2 Funktionen mit einer unabhängigen Variablen

2.1 Funktionsbegriff

Eine Funktion dient der Beschreibung von Zusammenhängen zwischen mehreren verschiedenen Faktoren.

Funktionen in den Wirtschaftswissenschaften

In den Wirtschaftswissenschaften beschäftigen sich viele Fragestellungen mit der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen wirtschaftlichen Größen. So ist es beispielsweise möglich, mit Hilfe mathematischer Verfahren Aussagen über den Zusammenhang zwischen dem Preis eines Gutes und der Nachfrage (Preisabsatzfunktion) oder über den Zusammenhang zwischen Volkseinkommen und Konsumausgaben (Konsumfunktion) zu machen.

Die Lehre von den Funktionen - die Analysis - ist der wohl wichtigste Bereich der Mathematik, der für wirtschaftliche Fragestellungen benötigt wird.

Zunächst müssen einige Begriffe bestimmt werden, deren Kenntnis für die folgenden Kapitel unerlässlich ist.

Variable und Konstante

Funktionen zeigen die gegenseitigen Abhängigkeiten von mehreren Größen. Diese Größen werden Variable (Veränderliche) genannt, wenn sie unterschiedliche Werte annehmen. Sie werden als Konstante bezeichnet, wenn sie nur einen festen Wert annehmen.

Beispiel

Ein Unternehmen, das nur ein Produkt herstellt (Einproduktunternehmen), ist in der Lage, der Produktionsmenge x in einer bestimmten Periode einen Wert K für die Kosten dieser Periode zuzuordnen.

Es existiert ein Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Kosten.

Die meisten Beziehungen zwischen ökonomischen Faktoren sind so gestaltet, dass man jedem Wert einer Größe (x) den Wert einer anderen Größe (y) zuordnen kann. In dem obigen Beispiel ist es möglich, jeder Produktionsmenge die zugehörigen Gesamtkosten zuzuweisen.

H. Holland, D. Holland, *Mathematik im Betrieb*, DOI 10.1007/978-3-658-06565-2_2,

Die Zuordnung von Elementen der einen Menge zu denen einer anderen wird Relation genannt.

Relation und Funktion

Nur eine Relation mit einer eindeutigen Zuordnung ist eine Funktion.

Bei einer eindeutigen Zuordnung wird jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen zugewiesen; jedem x wird genau ein y zugeordnet und nicht mehrere.

Beispiel

Jeder Ware in einem Supermarkt wird genau ein Preis zugeordnet. Es handelt sich um eine Relation mit eindeutiger Zuordnung, also um eine Funktion. Diese Aussage lässt sich jedoch nicht umkehren. Es ist nicht möglich, jedem Preis genau eine Ware zuzuordnen, da durchaus mehrere Waren zum gleichen Preis angeboten werden. Diese Art der Relation ist keine Funktion.

Eine eineindeutige Funktion liegt dann vor, wenn jedem Element der Menge X genau ein Element der Menge Y zugeordnet werden kann (eindeutig) und umgekehrt. Zu jedem x gehört genau ein y, und zu jedem y gehört ebenfalls genau ein x.

Definition

Eine Funktion ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element x der einen Menge eindeutig ein Element y einer anderen Menge zuordnet.

Eine Funktion schreibt man:

$$y = f(x)$$

(y ist eine Funktion von x; y gleich f von x)

Dabei wird y als die abhängige Variable und x als die unabhängige Variable bezeichnet.

Definitions- und Wertebereich

Der Definitionsbereich ist der Gesamtbereich der Werte, die für die unabhängige Variable zugelassen sind. Der Wertebereich ist die Menge der Funktionswerte, die die abhängige Variable y annimmt.

Beispiel

In einer Fabrik, die Farbfernseher produziert, fallen monatliche fixe Kosten in Höhe von 1 Mio. € an. Die variablen Kosten betragen für jeden produzierten Fernseher 400 €. Maximal können 5.000 Fernsehgeräte im Monat produziert werden.

- Gibt es einen Zusammenhang zwischen Produktionsmenge und Kosten?

  Ja, bedingt durch die variablen Kosten.

- Handelt es sich um eine Funktion?

  Ja, es besteht ein eindeutiger Zusammenhang.

- Was ist die unabhängige Variable x?

  Die Produktionsmenge

- Was ist die abhängige Variable y?

  Die Gesamtkosten

- Wie lautet die Funktion $K = f(x)$?

  Funktionsgleichung

  $K = 1.000.000 + 400\,x$ (Summe der fixen und variablen Kosten)

- Welchen Definitions- und Wertebereich hat die Funktion?

  Definitionsbereich von 0 bis 5.000, da die Produktionsmenge einen Wert zwischen 0 und der Kapazitätsgrenze 5.000 annehmen kann.

  Wertebereich von 1 Mio. bis 3 Mio. €, da bei einer Produktion von Null die Fixkosten in Höhe von 1 Mio. € anfallen, und bei einer Produktion von 5.000 die variablen Kosten in Höhe von $5.000 \cdot 400$ hinzukommen.

2.2 Darstellungsformen

Es gibt drei Möglichkeiten, Funktionen darzustellen:

- Tabellarische Darstellung (Wertetabelle)
- Analytische Darstellung (Funktionsgleichung)
- Grafische Darstellung

Bei der Untersuchung konkreter Fragestellungen ist es nicht immer möglich, unter allen drei Darstellungsformen zu wählen, die alle verschiedenen Zwecken dienen und mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen verbunden sind.

Tabellarische Darstellung

Die tabellarische Darstellung ist die einfachste Form, die Abhängigkeit zwischen zwei Variablen anzugeben.

Beispiel

Für das Beispiel der Kostenfunktion K = 1.000.000 + 400x aus dem letzten Kapitel ergibt sich folgende Wertetabelle:

Produktionsmenge	0	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
Gesamtkosten (Mio. €)	1	1,4	1,8	2,2	2,6	3

Zwar lässt sich die Tabelle um beliebig viele Werte erweitern, aber es bleibt der Nachteil, dass keine Aussagen über Zwischenwerte gemacht werden können.

Tabellarische Darstellungen werden eingesetzt, wenn die Funktionsgleichung nicht bekannt ist, sondern nur eine empirisch ermittelte Anzahl von Wertepaaren.

Beispiel

Bruttonationaleinkommen (in Mrd. €) der Bundesrepublik Deutschland in den Jahren 1999 - 2005

Jahr	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Bruttonational-einkommen	1990	2043	2092	2121	2147	2216	2249

Diese Darstellungsform ist auch bei mathematisch komplizierten Funktionen vorteilhaft, um die Anwendung zu vereinfachen (z. B. Einkommensteuertabelle).

Häufig verwendete mathematische Funktionen werden tabellarisch dargestellt (z. B. Logarithmentafeln, Tafeln für $\sqrt{x}$, x^2, x^3, sin x, …).

Der Nutzen mathematischer Tabellenwerke hat allerdings in den letzten Jahren durch die Verbreitung preisgünstiger, leistungsfähiger Taschenrechner stark abgenommen.

Analytische Darstellung

Die analytische Darstellung als Funktionsgleichung y = f(x) erlaubt es, aus beliebigen Werten der unabhängigen Variablen x den zugehörigen Wert der abhängigen Variablen y exakt zu berechnen.

Beispiele für Funktionsgleichungen

$K = 1.000.000 + 400x \quad (\text{für } 0 \leq x \leq 5.000)$

$y = 3x^2 + 2x + e^x - 17$

$y = \ln(3x + 7) - \sqrt{x}$

Bei vielen ökonomischen Fragestellungen ist der Definitionsbereich beschränkt; dies muss mit der Funktionsgleichung angegeben werden.

Die mathematisch-analytische Funktionsgleichung ist bei ökonomischen Beziehungen häufig unbekannt, oder sie kann nur in einer groben Annäherung angegeben werden. So lässt sich zum Beispiel die zeitliche Entwicklung des Bruttonationaleinkommens in einem Land nicht exakt durch eine Funktionsgleichung beschreiben.

Grafische Darstellung

Das Einzeichnen von Wertepaaren (x; y) der Funktion $y = f(x)$ in ein (rechtwinkliges kartesisches) Koordinatensystem bedeutet eine Reduktion auf die wesentlichen Merkmale. Aus dem Schaubild lassen sich zwar die Werte nicht exakt ablesen, aber diese Darstellungsform ist visuell gut aufzunehmen, da sie es erlaubt, die relevanten Informationen sehr schnell zu erfassen.

Eine grafische Darstellung eignet sich gut für Funktionen mit einer unabhängigen Variablen; bei zwei Unabhängigen ist sie schon problematisch, da hierfür ein dreidimensionaler Raum modellhaft in der Ebene abgebildet werden muss (s. Kap. 3.4). Funktionen mit drei und mehr Unabhängigen sind praktisch nicht mehr grafisch darstellbar.

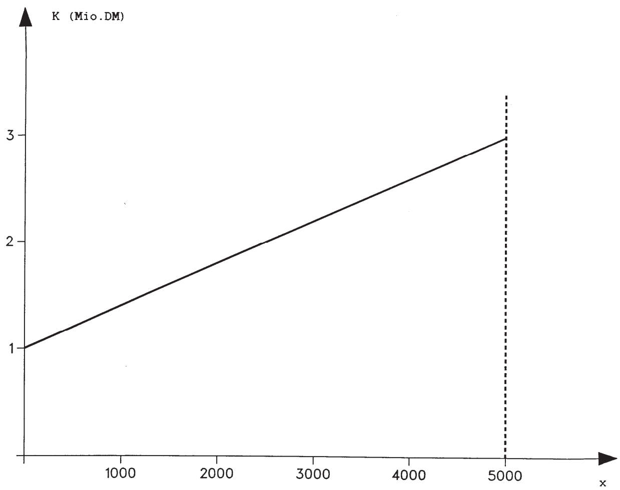
Abszisse und Ordinate

Das Koordinatensystem besteht für Funktionen mit einer abhängigen und einer unabhängigen Variablen aus zwei senkrecht aufeinander stehenden Achsen. An der horizontalen Achse - der Abszisse - wird im Allgemeinen die unabhängige Variable x abgetragen (x-Achse) und an der Ordinate die abhängige Variable y (y-Achse).

Beispiel

Die Kostenfunktion $K(x) = 1.000.000 + 400x$ für $0 \leq x \leq 5.000$ hat folgende grafische Abbildung (K in Mio €):

Abbildung 2.2-1 *Kostenfunktion*



Aufgaben

Stellen Sie die folgenden Funktionen grafisch dar:

2.2.1. $f(x) = y = 50 + 10x$

2.2.2. $f(x) = y = 20 - x$

2.2.3. $f(x) = y = x^2 + 3$

2.3 Umkehrfunktionen

Da bei einer eineindeutigen Funktion jedem x genau ein y und jedem y genau ein x zugeordnet wird, ist eine Umkehrung der Zuordnungsvorschrift möglich.

Wenn man die Funktionsgleichung $y = 4x$ nach der unabhängigen Variablen auflöst, erhält man die Umkehrfunktion $x = \frac{1}{4}y$

Die Funktion, die man durch Umkehrung der Zuordnungsvorschrift aus einer eineindeutigen Funktion ableiten kann, heißt Umkehrfunktion oder Inverse.

Man schreibt:

Definition

$$x = f^{-1}(y)$$

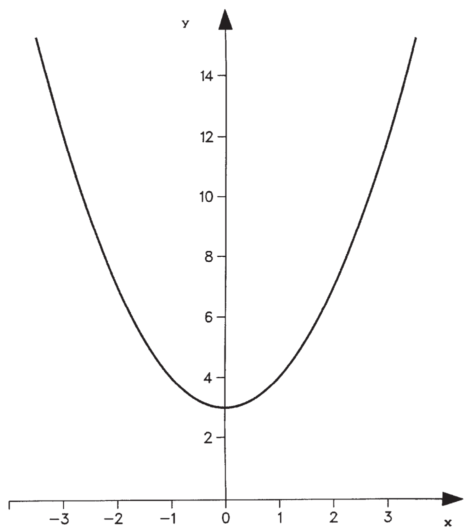
Beispiele

$y = 2x + 4 \quad 2x = y - 4$	$x = \frac{1}{2} \cdot y - 2$
$y = ax + b$	$x = \frac{1}{a}\, y - \frac{b}{a} \quad$ (für $a \neq 0$)
$y = x^2 \quad (x \geq 0)$	$x = \sqrt{y}$

Die Funktion $y = x^2$ ist nicht eineindeutig, da jedem y zwei Werte für x zugeordnet sind (vgl. Abb. 2.3-1).

Abbildung 2.3-1

Funktion $y = x^2$



Zu y = 4 gehören die Werte 2 und –2 für x, da $y = x^2$ eine Parabel darstellt, bei der x-Werten, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, der gleiche y-Wert zugeordnet wird.

Einschränkung des Definitionsbereiches

Somit ist die Umkehrung der Funktion keine Funktion mehr ($x = \sqrt{y}$), da sie keine eindeutige Zuordnungsvorschrift enthält. Jedem Wert der unabhängigen Variablen (jetzt y) werden zwei Werte der abhängigen (x) zugeordnet (s. Kap. 1.3). Durch die Einschränkung des Definitionsbereiches ($x \geq 0$) der ursprünglichen Funktion $y = x^2$ entsteht eine eineindeutige Funktion, die sich auch umkehren lässt.

Aus dem Definitionsbereich der Ursprungsfunktion wird der Wertebereich der Umkehrfunktion, und aus dem Wertebereich wird der neue Definitionsbereich.

Zur Bestimmung der Umkehrfunktion muss die Funktionsgleichung nach der unabhängigen Variablen aufgelöst werden.

In vielen Büchern findet man die Anweisung, dass neben der Auflösung der Funktion nach der Unabhängigen auch die Variablen vertauscht werden müssen.

Zu $y = 4x$ würde die Umkehrfunktion dann $y = \frac{1}{4}x$ sein.

Keine Vertauschung der Variablen

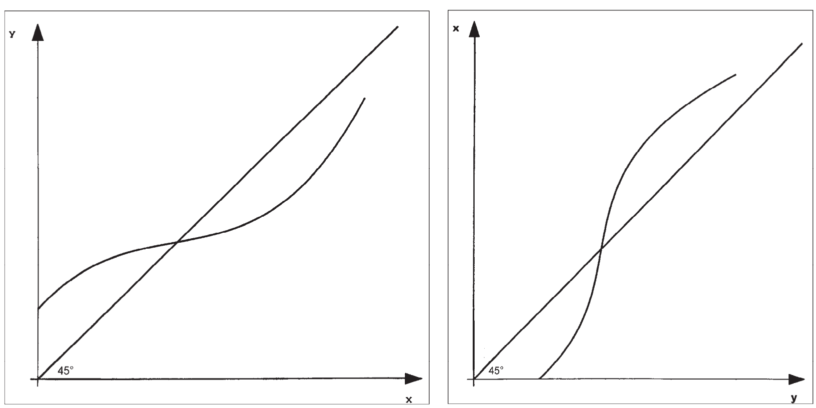
Im Bereich der Wirtschaftswissenschaften darf diese Vertauschung der Variablen nicht erfolgen, da die Variablen hier ökonomische Größen repräsentieren. Eine Vertauschung würde zu Fehlinterpretationen führen.

Grafische Bestimmung

Grafisch lässt sich eine Umkehrfunktion durch die Spiegelung der Funktion und des Koordinatensystems an der 45°- Linie bestimmen.

Abbildung 2.3-2 + 2.3-3

Umkehrfunktion grafische Bestimmung



2.4 Lineare Funktionen

Zur Vereinfachung der Berechnung werden sehr viele ökonomische Zusammenhänge durch lineare Funktionen beschrieben.

Die grafische Darstellung einer linearen Funktion ergibt eine Gerade. Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet:

Allgemeine Funktionsgleichung

$$y = mx + b$$

Symbole

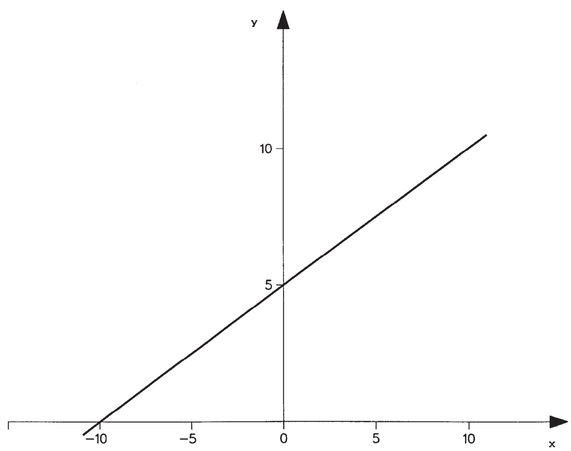
x – unabhängige Variable
y – abhängige Variable
m – Steigung
b – Schnittpunkt mit der Ordinate, Ordinatenabschnitt

Beispiel

$$y = \frac{1}{2} x + 5$$

Abbildung 2.4-1

Funktion $y = \frac{1}{2} x + 5$



Ordinatenabschnitt

Dadurch, dass man x = 0 setzt, erhält man den Schnittpunkt einer Funktion mit der Ordinate.

Bei linearen Funktionen kann der Ordinatenabschnitt b direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden.

Für das obige Beispiel ergibt sich:

$$x = 0 \qquad y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 5 \qquad y = 5 = b$$

Steigung

Die Steigung m beträgt in der Beispielsfunktion $\frac{1}{2}$.

Wenn x um eine Einheit steigt, steigt y um eine halbe Einheit ($m = \frac{1}{2}$).

Die Steigung gibt das Verhältnis der Änderung der abhängigen Variablen zu der der unabhängigen an.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Änderung der abhängigen Variable}}{\text{Änderung der unabhängigen Variable}}$$

Die Steigung einer Geraden ist während ihres gesamten Verlaufes konstant.

$m > 0$ bedeutet eine steigende Gerade

$m < 0$ bedeutet eine fallende Gerade

$m = 0$ Parallele zur Abszisse

Je größer $|m|$, desto steiler ist die Gerade.

Durch zwei Punkte ist eine Gerade hinreichend beschrieben, da es nur eine Gerade gibt, die durch zwei Punkte gezeichnet werden kann.

Um eine lineare Funktion zu zeichnen, genügt es also zwei Punkte zu bestimmen. Der erste Punkt könnte zweckmäßigerweise der Ordinatenabschnitt sein, der sich direkt ablesen lässt. Durch Einsetzen eines weiteren x-Wertes in die Funktionsgleichung werden die Koordinaten eines zweiten Punktes ermittelt, der wegen der Zeichengenauigkeit nicht zu nahe am ersten liegen sollte. Mit der Verbindung beider Punkte durch eine Gerade ist die lineare Funktionsgleichung dargestellt.

Aufgaben

Bestimmen Sie Steigung und Ordinatenabschnitt der folgenden Funktionen und zeichnen Sie diese.

2.4.1. $y = x + 4$
2.4.2. $y = 2x - 1$
2.4.3. $y = x$
2.4.4. $y = 4$

http://www.springer.com/978-3-658-06564-5

Mathematik im Betrieb
Praxisbezogene Einführung mit Beispielen
Holland, H.; Holland, D.
2014, XI, 389 S. 77 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-06564-5