förderperiode stehen multiple mathematische Lösungswege im Inhaltsbereich „Lineare Funktionen".

Der positive Einfluss der Behandlung von Aufgaben mit multiplen Lösungen, die durch Annahmen zu fehlenden Angaben erstellt werden, auf die Selbstregulation, Planung, Kontrolle, Präferenz für offene Aufgaben und das Interesse von Lernenden wurde in einer experimentellen Studie von Schukajlow und Krug (2012b; 2013a, b, c; 2014) gezeigt. Ferner konnten die Anzahl der Lösungen und das Kompetenzerleben als wichtige Faktoren identifiziert werden, die Effekte von multiplen Lösungen auf Interesse und Leistungen vermitteln (Schukajlow und Krug 2014; Schukajlow et al. angenommen). Keine Effekte konnten im Zusammenhang mit Selbstwirksamkeitserwartungen und Valenz (Bedeutung) der Mathematik festgestellt (Schukajlow und Krug 2012b, 2013c). Der Einfluss der Entwicklung multipler mathematische Lösungswege beim Lösen realitätsbezogener Aufgaben auf die Selbstregulation wurde von Achmetli et al. (2014a) untersucht, allerdings konnte kein positiver Effekt berichtet werden.

Im Folgenden werden anhand von zwei Modellierungsaufgaben idealtypische Lösungen dargestellt, um anschließend Lösungen qualitativ-empirisch zu analysieren, die Studierende bzw. Schülerinnen und Schüler erstellt haben. Der Logik des MultiMa-Projekts folgend haben wir uns bei Studierenden auf die Lösungsvariation über Annahmen zu fehlenden Angaben und bei den Schülerinnen und Schüler auf die Lösungsvariation über verschiedene mathematische Verfahren fokussiert.

2.3 Multiple Lösungen am Beispiel der Aufgabe „Fallschirmsprung"

Zunächst wollen wir davon berichten, wie Studierende mit der Anforderung umgehen, multiple Lösungen zu einer realitätsbezogenen Aufgabe zu entwickeln. Für die Analysen wurde die Aufgabe „Fallschirmsprung" (vgl. Schukajlow und Krug 2012a) ausgewählt, die in der Sekundarstufe I im Rahmen eines regulären Unterrichts aller Schulstufen eingesetzt werden kann. Bei der Implementation solcher Aufgaben in den Unterricht stellen sich allerdings die Fragen, in wie weit künftige Lehrpersonen Modellierungsaufgaben mit Aufforderung multiple Lösungen zu entwickelt bearbeiten können und noch spezifischer an welchen Stellen die angehende Lehrkräfte Variationen in ihre Lösungen einbringen.

2.3.1 Analyse der Aufgabe „Fallschirmsprung"

Die Aufgabe „Fallschirmsprung" soll mithilfe des Modellierungskreislaufs analysiert werden, um theoretisch denkbare Lösungen aufzuzeigen und den Lösungsraum (solutions space) (Leikin und Levav-Waynberg 2008) zu bestimmen.

Fallschirmsprung

Bei der Sportart „Fallschirmspringen“ werden Personen mithilfe eines Flugzeuges auf eine Absprunghöhe von etwa 4000m über die Erde gebracht. Dann verlassen sie das Flugzeug. Bevor sie den Fallschirm öffnen, fällen sie etwa 3000 Meter im freien Fall zur Erde. In einer Höhe von mindestens 1000 Metern öffnet sich der Fallschirm und sie gleiten mit geöffnetem Fallschirm zum Landeplatz. Beim gesamten Sprung werden sie durch den Wind unterschiedlich stark abgetrieben.

Der Abtrieb bei verschiedenen Windgeschwindigkeiten zu den verschieden Flugphasen sind in folgender Tabelle abgebildet:

Windgeschwindigkeit	Seitlicher Abtrieb im freien Fall pro tausend Meter	Seitlicher Abtrieb in der Gleitphase pro tausend Meter
Leicht	60m	540m
Mäßig	160m	1440m
Stark	340m	3060m

Welche Flugstrecke legt man während des gesamten Sprungs zurück? Finde zwei mögliche Lösungen.
Schreibe beide Lösungswege auf.

Bild 2-1 Aufgabe „Fallschirmsprung“ (siehe Schukajlow und Krug 2014)

Situationsmodell: Die Lösung der Aufgabe „Fallschirmsprung“ beginnt mit der Konstruktion eines Modells der Situation. Der Problemlöser identifiziert zwei Flugphasen in denen der Springer bzw. die Springerin vom Wind seitlich abgetrieben wird. In der ersten Flugphase ist der seitliche Abtrieb (bei leichter, mäßiger bzw. starker Windgeschwindigkeit) geringer als in der zweiten Flugphase. Für die Konstruktion des Situationsmodells können dann irrelevante Informationen (bspw. dass Fallschirmspringen eine Sportart ist) ausgefiltert werden.

Realmodell: Bei bekannten Aufgaben können Lösungen von Problemlöser direkt erinnert werden, indem sie aus dem Gedächtnis abgerufen werden (LeFevre et al. 1996). In diesem Fall ist die gestellte Frage unmittelbar nach der Konstruktion des Situationsmodells beantwortbar. Andernfalls muss das Situationsmodell wegen dessen Komplexität (zwei Flugphase mit unterschiedlichem seitlichem Abtrieb) in ein Realmodell überführt werden. Es müssen Informationen ergänzt bzw. Annahmen getroffen werden, da aus dem Aufgabentext bspw. nicht hervorgeht, welche Windgeschwindigkeit zu den unterschiedlichen Flugphasen herrscht. Je nachdem welche Information ergänzt wird, sind andere Informationen für den aktuellen Lösungsprozess überflüssig. Zudem lassen die Ausdrücke „etwa 4000 Meter“ und „mindestens 1000 Meter“ in der Aufgabenstellung die Möglichkeit, andere Angaben für die Absprunghöhe und den Beginn der Gleitphase zu wählen, als in der Aufgabenstellung vorgegeben. Man kann erwarten, dass die Lösungen zur Aufgabe „Fallschirmsprung“ vor allem beim Bilden des Realmodells variiert werden.

Mathematisches Modell: Das Realmodell wird mathematisiert, indem mathematische Operationen, Begriffe und Grundvorstellungen auf das Realmodell übertragen werden. Es sind zum einen Grundvorstellungen zur Proportionalität im Bezug zum seitlichen Abtrieb notwendig.

Zudem sollten zwei rechtwinklige Dreiecke im Realmodell identifiziert und erkannt werden, dass der Satz des Pythagoras zur Lösung verwendet werden kann. Der vertikale Fall und der seitliche Abtrieb werden dazu als Katheten des jeweiligen Dreiecks identifiziert.

Mathematisches Resultat: Im mathematischen Modell wird die gesuchte Größe – die Länge der unteren Hypotenuse – mithilfe mathematischer Verfahren bestimmt. Zuerst berechnet man mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse für die erste Flugphase (F_1):

$$F_1 = \sqrt{3000^2 + 480^2} \approx 3038,16$$

Danach wird die Länge der Hypotenuse für die zweite Flugphase (F_2) berechnet:

$$F_2 = \sqrt{1000^2 + 3060^2} \approx 3219,25$$

Die gesamte Flugstrecke (F) wird anschließend mittels Addition der einzelnen Teilstrecken (F_1+F_2) berechnet.

Reales Resultat: Abschließend muss das mathematische Resultat interpretiert werden: Die Länge der Flugstrecke, die bei leichter Windgeschwindigkeit zurücklegt wird, beträgt idealtypisch ca. 6,3 km.

Nach diesem ersten Lösungsprozess soll zusätzlich eine zweite Lösung erstellt werden. Dafür können andere Annahmen getroffen werden (bspw. bzgl. der Windgeschwindigkeiten, Absprungs- oder Öffnungshöhe) oder andere mathematische Verfahren (bspw. maßstäbliches Zeichnen) angewendet werden. Abschließend müssen die Resultate überprüft werden und ggfs. einzelne Teilschritte des Modellierungskreislaufs erneut vollzogen werden, bevor abschließend das Darlegen des Antwortsatzes steht.

Anknüpfend an die theoretische Analyse der Aufgabe „Fallschirmsprung" wollen wir nun eine qualitativ-empirische Analyse der Lösungen vornehmen.

2.3.2 Empirische Analyse der Lösungen

Es ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

1. Welches Vorgehen wählen die Studierenden, um die zweite Lösung zu entwickeln?
2. Wie hoch sind die Lösungsquoten bezüglich der ersten und zweiten Lösung bei der Aufgabe „Fallschirmsprung"?

Um diese Forschungsfragen zu beantworten, wurden 143 Studierende (64,1 % weiblich; Alter= 23,72 Jahre) der Universität Kassel aufgefordert die Aufgabe „Fallschirmsprung" zu lösen. Bei den Studierenden handelte es sich um Lehramtsstudierende für Hauptschule, Realschule, Gymnasium und Berufliche Schulen. Für 52,4 % war es die erste Veranstaltung zur Didaktik der Mathematik. Sie hatten somit wenige Vorerfahrungen im Bereich der Didaktik und im Modellieren. Es sollten zwei Lösungen zur Aufgabe „Fallschirmsprung" erstellt werden (siehe Bild 2-1), weswegen vorab analysieren, ob die Studierenden dieser Aufforderung nachkommen. Eine Kategorisierung der Lösungen erfolgte nach induktivem Prinzip gemäß verschiedener Aspekte. Die Lösungen wurden von zwei unabhängigen Ratern zur Variation der Lösung sowie die Korrektheit der ersten bzw. zweiten Lösung mit sehr guter Übereinstimmung (Cohens Kappa >,95; >,92 bzw. >,97) kodiert. Dabei zeigt sich für die erstellten Lösungen und die Variation der zweiten Lösung folgendes Bild:

Tabelle 2.1 Erstellte Lösungen und Variation der Lösungen

Code	**Anzahl**
Es wird weder erste noch zweite Lösung erstellt	23
Es wird keine zweite Lösung erstellt	32
Es wird eine unsinnige zweite Lösung erstellt	4
Es wird eine zweite Lösung über die Variation der math. Verfahren erstellt	1
Es wird eine zweite Lösung über die Variation der Annahmen erstellt, indem	
• …die Windgeschwindigkeit variiert wird	81
• …die Absprunghöhe bzw. die Öffnungshöhe des Fallschirms variiert wird	2
Anmerkung: Bei den Angaben wird nicht zwischen richtigen und falschen Lösungen unterschieden.	

Zunächst lässt sich festhalten, dass 23 Studierende (ca. 16%) keine Lösung zur Aufgabe „Fallschirmsprung“ erstellen können und die Aufgabe unbearbeitet lassen bzw. den Bearbeitungsprozess unterbrochen haben. 32 Studierende (ca. 22%) erstellen lediglich eine Lösung. Eine zweite Lösung finden 88 Studierende (ca. 62%). Das bedeutet, dass die Aufforderung zwei Lösungen zu entwickeln, bei einem Großteil der Studierenden dazu führt, dass diese tatsächlich auch zwei Lösungen erstellen. Zudem kann man feststellen, dass mehr als ein Fünftel der Lehramtsstudierenden Schwierigkeiten speziell mit dem Erstellen der zweiten Lösung haben.

Nun stellt sich die Frage, welches Vorgehen die Studierenden bei der Variation ihrer Lösungen wählen. Es zeigt sich, dass 81 Studierende (ca. 57% der Gesamtpopulation bzw. ca. 92 % derer, die eine zweite Lösung erstellen) bei der Lösung der Aufgabe „Fallschirmsprung“ ihre Annahmen über die Windgeschwindigkeiten variieren. Dabei wird sowohl die Windgeschwindigkeit zwischen den zwei Flugphasen variiert (leicht – mäßig), als auch die Windgeschwindigkeit in beiden Flugphasen konstant gehalten (leicht – leicht). Die Möglichkeit, die entsprechenden Angaben im Aufgabentext zu variieren, wird selten genutzt. Nur zwei Studierende treffen andere Annahmen im Bezug zur Absprunghöhe, um ihre zweite Lösung zu erstellen. Alle fünf weiteren Variationen sind nicht zielführend. Zur Entwicklung der zweiten Lösung wird bspw. behauptet, man könne die Flugstrecke mithilfe eines Kilometerzählers berechnen. Man kann also festhalten, dass die Zahlen, die in der Tabelle angegeben sind, für die Entwicklung der zweiten Lösung scheinbar vordergründig sind.

Bisher wurden falsche Lösungen in die Analyse miteinbezogen. Zur Beantwortung der dritten Forschungsfrage wurde Lösungsverhalten bezüglich der Richtigkeit der ersten und der zweiten Lösung untersucht. Daraus ergeben sich die folgenden absoluten Häufigkeiten:

Tabelle 2.2 Verteilung der korrekten Lösungen

	Anzahl korrekter Lösungen	Anzahl falscher Lösungen	Anzahl nicht vorhandener Lösungen
1.Lösung	32	88	23
2.Lösung	25	62	56

32 Studierende und somit lediglich 22% aller Studierenden können zur Aufgabe „Fallschirmsprung“ eine korrekte Lösung erstellen. Bei 88 Studierenden ist der erste Lösungsversuch nicht korrekt. Der zweite Lösungsversuch zeigt ein ähnliches Bild: Hier sind 25 Studierende (ca. 17% aller Studierenden) in der Lage erfolgreich eine zweite Lösung zu erstellen, während dies 62 Personen (ca. 43 %) nicht gelingt. Die Analyse der Lösungen zeigt, bis auf

eine Ausnahme, dass die Struktur der ersten Lösung auf die zweite Lösung übertragen wird. Bei der zweiten Lösung findet man aber auch Fehler und Rechnungen wieder, die bei der Entwicklung der ersten Lösung entstanden sind. Es lässt sich daher vermuten, dass ohne entsprechende Intervention bei der zweiten Lösung oft die gleichen Fehler wie bei der ersten Lösung auftreten.

2.3.3 Diskussion

Die Analyse der Lösungen zur Aufgabe „Fallschirmsprung" von Lehramtsstudierenden hat mehrere wichtige Erkenntnisse gebracht. Studierende variieren die Lösung an den Stellen, die in der stoffdidaktischen Analyse vermutet wurden. Es wird vor allem die Windgeschwindigkeit, aber von einzelnen Studierenden alternativ auch die Absprunghöhe, variiert. Ein negatives Ergebnis der Analyse von Lösungsvariationen betrifft die Entwicklung der zweiten Lösung: Mehr als ein Drittel der Studierenden konnte keine zweite Lösung finden. Neben dem Wissen über eine mögliche Lösungsvariation ist die Richtigkeit der Lösung einer Aufgabe ein wichtiger Bestandteil des fachlichen und fachdidaktischen Wissens. Empirische Befunde (Baumert et al. 2010) zeigen einen hohen Zusammenhang des Fachwissens mit dem fachdidaktischen Wissen, welches wiederum einen direkten Einfluss auf die Unterrichtsqualität und hierüber auf die Leistung der Schüler hat. Angehende Lehrkräfte sollten also in der Lage sein, die Aufgabe Fallschirmsprung auf vielfältige Weise richtig zu lösen. Allerdings bearbeiten nur 32 von 143 Studierenden (ca. 22 %) in der Testsituation die Modellierungsaufgabe Fallschirmsprung fehlerfrei, welche mithilfe des Standardstoffs der Sekundarstufe I gelöst werden kann. Dieses katastrophale Ergebnis deutet auf die Notwendigkeit hin, häufiger solche Aufgaben in der Schule und auch im Studium zu behandeln (siehe Förderansätze bei Kaiser und Schwarz (2010) sowie Schukajlow et al. (2012)).

Das Erstellen der zweiten Lösung hilft kaum, die Fehler in der ersten Lösung zu berichtigen. Viel mehr werden die Fehler aus der zweiten Lösung direkt übernommen. Damit kann man festhalten, dass sowohl positive wie auch fehlerbehaftete Arbeitsweisen durch die Aufforderung, in Einzelarbeit (ohne Beteiligung einer Lehrperson) die zweite Lösung zu erstellen, gefestigt werden.

Nachfolgend berichten wir über die Bearbeitung von Schülern zu einer realitätsbezogenen Aufgabe aus dem Inhaltsbereich der linearen Funktionen. Dabei werden – wie in der zweiten Phase des MultiMa-Projekts – die multiplen mathematischen Lösungswege in den Mittelpunkt des Forschungsinteresses gestellt.

2.4 Multiple mathematische Lösungswege am Beispiel der Aufgabe „Hochzeit"

Die Bearbeitung einer realitätsbezogenen Aufgabe lässt häufig eine Variation in mathematischen Lösungswegen zu. Statt eine Seite im rechtwinkligen Dreieck zu berechnen, kann man bei der Aufgabe „Fallschirmsprung" bspw. maßstäbliches Zeichnen anwenden. In der Sekundarstufe I findet man allerdings solche Vielfalt von Lösungswegen wie beim Bearbeiten von Aufgaben zu linearen Funktonen eher selten. Eine Möglichkeit, realitätsbezogene Aufgaben zu linearen Zusammenhängen zu konstruieren, ist, verschiedene Angebote beispielsweise für Dienstleistungen, Aktivitäten oder Anschaffungen vorzustellen. Die Angebote setzen sich häufig jeweils aus fixen und variablen Kosten zusammen. Ziel der Bearbeitung solcher Aufgaben ist, eine Empfehlung für eines der Angebote abzugeben. Die Empfehlung kann auf verschiedenen Lösungswegen basieren, die jeweils das gleiche Ergebnis liefern sollten. Im Folgenden sollen theoretisch denkbare Lösungswege beschrieben werden, die durch die Anwendung verschiedener mathematischer Verfahren beim Modellieren im linear-funktionalen Themenbereich entwickelt werden können. Nach Krämer et al. (2012) lassen sich fünf innermathematische Lösungswege unterscheiden. Diese sind (1) *algebraisch/funktional* beispielsweise durch das Aufstellen eines linearen Gleichungssystems; (2) *graphisch* mithilfe des Zeichnens der entsprechenden Geraden und dem Ablesen des Schnittpunkts; (3) *inhaltlich* durch die Nutzung der konkreten realitätsbezogenen Begriffe und Bezeichnungen zur Bestimmung der Lösung, ohne dabei auf Formalisierungen zurückzugreifen; (4) *numerisch* im Sinne des Aufstellens einer Wertetabelle und des Ablesens des exakten Schnittpunkts; sowie (5) *exemplarisch* durch das Einsetzen einzelner Werte. Die Lösungswege unterscheiden sich insbesondere in der zu erwartenden Lösungsgenauigkeit (bspw. *graphisch* vs. *algebraisch*) und in den benötigten mathematisch-technischen Fähigkeiten (für eine ausführliche Analyse der Lösungswege siehe Krämer et al. 2012).

2.4.1 Analyse der Aufgabe „Hochzeit“

Zunächst soll ein idealtypischer Lösungsprozess der Modellierungsaufgabe „Hochzeit“ (vgl. Bild 2-3) vorgestellt werden.

Hochzeit

Caroline und Thomas wollen am 08. August nächsten Jahres heiraten. Zur Feier haben sie 125 Verwandte, Bekannte und Freunde eingeladen. Für die musikalische Unterhaltung haben sie sich Angebote der beiden folgenden Bands eingeholt:

Party Rhythm	**The Swinging Seven**
Anzahl der Bandmitglieder: 5 Kosten pro Stunde: 180 € Preis für Anfahrt, Auf- und Abbau: 370 €	Anzahl der Bandmitglieder: 7 Kosten pro Stunde: 200 € Preis für Anfahrt, Auf- und Abbau: 260 €

Wann lohnt sich die Band „Party Rhythm“ und wann die Band „The Swinging Seven“?
Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Bild 2-2 Aufgabe „Hochzeit“ (adaptiert aus DISUM)

Die Aufgabe „Hochzeit“ handelt von einer realitätsnahen und authentischen Situation, bei der die Lernenden aufgefordert sind, die lohnenswerteste Band zu bestimmen, ihren Lösungsweg zu notieren und auf Grundlage dessen eine Empfehlung abzugeben. Die inhaltlich-mathematische Struktur der Aufgabe besteht aus Aufgabentext und einer Tabelle mit den Konditionen der Bands. In Text und Tabelle sind neben der allgemeinen Beschreibung der Situation und der für die Aufgabenlösung notwendigen Zahlen auch Informationen aufgeführt, die für die Bearbeitung der Aufgabe irrelevant sind.

Situationsmodell: Zunächst müssen dem Text und der Tabelle die Informationen zur Erfassung der Problemstellung entnommen werden. Caroline und Thomas stehen demnach für ihre Hochzeit zwei Bands zur Verfügung.

Realmodell: Die Entwicklung des Realmodells aus dem Situationsmodell wird durch die Reduktion der Komplexität erreicht. Konkret bedeutet dies, dass alle notwendigen Angaben zur

Bestimmung der lohnenswerteren Band identifiziert werden müssen, also die jeweiligen Preise für Anfahrt, Auf- und Abbau und die Kosten pro Stunde.

Mathematisches Modell: Es gilt, ein passendes mathematisches Modell zu finden, mit dessen Hilfe man die Aufgabe lösen kann. Man überführt bzw. mathematisiert das Realmodell in ein mathematisches Modell, indem mathematische Operatoren und Begriffe auf das Realmodell übertragen werden. Die Preise pro Stunde können als variable Kosten und die Preise für Anfahrt, Auf- und Abbau als fixe Kosten identifiziert und so entsprechende Modelle aufgestellt werden. Mögliche Modelle bzw. Lösungswege zu linearen Funktionen haben wir bereits beschrieben.

Mathematisches Resultat: Die Anwendung eines der beschriebenen Lösungswege ermöglicht es, den Schnittpunkt der linearen Funktionen zu bestimmen. Mithilfe des numerischen Lösungswegs der Tabelle können so beispielsweise für verschiedene Zeiten die Gesamtkosten der jeweiligen Bands ermittelt werden.

Reales Resultat: Das mathematische Resultat wird interpretiert und so in die Realität übersetzt. Der Schnittpunkt (5,5 Stunden) gibt an, für welche Zeit beide Bands gleich günstig sind. Für kürzere Spielzeiten sollte man die Band „The Swinging Seven" wählen, plant man die Bands länger als 5,5 Stunden spielen zu lassen, sollte man sich für „Party Rhythm" entscheiden. Eine entsprechende Interpretation auf Grundlage stündlicher Abrechnungen ist ebenfalls denkbar und richtig.

Bevor das Resultat dargelegt werden kann, gilt es dieses auf Gültigkeit und Plausibilität zu überprüfen. Dazu können Fragestellungen im Hinblick auf das Situationsmodell hilfreich sein. Wurden im Lösungsprozess mehrere Lösungswege verwendet, können diese verglichen und kontrolliert werden. Stellt man Unstimmigkeiten fest, muss der Modellierungskreislauf entweder komplett oder teilweise erneut durchlaufen werden. Das abschließende Darlegen eines Antwortsatzes dient dann ebenfalls dazu, Außenstehenden den Bearbeitungsprozess und die Schlussfolgerungen nachvollziehbar zu machen.

Nachdem wir nun theoretische Überlegungen zum Einsatz von verschiedenen Lösungswegen und einen idealtypischen Lösungsprozess der Aufgabe „Hochzeit" dargelegt haben, wollen wir nachfolgend einzelne Lösungsprodukte zu dieser Aufgabe im Hinblick auf die Qualität und Quantität ihrer Anwendung durch Schüler analysieren.

2.4.2 Empirische Analyse der mathematischen Lösungswege

Bei der Analyse der Lösungen zur Aufgabe „Hochzeit" gehen wir drei Fragestellungen nach:

1. Welche mathematischen Lösungswege werden von Schülerinnen und Schülern bei der Bearbeitung der Aufgabe „Hochzeit" verwendet?
2. Wie erfolgreich bzw. effektiv sind Schülerinnen und Schüler mit ihren entwickelten Lösungswegen?
3. Hat die Auswahl eines Lösungswegs einen Einfluss auf die Qualität der Lösung und welcher Lösungsweg führt besonders häufig zu einer vollständig richtigen Lösung?

Um diese Forschungsfragen zu beantworten, analysieren wir die Lösungen von 146 Neuntklässlerinnen und Neuntklässlern aus Gesamtschulen (47,9 % weiblich, durchschnittlich 14,72 Jahre), die ihm Rahmen des Projekts die Aufgabe „Hochzeit" bearbeitet haben.

Zunächst wird untersucht, welche Lösungswege von den Schülerinnen und Schülern eingesetzt werden und ob sich generelle Präferenzen bezüglich der Auswahl der Lösungswege abzeichnen. Dazu haben zwei unabhängige Rater die entwickelten Lösungswege sowie deren Qualität (vierstufig 0 – no credit bis 3 – full credit) mit sehr guter Übereinstimmung (Cohens Kappa >,98 bzw. >,87) kodiert. Mit „no credit“ wurden alle Lösungen kodiert, bei denen die Lösungswege nicht nachvollziehbar waren, unpassende Modelle aufgestellt, nicht zielführende Rechnungen durchgeführt oder unzureichende Ansätze ohne mathematisches Modell (bspw. Schätzungen) gewählt wurden. Wenn ein sinnvolles mathematisches Modell gebildet und die Rechnungen korrekt durchgeführt, aber eine falsche bzw. keine Interpretation des mathematischen Resultats geliefert wurde, haben wir den Code 1 vergeben. Für korrekte mathematische Resultate und unvollständige Interpretationen, bspw. wenn lediglich ein Antwortsatz für den Schnittpunkt, nicht aber für einen der Bereiche „ober-“ bzw. „unterhalb“ des Schnittpunktes formuliert wurde, gab es den Code 2. Ist letzterer vollständig verfasst worden, wurde die Lösung mit „full credit“ bewertet.

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage soll ein Überblick über die Häufigkeit des Einsatzes der verschiedenen Lösungswege dienen (siehe Bild 2-3). Vorab sollte erwähnt werden, dass 69 von 146 Schülern (ca. 47 %) die Aufgabe nicht bearbeitet haben. Da die Kategorie der Nicht-Bearbeitungen für erste Fragestellung allerdings nicht wesentlich ist, taucht sie in der folgenden Abbildung nicht auf.

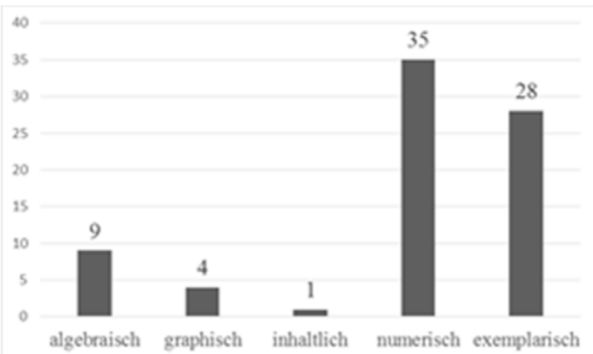

Bild 2-3 Verteilung der verwendeten Lösungswege

Die Schülerinnen und Schüler, die eine Lösung erstellt haben, verwenden häufig den numerischen Lösungsweg mithilfe einer Wertetabelle (ca. 45 %) und den exemplarischen Lösungsweg durch das Betrachten eines Einzelwerts (ca. 36 %). Mit einigem Abstand folgt der algebraische Lösungsweg (ca. 12 %), für den die Schülerinnen und Schüler ein Gleichungssystem aufgestellt haben. Auffällig ist, dass der inhaltliche Lösungsweg nur einmal und der graphische Lösungsweg nur viermal verwendet wird. Der numerische und der exemplarische Lösungsweg stellen vertraute Vorgehensweise dar und sind vermutlich deswegen so zahlreich repräsentiert. Der Umgang mit Zuordnungstabellen und linearen Funktionen ist in der neunten Klasse bereits schon lange bekannt, zusätzlich stehen beiden Lösungswegen konkrete Werte im Vordergrund der Berechnung, was Schülerinnen und Schülern den Zugang zur Aufgabe erleichtert.

Zur Analyse wie erfolgreich Schülerinnen und Schüler mit unterschiedlichen, entwickelten Lösungswegen sind, unterteilen wir nun die Anzahl der verschiedenen Lösungswege entsprechend ihrer Qualität (siehe Tabelle 2.3).

http://www.springer.com/978-3-658-09531-4

Werner Blum und seine Beiträge zum Modellieren im Mathematikunterricht
Festschrift zum 70. Geburtstag von Werner Blum
Kaiser, G.; Henn, H.-W. (Hrsg.)
2015, XII, 327 S. 74 Abb., 9 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-09531-4