

2 Modellierungsbeispiele

In diesem Kapitel beschreiben wir für verschiedene physikalische Probleme, wie man zu deren mathematischer Formulierung gelangt. Wir diskutieren dies anhand der stationären und instationären Wärmeleitung. Außerdem betrachten wir eindimensionale Deformations- und Schwingungsprobleme sowie mehrdimensionale Elastizitätsprobleme. Um ein entsprechendes mathematisches Modell zu erhalten, nutzen wir Energiebilanzen, Erhaltungssätze, Kräfte- und Momentengleichgewichte sowie Stoffgesetze. Als Resultat dieser Modellierung entstehen Randwertprobleme und Anfangsrandwertprobleme, deren näherungsweise Lösung in den folgenden Kapiteln ausführlich diskutiert wird.

2.1 Wärmeleitprobleme

Wir betrachten zuerst ein einfaches, räumlich eindimensionales Beispiel, nämlich die stationäre Wärmeleitung in einem dünnen Stab. Danach wenden wir die Modellierungstechniken auf stationäre Wärmeleitprobleme in dreidimensionalen Körpern an. Außerdem betrachten wir einige Spezialfälle, die auf räumlich zweidimensionale Randwertprobleme zurückgeführt werden können. In der Praxis sind Wärmeleitprobleme im Allgemeinen instationär, d.h. das gesuchte Temperaturfeld hängt nicht nur von der Ortsvariablen x , sondern auch von der Zeit t ab. Wir beginnen bei der Modellierung zeitabhängiger (instationärer) Wärmeleitprobleme wieder mit dem räumlich eindimensionalen Fall. Danach verallgemeinern wir die Vorgehensweise auf den räumlich mehrdimensionalen Fall und auf Wärmeleit-Wärmetransport-Probleme.

2.1.1 Stationäres Wärmeleitproblem in einem eindimensionalen Gebiet

Physikalisches Problem

Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x_1)$, $x_1 \in (a, b)$, in einem dünnen Stab mit der Länge $\ell = b - a$ und konstantem Querschnitt Q . Die Länge ℓ sei viel größer als der Durchmesser des Querschnitts. Ein Beispiel für ein derartiges Problem ist die Ermittlung des Temperaturfeldes in einem Draht, der sich infolge der Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme aufheizt.

Die Temperaturverteilung im Stab wird durch Wärmequellen im Stab und den Kontakt mit der Umgebung beeinflusst. Diese Einflussfaktoren sind in der Abbildung 2.1 schematisch dargestellt. Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass alle Einflussgrößen nur von der Koordinatenrichtung längs der Achse des Stabes abhängen. Unter dieser Voraussetzung hängt die Temperaturverteilung auch nur von dieser Koordinatenrichtung ab. Deshalb kann das Problem aus der realen räumlich dreidimensionalen Welt als räumlich eindimensionales Problem (1D-Problem) betrachtet werden.

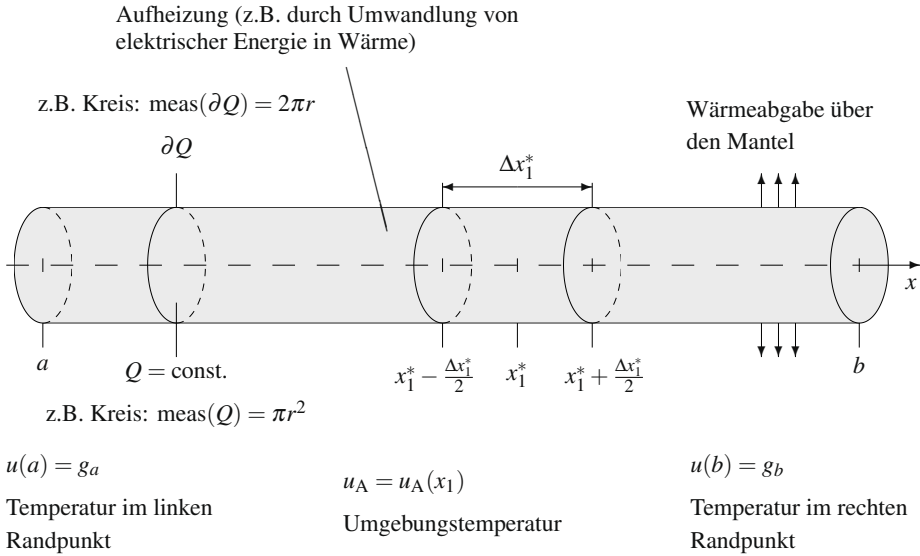


Abbildung 2.1: Einflüsse auf die Temperaturverteilung im Stab

Im Folgenden stellen wir die Wärmemengenbilanz an einem Teilstück des Stabes der Länge Δx_1^* auf (siehe Abbildung 2.2). Aus dieser Wärmemengenbilanz erhalten wir eine Wärmeleitgleichung in integraler Form. Hieraus werden wir durch den Grenzübergang $\Delta x^* \rightarrow 0$ die Wärmeleitgleichung in differentieller Form ableiten.

Wärmemengenbilanz an einem „kleinen“ Stabstück S der Länge Δx_1^*

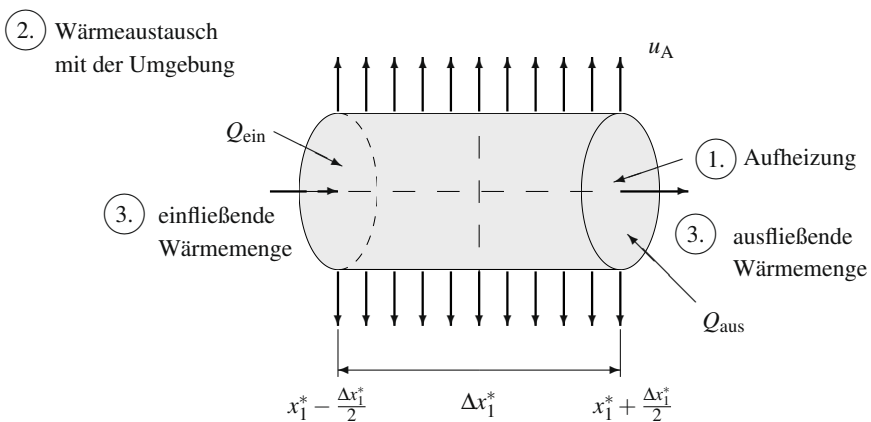


Abbildung 2.2: Wärmemengenbilanz an einem „kleinen“ Stabstück

1. Wärmemenge, die durch Aufheizung entsteht:

$$W_H = \int_S f(x_1) dx_1 dx_2 dx_3 = \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1) dx_1.$$

Die Funktion f charakterisiert die Intensität der Wärmequelle. Der Flächeninhalt von Q ist mit $\text{meas}(Q)$ bezeichnet.

2. Transportierte Wärmemenge beim Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel:

$$W_A = \int_{\partial Q \times \left[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2} \right]} q(x_1) (u(x_1) - u_A(x_1)) dO.$$

Dieses Oberflächenintegral über den Mantel des Stabes $\partial S = \partial Q \times \left[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2} \right]$ kann aufgrund der Tatsache, dass alle Größen nur von der Variablen x_1 abhängen, wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} W_A &= \text{meas}(\partial Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} q(x_1) (u(x_1) - u_A(x_1)) dx_1 & (2.1) \\ &= \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \underbrace{\frac{\text{meas}(\partial Q)}{\text{meas}(Q)}}_{\bar{q}(x_1)} q(x_1) (u(x_1) - u_A(x_1)) dx_1. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet die Funktion q den Wärmeaustauschkoeffizienten und $\text{meas}(\partial Q)$ den Umfang des Querschnitts Q . Der Wärmeaustauschkoeffizient ist eine materialabhängige Größe.

3. Wärmemenge, die am linken Rand des Stabstückes, d.h. bei $x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}$, in „ Δx_1^* “ hineinfließt bzw. am rechten Rand, d.h. bei $x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}$, aus „ Δx_1^* “ herausfließt:

Nach dem *Fourierschen Erfahrungsgesetz der Wärmeleitung* (siehe [CH02, JT08, Stö05]) ist der Wärmefluss $\sigma(x_1)$ proportional zum negativen Temperaturgradienten $-u'(x_1)$. Führen wir als Proportionalitätsfaktor die Wärmeleitzahl $\lambda(x_1)$ ein, dann gilt

$$\sigma(x_1) = -\lambda(x_1) u'(x_1).$$

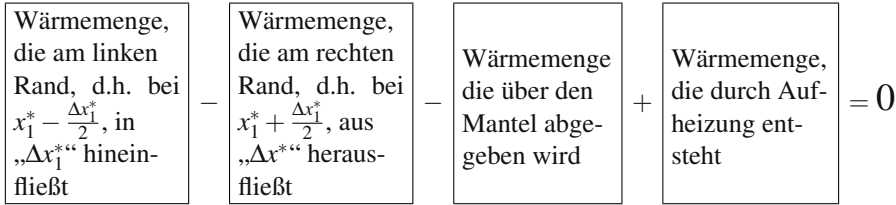
Somit ergibt sich für die einfließende Wärmemenge

$$\begin{aligned} W(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) &= \int_{Q_{\text{ein}}} -\lambda(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) dx_2 dx_3 \\ &= -\lambda(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) \text{meas}(Q) \end{aligned}$$

und für die ausfließende Wärmemenge

$$\begin{aligned}
 W(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) &= \int_{Q_{\text{aus}}} -\lambda(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) dx_2 dx_3 \\
 &= -\lambda(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) \text{meas}(Q) .
 \end{aligned}$$

Aus der Wärmemengenbilanz



$$W(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) - W(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) - W_A + W_H = 0$$

erhalten wir die integrale Form der Wärmeleitgleichung.

Die Wärmeleitgleichung in integraler Form

Für alle $x_1^* \in (a, b)$ und für alle $\Delta x_1^* > 0$ mit $[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}] \subset (a, b)$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}
 &-\lambda(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}) \text{meas}(Q) + \lambda(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) u'(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) \text{meas}(Q) \\
 &- \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1) (u(x_1) - u_A(x_1)) dx_1 + \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1) dx_1 = 0 .
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Der Einfluss der Umgebung der Randpunkte $x_1 = a$ und $x_1 = b$ auf die Temperaturverteilung kann auf verschiedene Weise im mathematischen Modell berücksichtigt werden. Im Moment betrachten wir nur den Fall, dass die Temperaturen vorgegeben sind, d.h. $u(a) = g_a$ sowie $u(b) = g_b$ mit gegebenen Temperaturwerten g_a und g_b . Andere Möglichkeiten der Vorgabe von Bedingungen in den Randpunkten diskutieren wir am Ende dieses Abschnitts.

Ausgehend von der Wärmeleitgleichung (2.2) in integraler Form leiten wir im Folgenden die differentielle Form der Wärmeleitgleichung her.

Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei homogenem Material und stetiger Wärmequelle

Wir gehen zunächst von folgenden Voraussetzungen aus:

- (i) $q \in C(a, b)$, d.h. q ist eine stetige Funktion im Intervall (a, b) , $q \geq 0$, z.B. $q = \text{konst.} \geq 0$ ($q = 0$ entspricht einer Isolation),
- (ii) $\lambda \in C^1(a, b)$, d.h. λ ist eine stetig differenzierbare Funktion im Intervall (a, b) , $\lambda(x_1) \geq \lambda_0 = \text{konst.} > 0$, z.B. $\lambda = \text{konst.}$,

- (iii) $f \in C(a, b)$, d.h. f ist eine stetige Funktion im Intervall (a, b) ,
 (iv) $u_A \in C(a, b)$, d.h. u_A ist eine stetige Funktion im Intervall (a, b) .

Diese Voraussetzungen sind allgemeiner als sie für homogene Materialien benötigt werden. Die folgenden Betrachtungen gelten deshalb sogar für eine breitere Klasse von Materialien. Im Fall homogener Materialien wird $\lambda = \text{konst.} > 0$ und $q = \text{konst.} \geq 0$ vorausgesetzt.

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe [MV01a, Zei13]) folgt, dass für eine beliebige Funktion $v \in C\left[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right]$ die Beziehung

$$\lim_{\Delta x_1^* \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1^*} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} v(x_1) dx_1 = v(x_1^*) \quad (2.3)$$

gilt. Multiplizieren wir die Gleichung (2.2) mit -1 und dividieren sie durch Δx_1^* sowie $\text{meas}(Q)$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \frac{\lambda \left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) u' \left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) - \lambda \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) u' \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right)}{\Delta x_1^*} + \frac{1}{\Delta x_1^*} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1) u(x_1) dx_1 \\ & = \frac{1}{\Delta x_1^*} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1) dx_1 + \frac{1}{\Delta x_1^*} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1) u_A(x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Mit $\Delta x_1^* \rightarrow 0$ ergibt sich aufgrund der Voraussetzungen (i) – (iv) und der Beziehung (2.3) die Differentialgleichung

$$-(\lambda(x_1^*)u'(x_1^*))' + \bar{q}(x_1^*)u(x_1^*) = f(x_1^*) + \bar{q}(x_1^*)u_A(x_1^*) \quad \text{für alle } x_1^* \in (a, b).$$

Bemerkung 2.1

Aus den Voraussetzungen (i) – (iv) folgt, dass $u \in C^2(a, b)$, d.h. die Temperatur ist eine im Intervall (a, b) zweimal stetig differenzierbare Funktion und $\sigma \in C^1(a, b)$, d.h. der Wärmefluss ist eine im Intervall (a, b) stetig differenzierbare Funktion.

Als Endergebnis unserer bisherigen Betrachtungen erhalten wir die folgende differentielle Form der Wärmeleitgleichung.

Gesucht ist $u(x) \in C^2(a, b) \cap C[a, b]$, so dass die Differentialgleichung

$$-(\lambda(x)u'(x))' + \bar{q}(x)u(x) = f(x) + \bar{q}(x)u_A(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b) \quad (2.4)$$

gilt sowie die Randbedingungen $u(a) = g_a$ und $u(b) = g_b$ erfüllt werden.

Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir in der Differentialgleichung (2.4) die Ortskoordinate mit x anstelle von x_1 bezeichnet. Diese verkürzte Schreibweise werden wir auch im Weiteren nutzen, wenn eindeutig ist, welche Raumdimension gerade betrachtet wird.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass die Eingangsdaten wie der Wärmeaustauschkoefizient, die Funktion zur Charakterisierung der Intensität der Wärmequelle und die Wärmeleitfähigkeit stetige bzw. stetig differenzierbare Funktionen sind. Im Folgenden werden wir diese Voraussetzungen abschwächen. Wir betrachten den Fall, dass die Eingangsdaten nur stückweise diese Eigenschaften besitzen, z.B. wenn der betrachtete Stab aus mehreren Materialien zusammengesetzt ist.

Die differentielle Form der Wärmeleitgleichung bei stückweise homogenem Material und stückweise stetiger Wärmequelle

Wir betrachten o.B.d.A. einen Stab, bestehend aus zwei Materialien (siehe Abbildung 2.3).

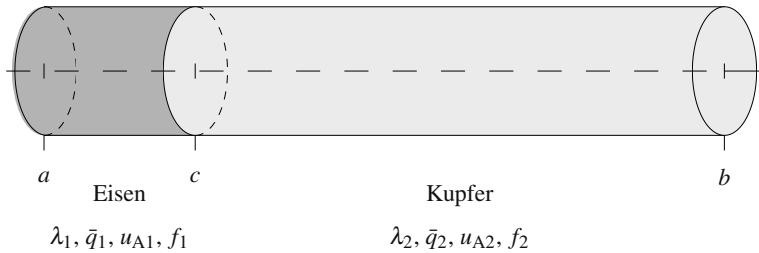


Abbildung 2.3: Stab, bestehend aus zwei verschiedenen Materialien

Es wird vorausgesetzt, dass $\lambda_1, \bar{q}_1, u_{A1}$ und f_1 im Intervall (a, c) den auf der Seite 36 angegebenen Voraussetzungen (i) – (iv) sowie $\lambda_2, \bar{q}_2, u_{A2}$ und f_2 diesen Voraussetzungen im Intervall (c, b) genügen.

Eine zur Herleitung der Wärmeleitgleichung (2.4) analoge Vorgehensweise liefert die Randwertaufgabe für die Wärmeleitung bei stückweise homogenem Material und stückweise stetiger Wärmequelle.

Gesucht ist das Temperaturfeld $u(x)$, für das die folgenden Beziehungen gelten:

Randbedingung:
$$u(a) = g_a,$$

Differentialgleichung:
$$-(\lambda_1 u')' + \bar{q}_1 u = f_1 + \bar{q}_1 u_{A1} \quad \text{für alle } x \in (a, c),$$

Interfacebedingungen:
$$u(c-0) = u(c+0),$$

$$-\lambda_1(c-0)u'(c-0) = -\lambda_2(c+0)u'(c+0),$$

Differentialgleichung:
$$-(\lambda_2 u')' + \bar{q}_2 u = f_2 + \bar{q}_2 u_{A2} \quad \text{für alle } x \in (c, b),$$

Randbedingung:
$$u(b) = g_b.$$

Die Interfacebedingungen (Übergangsbedingungen) erhalten wir unmittelbar aus dem Erhaltungsprinzip, dass der Wärmefluss und die Temperatur stetig sind.

Die Schreibweise $u(c-0) = u(c+0)$ bedeutet, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert der Funktion u an der Stelle $x = c$ übereinstimmen, d.h. $\lim_{x \rightarrow c-0} u(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} u(x)$.

Bisher haben wir nur den Fall betrachtet, dass am linken und rechten Rand des Stabes Werte für die Temperatur vorgegeben sind. Diese Art der Randbedingung, d.h. die Vorgabe von Funktionswerten der gesuchten Funktion, wird als *Randbedingung 1. Art* oder auch als *Dirichletsche Randbedingung* bzw. als *wesentliche Randbedingung* bezeichnet. Es können jedoch auch andere Situationen bei der Modellierung von Wärmeleitproblemen auftreten. Beispielsweise kann an einem oder an beiden Stabenden ein Wärmefluss in den Stab erfolgen oder man möchte an den Stabenden den Wärmeaustausch mit der Umgebung modellieren, welcher durch die Temperaturdifferenz an den Stabenden und der Umgebungstemperatur verursacht wird.

Wir betrachten zuerst die Situation, dass am linken und rechten Stabende ein gegebener Wärmefluss mathematisch modelliert werden soll. Bevor wir die entsprechende mathematische Beschreibung angeben, erläutern wir kurz die Vorgehensweise bei räumlich dreidimensionalen Körpern und diskutieren die daraus resultierende Vereinfachung im räumlich eindimensionalen Fall. Bei der mathematischen Beschreibung des Wärmeflusses über einen Teil der Oberfläche des Körpers gibt man den Wärmefluss in Richtung der äußeren Einheitsnormalen in den Punkten dieses Teils der Oberfläche vor. Dabei ist der *Vektor der äußeren Einheitsnormalen* \vec{n} ein Vektor, der senkrecht auf der Tangentialebene im entsprechenden Punkt der Oberfläche steht, nach außen zeigt und dessen Betrag gleich Eins ist. Der Wärmefluss in Richtung der äußeren Einheitsnormalen \vec{n} wird dann bei einem homogenen Material durch

$$\vec{n}^T \vec{\sigma} = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 - \lambda \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 - \lambda \frac{\partial u}{\partial x_3} n_3 \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

beschrieben.

An den Stabenden (siehe Abbildung 2.4) ist der Vektor der äußeren Einheitsnormalen parallel zur x_1 -Achse und er zeigt am Stabanfang bei $x_1 = a$ in Richtung der negativen x_1 -Achse und am Stabende bei $x_1 = b$ in Richtung der positiven x_1 -Achse. Somit lautet der Vektor der äußeren Einheitsnormalen \vec{n}_a bei $x_1 = a$ und \vec{n}_b bei $x_1 = b$

$$\vec{n}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

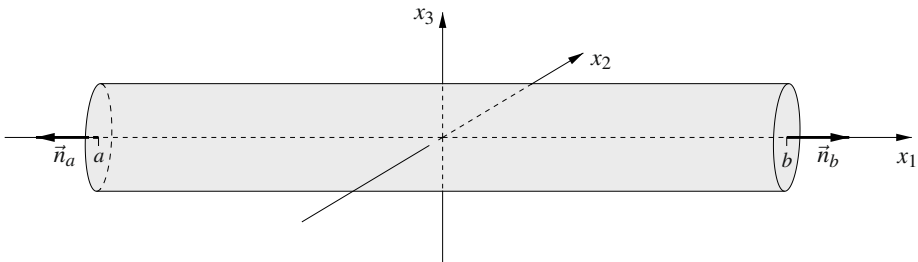


Abbildung 2.4: Vektor der äußeren Einheitsnormalen am Stabanfang und Stabende

Damit ergibt sich aus (2.5) am linken Rand des Stabes

$$\vec{n}^T \vec{\sigma} = \sigma_1 n_1 = -\lambda \frac{du}{dx_1} \cdot (-1) = \lambda \frac{du}{dx_1}$$

und am rechten Rand

$$\vec{n}^T \vec{\sigma} = \sigma_1 n_1 = -\lambda \frac{du}{dx_1} \cdot 1 = -\lambda \frac{du}{dx_1}.$$

Ein vorgegebener Wärmefluss am linken bzw. rechten Stabende wird somit wie folgt mathematisch beschrieben:

$$\lambda(a)u'(a) = g_a \quad \text{und} \quad -\lambda(b)u'(b) = g_b.$$

Derartige Randbedingungen werden als *Randbedingungen 2. Art* oder *Neumannschen Randbedingungen* oder *natürliche Randbedingungen* bezeichnet.

Der freie Wärmeaustausch mit der Umgebung an den Stabenden wird analog wie der Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Mantel modelliert. Aufgrund der Tatsache, dass der Wärmefluss proportional zur Differenz zwischen dem Wert der Temperatur am Rand und der Umgebungstemperatur ist, muss gelten

$$\lambda(a)u'(a) = \alpha_a(u(a) - u_a) \quad \text{und} \quad -\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - u_b).$$

Dabei bezeichnen α_a und α_b die Wärmeübergangszahlen sowie u_a und u_b die Außentemperatur am linken bzw. rechten Rand. Derartige Randbedingungen nennt man *Randbedingungen 3. Art* oder *Robinsche Randbedingungen*.

Natürlich muss nicht an beiden Stabenden die gleiche Situation hinsichtlich des Kontakts zur Umgebung vorliegen, sondern es sind beliebige Kombinationen der obigen Situationen denkbar, z.B. kann am linken Rand eine bestimmte Temperatur anliegen und das rechte Stabende wärmeisoliert sein, d.h.

$$u(a) = g_a, \quad u'(b) = 0,$$

oder es kann das linke Stabende wärmeisoliert sein und am rechten Stabende erfolgt der freie Wärmeaustausch mit der Umgebung, d.h.

$$u'(a) = 0, \quad -\lambda(b)u'(b) = \alpha_b(u(b) - u_b).$$

In solchen Fällen spricht man von *gemischten Randbedingungen*.

2.1.2 Stationäre Wärmeleitprobleme in mehrdimensionalen Gebieten

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir ausführlich die Herleitung der stationären Wärmeleitgleichung im eindimensionalen Fall diskutiert. In diesem Abschnitt leiten wir die stationäre Wärmeleitgleichung für den allgemeinen räumlich dreidimensionalen Fall her. Außerdem betrachten wir einige Spezialfälle, die sich auf räumlich zweidimensionale Probleme reduzieren lassen.

Physikalisches Problem

Gesucht ist das stationäre Temperaturfeld $u(x)$ in einem dreidimensionalen Körper, der ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ einnimmt (siehe z.B. Abbildung 2.5).

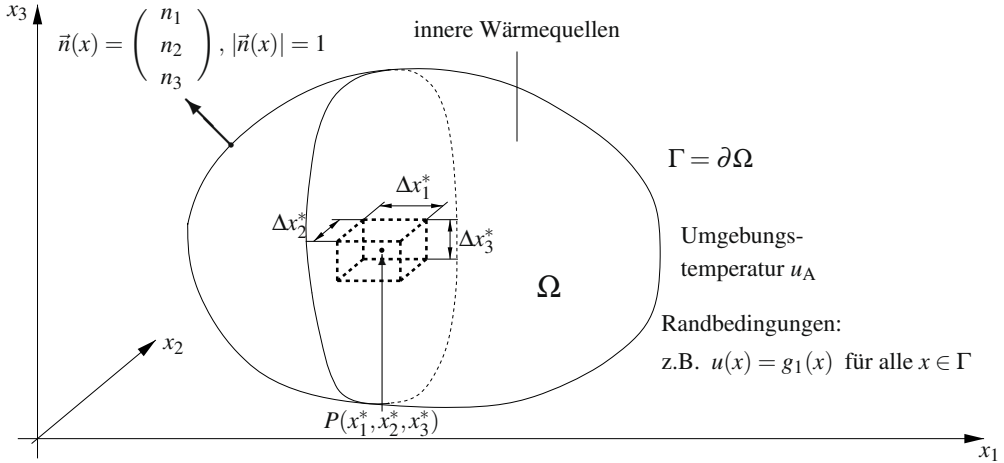


Abbildung 2.5: Skizze eines 3D-Körpers

Analog wie im eindimensionalen Fall führen wir zunächst eine Wärmemengenbilanz an einem kleinen Teilgebiet des Körpers durch.

Wärmemengenbilanz an einem „kleinen“ Quader „ $\Delta x_1^* \times \Delta x_2^* \times \Delta x_3^*$ “ mit dem Schwerpunkt im Punkt $P(x^*) = P(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \Omega$

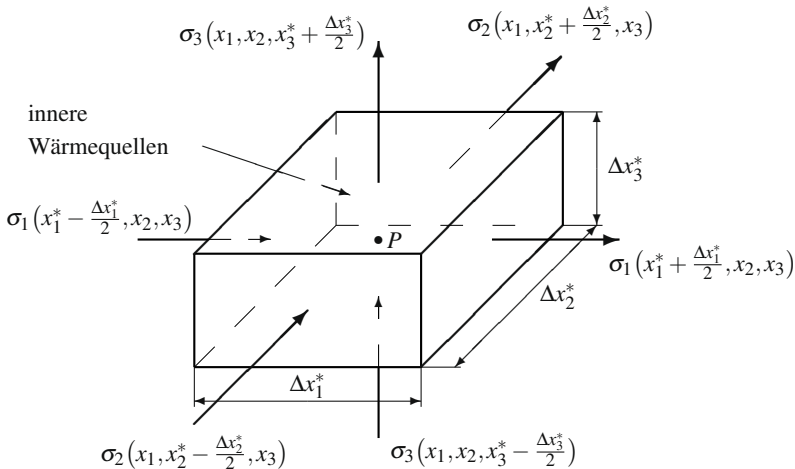


Abbildung 2.6: Wärmemengenbilanz an einem Quader „ $\Delta x_1^* \times \Delta x_2^* \times \Delta x_3^*$ “

Für alle $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \Omega$ und für alle $\Delta x_1^*, \Delta x_2^*, \Delta x_3^* > 0$ mit $\{(x_1, x_2, x_3) : x_i^* - \frac{\Delta x_i^*}{2} \leq x_i \leq x_i^* + \frac{\Delta x_i^*}{2}, i = 1, 2, 3\} \subset \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{x_2^* - \frac{\Delta x_2^*}{2}}^{x_2^* + \frac{\Delta x_2^*}{2}} \int_{x_3^* - \frac{\Delta x_3^*}{2}}^{x_3^* + \frac{\Delta x_3^*}{2}} \sigma_1(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_2, x_3) dx_3 dx_2 - \int_{x_2^* - \frac{\Delta x_2^*}{2}}^{x_2^* + \frac{\Delta x_2^*}{2}} \int_{x_3^* - \frac{\Delta x_3^*}{2}}^{x_3^* + \frac{\Delta x_3^*}{2}} \sigma_1(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_2, x_3) dx_3 dx_2 \\
& + \int_{x_3^* - \frac{\Delta x_3^*}{2}}^{x_3^* + \frac{\Delta x_3^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \sigma_2(x_1, x_2^* - \frac{\Delta x_2^*}{2}, x_3) dx_1 dx_3 - \int_{x_3^* - \frac{\Delta x_3^*}{2}}^{x_3^* + \frac{\Delta x_3^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \sigma_2(x_1, x_2^* + \frac{\Delta x_2^*}{2}, x_3) dx_1 dx_3 \\
& + \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \int_{x_2^* - \frac{\Delta x_2^*}{2}}^{x_2^* + \frac{\Delta x_2^*}{2}} \sigma_3(x_1, x_2, x_3^* - \frac{\Delta x_3^*}{2}) dx_2 dx_1 - \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \int_{x_2^* - \frac{\Delta x_2^*}{2}}^{x_2^* + \frac{\Delta x_2^*}{2}} \sigma_3(x_1, x_2, x_3^* + \frac{\Delta x_3^*}{2}) dx_2 dx_1 \\
& + \int_{x_3^* - \frac{\Delta x_3^*}{2}}^{x_3^* + \frac{\Delta x_3^*}{2}} \int_{x_2^* - \frac{\Delta x_2^*}{2}}^{x_2^* + \frac{\Delta x_2^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

In der Beziehung (2.6) und in Abbildung 2.6 bezeichnet σ_i , $i = 1, 2, 3$, den Wärmefluss in Richtung x_i . Auf dem Rand $\partial\Omega$ müssen noch Randbedingungen formuliert werden, die den Einfluss der Umgebung auf die Temperaturverteilung im Körper beschreiben. Beispielsweise kann die Temperatur am Rand vorgegeben sein.

Aufgrund des *Fourierschen Erfahrungsgesetzes der Wärmeleitung* gelten für ein orthotropes Material die Beziehungen

$$\sigma_i = -\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Unter den Voraussetzungen:

- (i) $\lambda_i(x) \in C^1(\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, d.h. die λ_i sind einmal stetig differenzierbare Funktionen im Gebiet Ω , $\lambda_i \geq \lambda_0 = \text{konst.} > 0$ und
- (ii) $f(x) \in C(\Omega)$, d.h. f ist eine stetige Funktion in Ω ,

erhalten wir nach Multiplikation der Gleichung (2.6) mit $-1/(\Delta x_1^* \Delta x_2^* \Delta x_3^*)$ und dem Grenzübergang $\Delta x_1^* \rightarrow 0$, $\Delta x_2^* \rightarrow 0$ sowie $\Delta x_3^* \rightarrow 0$ analog zum eindimensionalen Fall die Wärmeleitgleichung in differentieller Form (Zur Vereinfachung der Schreibweise ersetzen wir x^* durch x):

Gesucht ist $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, so dass

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right) &= f(x) \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \\
u(x) &= g(x) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega
\end{aligned} \tag{2.7}$$

gilt.

Wie bereits im Abschnitt 1.3 erwähnt wurde, kann die Gleichung (2.7) unter Nutzung der Differentialoperatoren div und grad (siehe (1.8) und (1.9), S. 10) in der kompakteren Form

$$-\operatorname{div}(\Lambda(x)\operatorname{grad}u(x)) = f(x) \quad \text{mit} \quad \Lambda(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(x) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

aufgeschrieben werden.

In Analogie zum eindimensionalen Wärmeleitproblem (siehe Abschnitt 2.1.1) können neben den bisher betrachteten Randbedingungen 1. Art, d.h. der Vorgabe der Temperatur am Rand, auch Randbedingungen 2. Art (Vorgabe des Wärmeflusses)

$$-\frac{\partial u}{\partial N} := - \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i(x)}_{\text{Konormalenableitung}} = -g_2(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma = \partial\Omega,$$

Randbedingungen 3. Art (freier Wärmeaustausch mit der Umgebung)

$$-\frac{\partial u}{\partial N} = \alpha(x)(u(x) - u_A(x)) \quad \text{für alle } x \in \Gamma$$

oder gemischte Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(x) &= g_1(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_1, \\ -\frac{\partial u}{\partial N} &= -g_2(x) && \text{für alle } x \in \Gamma_2, \\ -\frac{\partial u}{\partial N} &= \alpha(x)(u(x) - u_A(x)) && \text{für alle } x \in \Gamma_3 \end{aligned}$$

vorgegeben werden. Dabei ist $\partial\Omega = \Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Weiterhin bezeichnen $\vec{n}(x)$ den Vektor der äußeren Einheitsnormalen im Punkt $x \in \partial\Omega$ (siehe Abbildung 2.5), $\alpha(x)$ die Wärmeübergangszahl und $u_A(x)$ die Umgebungstemperatur.

Für ein homogenes, isotropes Material, d.h. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \text{konst.}$ in Ω , geht die Gleichung (2.7) in die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \bar{f}(x) && \text{für alle } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) && \text{für alle } x \in \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ und $\bar{f}(x) = f(x)/\lambda$ über.

Im Fall eines inhomogenen Materials, z.B. wenn der betrachtete Körper aus verschiedenen Materialien zusammengesetzt ist, gilt auch die Wärmeleitgleichung (2.6) in integraler Form. Die Differentialgleichung gilt nur in Teilgebieten mit „glatten“ Daten. Zusätzlich müssen an den Materialgrenzen Übergangsbedingungen (Interfacebedingungen) gestellt werden, d.h. Stetigkeit der Temperatur und des Wärmeflusses (siehe auch Abschnitt 2.1.1).

Bemerkung 2.2

Die Wärmeleitgleichung (2.7) kann auch mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (siehe [MV01a, Zei13]) hergeleitet werden. Wir betrachten ein beliebiges Teilgebiet $G \subset \Omega$ mit $\bar{G} \subset \Omega$. Falls $\partial G \subset \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ gilt, sind Sonderbetrachtungen notwendig, auf deren Darlegung wir hier verzichten.

Aus der Wärmemengenbilanz

$$-\int_{\partial G} \left(-\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i \right) dO + \int_G f(x) dx = 0$$

folgt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$-\int_G \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right) dx = \int_G f(x) dx \quad \text{für alle } G \subset \Omega \text{ mit } \bar{G} \subset \Omega.$$

Wegen der Beliebigkeit des Gebietes G folgt daraus sofort die Differentialgleichung

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Im Folgenden betrachten wir einige Spezialfälle hinsichtlich der Geometrie des Körpers Ω und der Abhängigkeit der Eingangsdaten von den verschiedenen Raumrichtungen. In diesen Fällen ist es möglich, anstelle des Wärmeleitproblems im dreidimensionalen Gebiet ein entsprechendes Wärmeleitproblem in einem zweidimensionalen Gebiet zu lösen. Somit kann bei der numerischen Lösung des Problems der Rechenaufwand wesentlich reduziert werden.

1. Lange „zylinderartige“ Körper mit von der x_3 -Richtung unabhängigen Daten (siehe Abbildung 2.7):

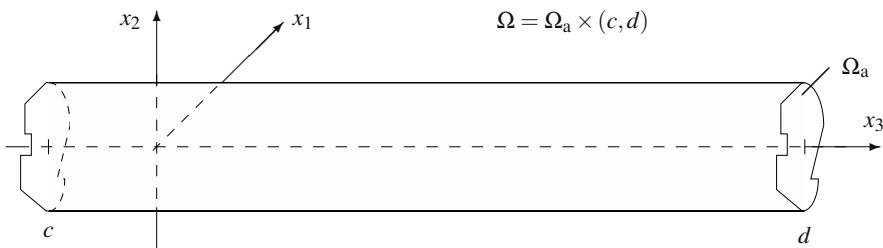


Abbildung 2.7: Beispiel für einen „zylinderartigen“ Körper

Es sei die Länge $\ell = d - c$ viel größer als der Durchmesser der Querschnittsfläche Ω_a . Auf dem Rand des Gebietes sei eine Temperatur $g_1(x_1, x_2)$ vorgegeben. Da alle Querschnittsflächen parallel zur (x_1, x_2) -Ebene kongruent sind und vorausgesetzt wird, dass alle Eingangsdaten unabhängig von der x_3 -Koordinate sind, muss die Lösung von x_3 unabhängig sein. Aus

der Aufgabe (2.7) ergibt sich deshalb das folgende Randwertproblem:

Gesucht ist $u(x) \in C^2(\Omega_a) \cap C(\overline{\Omega}_a)$, so dass

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= f(x) && \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \Omega_a, \\ u(x) &= g_1(x) && \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega_a \end{aligned}$$

gilt.

2. „Dünne“ Körper mit konstanter Dicke h , z.B. in x_3 -Richtung:

Es wird vorausgesetzt, dass h viel kleiner ist als die Ausdehnungen des Körpers in der x_1 - und x_2 -Richtung (siehe Abbildung 2.8). Außerdem seien alle Eingangsdaten unabhängig von der x_3 -Richtung.

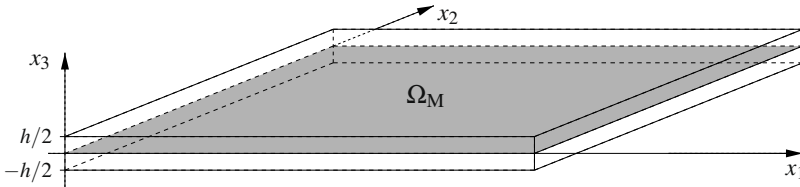


Abbildung 2.8: „Dünner“ Körper mit konstanter Dicke h

Ausgehend von der Wärmemengenbilanz an einem „kleinen“ Teilkörper erhalten wir bei glatten Eingangsdaten analog zum eindimensionalen Fall – wir betrachten hier nur anstelle des Stabstückes Δx^* einen Quader $\Delta x_1^* \times \Delta x_2^* \times h$ – die folgende Randwertaufgabe:

Gesucht ist $u(x) \in C^2(\Omega_M) \cap C(\overline{\Omega}_M)$, so dass

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \bar{q}(x)u(x) &= f(x) + \bar{q}(x)u_A(x) \\ &&& \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \Omega_M, \\ u(x) &= g_1(x) && \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega_M \end{aligned} \quad (2.9)$$

gilt.

Ω_M bezeichnet die Mittelfläche des Körpers. Die Terme $\bar{q}(x)u(x)$ und $\bar{q}(x)u_A(x)$ resultieren aus der Modellierung des Wärmeaustauschs mit der Umgebung über die Grund- und Deckfläche des Körpers, d.h. über die beiden Begrenzungsflächen bei $x_3 = \pm \frac{h}{2}$. Dies ist analog zur Modellierung des Wärmeaustauschs über den Mantel des Stabes (siehe Abschnitt 2.1.1). Die Funktion \bar{q} ist durch $\bar{q} = 2q/h$ definiert, wobei q den Wärmeaustauschkoeffizienten bezeichnet.

3. Rotationssymmetrische Probleme, d.h. rotationssymmetrisches Gebiet und Unabhängigkeit der Eingangsdaten vom Rotationswinkel:

In diesem Fall ist es zweckmäßig, bei der mathematischen Beschreibung des Problems von den bisher verwendeten kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zu Zylinderkoordinaten (r, φ, z) überzugehen. Das rotationssymmetrische Gebiet Ω lässt sich dann durch $\Omega_a \times [0, 2\pi)$ beschreiben, wobei Ω_a die sogenannte Meridianebene ist, die bei Rotation um die z -Achse den Körper Ω erzeugt (siehe Abbildung 2.9).

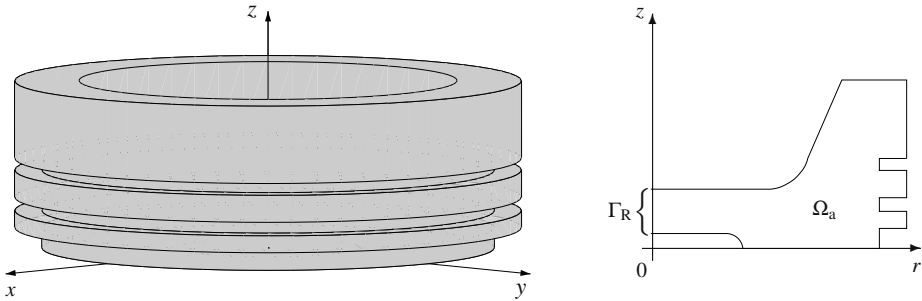


Abbildung 2.9: Rotationssymmetrischer Körper und Meridianebene

Wir setzen weiterhin voraus, dass für die Wärmeleit Zahlen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = \text{konst.}$ gilt. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Gebietes und der vorausgesetzten Unabhängigkeit aller Eingangsdaten vom Rotationswinkel φ muss die Lösung des Wärmeleitproblems unabhängig vom Rotationswinkel sein. Nutzen wir die Definition der Operatoren div und grad in Zylinderkoordinaten [Zei13] und beachten wir die Unabhängigkeit des Temperaturfeldes u von der φ -Koordinate, dann erhalten wir aus der Aufgabe (2.7) bzw. (2.8) das Randwertproblem:

Gesucht ist $u(r, z)$, so dass

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f(r, z) \quad \text{für alle } (r, z) \in \Omega_a,$$

$$u(r, z) = g_1(r, z) \quad \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_1 = \partial\Omega_a \setminus \Gamma_R,$$

$$-\lambda \frac{\partial u}{\partial r} n_r(r, z) - \lambda \frac{\partial u}{\partial z} n_z(r, z) = 0 \quad \text{für alle } (r, z) \in \Gamma_R$$

gilt.

Die Randbedingung auf dem Rand Γ_R (siehe Abbildung 2.9) ist eine künstlich eingeführte Randbedingung. Sie ergibt sich aus der zugrunde liegenden Symmetrie des Gebietes.

Bisher haben wir Wärmeleitprobleme betrachtet, bei denen alle Eingangsdaten unabhängig von der Zeit sind und folglich eine bezüglich der Zeit konstante Temperaturverteilung hervorrufen.

In den folgenden Abschnitten lassen wir zeitlich veränderliche Eingangsdaten wie zum Beispiel zeitlich veränderliche Wärmequellen oder zeitlich veränderliche Randtemperaturen zu. Folglich entsteht eine sich zeitlich verändernde Temperaturverteilung.

Analogue zum Abschnitt 2.1 beginnen wir unsere Betrachtungen wieder mit einem eindimensionalen Problem.

2.1.3 Instationäres 1D-Wärmeleitproblem

Physikalisches Problem

Gesucht ist ein sich zeitlich änderndes (instationäres) Temperaturfeld $u(x_1, t)$ in einem hinreichend dünnen Stab der Länge $\ell = b - a$, d.h. $x_1 \in (a, b)$, während der Zeit $t \in (0, T)$.

Zuerst leiten wir wieder eine Wärmeleitgleichung in integraler Form her. Den Ausgangspunkt bildet die Wärmemengenbilanz.

Wärmemengenbilanz in Raum und Zeit

Wir stellen die Wärmemengenbilanz an einem „kleinen“ Stabstück der Länge Δx_1^* während der Zeitspanne Δt^* (später: „Momentaufnahme“, d.h. $\Delta t^* \rightarrow 0$ und $\Delta x_1^* \rightarrow 0$) auf (siehe Abbildung 2.10).

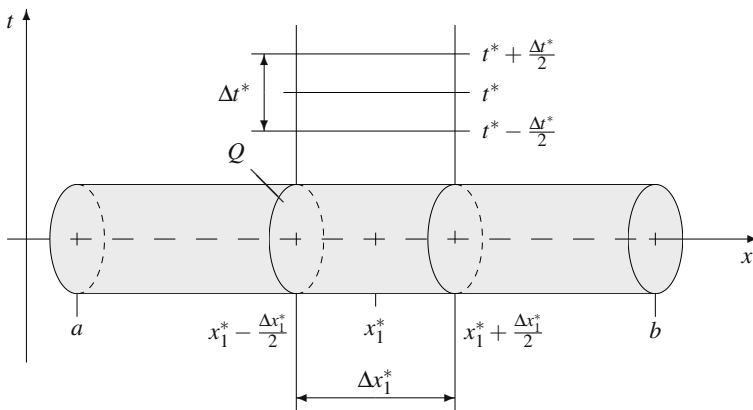


Abbildung 2.10: Instationäre Wärmeleitung im Stab

Wärmemenge, die am linken Rand, d.h. bei $x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}$, in „ Δx_1^* “ während der Zeitspanne Δt^* hineinfließt

–

Wärmemenge, die am rechten Rand, d.h. bei $x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}$, aus „ Δx_1^* “ während der Zeitspanne Δt^* herausfließt

$$- \text{meas}(Q) \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \lambda \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2} \right) \frac{du}{dx_1} \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, t \right) dt + \text{meas}(Q) \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \lambda \left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, t \right) dt$$

$$\begin{aligned}
& - \boxed{\text{Wärmemenge, die über den Mantel während der Zeitspanne } \Delta t^* \text{ abgegeben wird}} + \boxed{\text{Wärmemenge, die durch Aufheizung während der Zeitspanne } \Delta t^* \text{ entsteht}} \\
& - \text{meas}(Q) \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1, t) (u - u_A) dx_1 dt + \text{meas}(Q) \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1, t) dx_1 dt \\
& = \boxed{\text{Wärmemengendifferenz in „} \Delta x_1^* \text{“ zwischen End- und Anfangszeit}} \\
& = \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} c\rho \left(u(x_1, t^* + \frac{\Delta t^*}{2}) - u(x_1, t^* - \frac{\Delta t^*}{2}) \right) dx_1.
\end{aligned}$$

Hier bezeichnen ρ die Dichte, c die spezifische Wärmekapazität, λ den Wärmeleitkoeffizienten und $\bar{q} = \frac{\text{meas}(\partial Q)}{\text{meas}(Q)} q$ den spezifischen Wärmeaustauschkoeffizienten.

Die Wärmemengenbilanz liefert die instationäre Wärmeleitgleichung in integraler Form:

Für alle $x_1^* \in (a, b)$ und alle $\Delta x_1^* > 0$ mit $[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}] \subset (a, b)$ sowie für alle $t^* \in (0, T)$ und alle $\Delta t^* > 0$ mit $[t^* - \frac{\Delta t^*}{2}, t^* + \frac{\Delta t^*}{2}] \subset (0, T)$ gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} c\rho \left(u(x_1, t^* + \frac{\Delta t^*}{2}) - u(x_1, t^* - \frac{\Delta t^*}{2}) \right) dx_1 \\
& - \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \left(\lambda \left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}, t \right) - \lambda \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, t \right) \right) dt \quad (2.10) \\
& + \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \bar{q}(x_1, t) (u(x_1, t) - u_A(x_1, t)) dx_1 dt = \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1, t) dx_1 dt.
\end{aligned}$$

Der Einfluss der Umgebung der Randpunkte bei $x_1 = a$ und $x_1 = b$ auf die Temperaturverteilung im Stab wird analog wie im stationären Fall durch die Vorgabe von Randbedingungen beschrieben, zum Beispiel Randbedingungen 1. Art

$$u(a, t) = g_a(t) \quad \text{und} \quad u(b, t) = g_b(t) \quad \text{für alle } t \in (0, T).$$

Die Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $t = 0$ wird durch eine sogenannte *Anfangsbedingung*

$$u(x_1, 0) = u_0(x_1) \quad \text{für alle } x_1 \in [a, b]$$

charakterisiert.

Mit $\Delta x_1^* \rightarrow 0$ und $\Delta t^* \rightarrow 0$ erhalten wir aus der Wärmeleitgleichung in integraler Form die differentielle Form der Wärmeleitgleichung.

Übergang zur differentiellen Form der Wärmeleitgleichung

Multiplizieren wir die Gleichung (2.10) mit $1/(\Delta t^* \Delta x_1^*)$ und lassen Δx_1^* sowie Δt^* gegen Null streben, dann erhalten wir bei glatten Eingangsdaten (z.B. homogenes Material, stetig verteilte Wärmequelle – Voraussetzungen analog zu den Voraussetzungen (i) – (iv) auf S. 36) die differentielle Form der instationären Wärmeleitgleichung. (Um im Weiteren die Schreibweise zu vereinfachen, ersetzen wir x_1^* und t^* wieder durch x und t .)

Gesucht ist $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, so dass

$$\begin{aligned} c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \bar{q}(x,t)u(x,t) \\ = f(x,t) + \bar{q}(x,t)u_A(x,t) \quad \text{für alle } (x,t) \in Q_T \end{aligned} \quad (2.11)$$

gilt und die Randbedingungen (z.B. 1. Art)

$$\left. \begin{aligned} u(a,t) &= g_a(t) \\ u(b,t) &= g_b(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{für alle } t \in (0,T)$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

erfüllt werden.

Die Funktionenmenge $C^{2,1}(Q_T)$ umfasst alle Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar bezüglich des Ortes $x \in (a,b)$ und einmal stetig differenzierbar bezüglich der Zeit $t \in (0,T)$ sind. Mit Q_T wird das Gebiet $(a,b) \times (0,T)$, der sogenannte *Raum-Zeit-Zylinder*, bezeichnet (siehe Abbildung 2.11). Zu $C(\overline{Q_T}) = C^{0,0}(\overline{Q_T})$ gehören alle Funktionen die stetig bezüglich des Ortes $x \in [a,b]$ und stetig bezüglich der Zeit $t \in [0,T]$ sind.

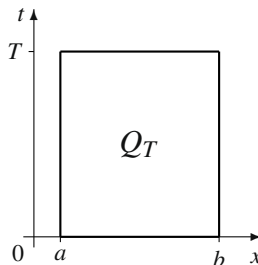


Abbildung 2.11: Raum-Zeit-Zylinder $Q_T = (a,b) \times (0,T)$

Die instationäre Wärmeleitgleichung (2.11) ist eine typische Vertreterin aus der Klasse der parabolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Bemerkung 2.3

Analog zur stationären Wärmeleitgleichung können auch bei der instationären Wärmeleitgleichung Randbedingungen 2. Art oder 3. Art bzw. gemischte Randbedingungen gestellt werden.

Bemerkung 2.4

Für die Existenz einer *klassischen* Lösung, d.h. einer Lösung der Aufgabe (2.11), ist die *Kompatibilität* zwischen der Anfangsbedingung und den Randbedingungen notwendig. Es muss

$$\lim_{t \rightarrow +0} g_a(t) = u_0(a) \quad , \quad \lim_{t \rightarrow +0} g_b(t) = u_0(b)$$

gelten.

Bemerkung 2.5

Für $c, \rho, \lambda = \text{konst.}$ und $q = 0$ erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f} \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad \bar{f} = \frac{f}{c\rho}.$$

Nach der Substitution

$$x' = \frac{x}{k} \quad \text{und somit} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x'}$$

ergibt sich die einfachste Form einer instationären Wärmeleitgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \bar{f}.$$

2.1.4 Verallgemeinerung auf den mehrdimensionalen Fall und auf Wärmeleit-Wärmetransportprobleme

Der mehrdimensionale Fall (2D, 3D): $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$

Die Herleitung der instationären Wärmeleitgleichung in differentieller Form erfolgt analog zum 1D-Fall, vgl. Abschnitt 2.1.3, und zur Herleitung stationärer Wärmeleitprobleme in mehrdimensionalen Gebieten (siehe Abschnitt 2.1.2). Man erhält das folgende Anfangsrandwertproblem.

Gesucht ist $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}((\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \times (0, T)) \cap C(\bar{Q}_T)$, so dass

$$c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T) \quad (2.12)$$

gilt und die Randbedingungen

$$u(x, t) = g_1(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g_2(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x, t)u(x, t) = \alpha(x, t)u_A(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T)$$

mit $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$, sowie die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}$$

erfüllt werden ($x = (x_1, x_2)$ bzw. $x = (x_1, x_2, x_3)$).

Die Funktionenmenge $C^{2,1}(Q_T)$ umfasst alle Funktionen, die zweimal stetig differenzierbar bezüglich des Ortes $x \in \Omega$ sowie einmal stetig differenzierbar bezüglich der Zeit $t \in (0, T)$ sind, und $C^{1,0}((\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \times (0, T))$ alle Funktionen, die einmal stetig differenzierbar bezüglich des Ortes $x \in \Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ sowie stetig bezüglich der Zeit $t \in (0, T)$ sind.

Instationäre (stationäre) Wärmeleit-Wärmetransportprobleme

Eine weitere wichtige Klasse von Randwertproblemen sind Wärmeleit-Wärmetransportprobleme. Hierbei wird das Gebiet Ω als eine fixierte Teilmenge des Raumes \mathbb{R}^d betrachtet, durch welche Material mit einer Geschwindigkeit $\vec{b} = (b_1(x, t) \dots b_d(x, t))^T$ fließt. Das den Vorgang beschreibende Anfangsrandwertproblem lautet wie folgt:

Gesucht ist $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}((\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \times (0, T)) \cap C(\bar{Q}_T)$, so dass

$$\begin{aligned}
 & c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)}_{\text{Wärmeleitung}} + \underbrace{\sum_{i=1}^d b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i}}_{\text{Wärmetransport}} + \underbrace{\bar{q}(x, t)u(x, t)}_{\text{nur im 1D- bzw. im 2D-Fall}} \\
 & = f(x, t) + \underbrace{\bar{q}(x, t)u_A(x, t)}_{\text{nur im 1D- bzw. im 2D-Fall}} \quad \text{für alle } (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

gilt und die Randbedingungen

$$u(x, t) = g_1(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = g_2(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_2 \times (0, T)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x, t)u(x, t) = \alpha(x, t)u_A(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in \Gamma_3 \times (0, T)$$

sowie die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega}$$

erfüllt werden.

Bemerkung 2.6

Bei der stationären Wärmeleit-Wärmetransportgleichung wird die Lösung u als eine Funktion $u(x)$ im Gebiet Ω gesucht. Gleichzeitig sind alle Eingangsdaten von t unabhängig. Weiterhin entfallen der Term $c\rho \frac{\partial u}{\partial t}$ in der Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingung.

2.2 Problemstellungen aus der Festkörpermechanik

Genauso wie bei der Modellierung von Wärmeleitproblemen beginnen wir wieder die Beschreibung der Modellierungsschritte anhand eines einfachen, örtlich eindimensionalen Beispiels. Wir betrachten die statische Deformation und die dynamischen Schwingungen eines longitudinal belasteten, linear elastischen Stabes unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen und Deformationen. Wie im Fall der Wärmeleitung lassen sich die Modellierungstechniken dann wieder einfach auf den 3D Fall übertragen.

2.2.1 Ein statisches 1D Problem: Deformation eines Stabes

Mechanisches Problem

Gesucht ist die Längsverschiebung $u(x_1)$, $x_1 \in [0, \ell]$, eines longitudinal belasteten, materialhomogenen, linear elastischen Stabes mit der Länge ℓ und konstantem Querschnitt Q . Wir setzen kleine Verschiebungen und Deformationen voraus und nehmen an, dass die Länge ℓ des Stabes sehr viel größer ist als der Durchmesser seines Querschnitts Q . Die longitudinal wirkende Volumenkraft (z.B. Schwerkraft) sei durch die Kraftdichtefunktion f gegeben. Der Stab sei im Punkt $P(x_1) = P(0)$ fest eingespannt, so dass dort die Verschiebung gleich Null ist, d.h. dass $u(0) = 0$ gilt. Dies ist wieder eine *Randbedingung 1. Art* oder *Dirichletsche Randbedingung*. Am anderen Ende des Stabes im Punkt $P(x_1) = P(\ell)$ greife eine Flächenkraft mit der Kraftdichte t_ℓ an.

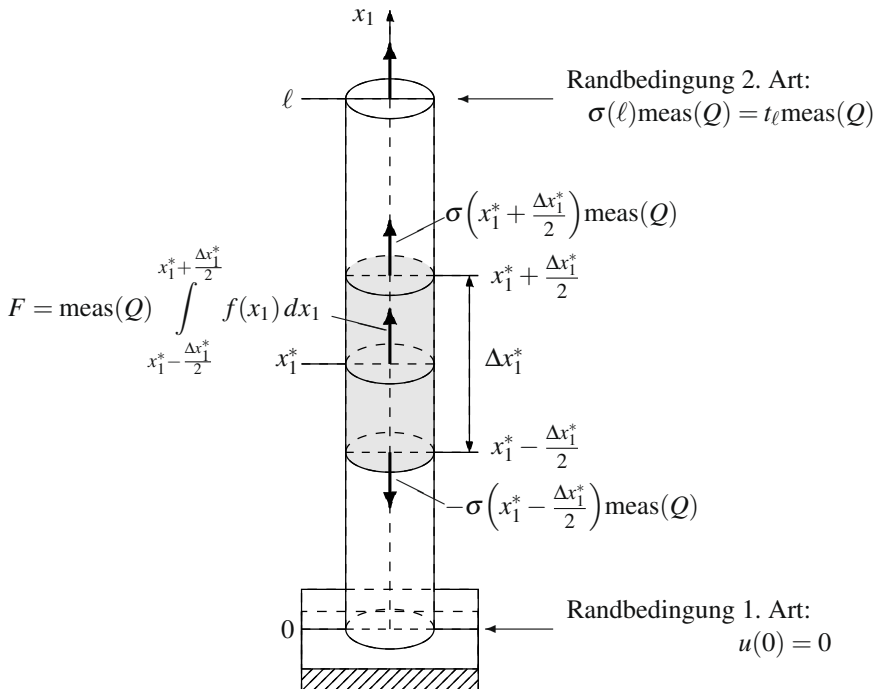


Abbildung 2.12: Stab im statischen Kräftegleichgewicht

Wir führen nun die Spannung σ als Schnittgröße, welche die Kraft pro Schnittfläche wiedergibt, ein. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt dann sofort, dass $\sigma(\ell)$ gleich t_ℓ sein muss. Wir werden sehen, dass dies eine *Randbedingung 2. Art* oder *Neumannsche Randbedingung* ist. Die Abbildung 2.12 veranschaulicht das soeben beschriebene mechanische Problem.

Kräftegleichgewicht an einem „kleinen“ Stabstück S der Länge Δx_1^*

Die Schnittkräfte, die am virtuell herausgeschnittenen Stabstück $S = (x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) \times Q$ an der unteren und oberen Schnittfläche angreifen (siehe Abbildung 2.12), müssen im Gleichgewicht mit den Volumenkräften stehen, d.h. für alle $x_1^* \in (0, \ell)$ und für alle $\Delta x_1^* > 0$ mit $[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}] \subset [0, \ell]$ gilt die Kräftegleichgewichtsbeziehung

$$-\sigma \left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) \text{meas}(Q) + \sigma \left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) \text{meas}(Q) + \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1) dx_1 = 0. \quad (2.14)$$

Geometrische Beziehung zwischen Deformation und Verschiebung

Die Deformation ε eines Stabes wird durch die relative Längenänderung eines virtuell herausgeschnittenen, beliebig kleinen Stabstückes definiert (siehe Abbildung 2.13).

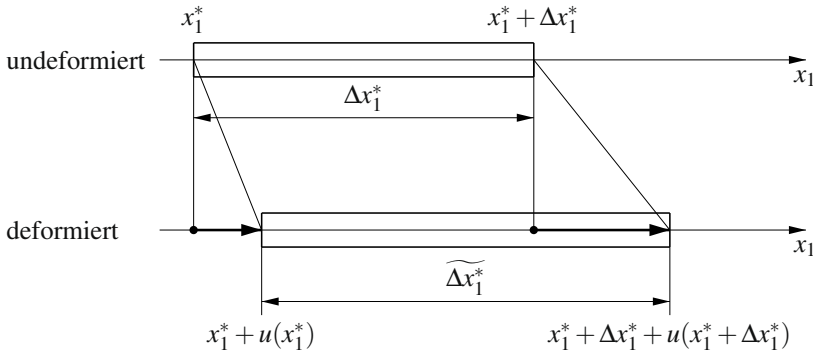


Abbildung 2.13: Geometrische Beziehungen

Durch Grenzwertbildung erhalten wir unter entsprechenden Glattheitsvoraussetzungen an die Verschiebung die geometrische Beziehung

$$\begin{aligned} \varepsilon(x_1) &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{[(x_1 + \Delta x_1 + u(x_1 + \Delta x_1)) - (x_1 + u(x_1))] - \Delta x_1}{\Delta x_1} \\ &= \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1) - u(x_1)}{\Delta x_1} \\ &= u'(x_1) \end{aligned} \quad (2.15)$$

zwischen der Deformation und der Verschiebung.

Das Hookesche Gesetz

Das *Hookesche Gesetz* spielt in der Mechanik die gleiche Rolle wie das *Fouriersche Gesetz* in der Wärmeleitung. Es ist ein Erfahrungsgesetz und besagt, dass die Spannung σ proportional zur Deformation ε ist (siehe Abbildung 2.14).

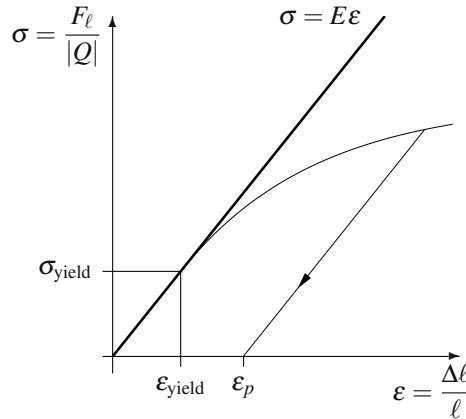


Abbildung 2.14: σ - ε -Diagramm

Damit ergibt sich die Beziehung

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.16)$$

zwischen der Spannung σ und der Deformation ε . Der Proportionalitätsfaktor E heißt Youngscher Elastizitätsmodul. Über den Youngschen Elastizitätsmodul gehen die Materialeigenschaften in das Modell ein. Der Elastizitätsmodul E wird experimentell bestimmt. Dazu kann das in den Abbildungen 2.12 und 2.14 dargestellte Experiment mit einem reinen Zugstab ($f = 0$) verwendet werden. Die lineare Abhängigkeit der Spannung σ von der Deformation ε ist idealisiert. Falls die Spannung σ die Anfangsfließspannung σ_{yield} überschreitet, beginnt das Material zu fließen und es bleiben auch nach völliger Zurücknahme der Belastung plastische Deformationen ε_p zurück (siehe zum Beispiel [KL84], [SH98] oder [Wri01]).

Randbedingungen

Wie wir schon anfangs für unser Modellbeispiel festgestellt haben (siehe auch Abbildung 2.12), liegt im Punkt $P(x_1) = P(0)$ die homogene Dirichletsche Randbedingung (wesentliche Randbedingung, Randbedingungen 1. Art)

$$u(0) = 0 \quad (2.17)$$

vor. Unter Benutzung des Hookeschen Gesetzes und der Beziehung (2.15) sehen wir nun, dass im Punkt $P(x_1) = P(\ell)$ die inhomogene Neumannsche Randbedingung (natürliche Randbedingung, Randbedingung 2. Art)

$$\sigma(\ell) = E(\ell)u'(\ell) = t_\ell \quad (2.18)$$

vorliegt. Natürlich sind auch andere Randbedingungen beziehungsweise andere Konstellationen der Randbedingungen möglich. Zum Beispiel kann der Stab im Punkt $P(x_1) = P(0)$ elastisch gebettet sein. Dann ergibt sich eine Randbedingung der Art $-\sigma(\ell) = \alpha(u(0) - 0) = \alpha u(0)$ mit der Bettungszahl α . Das ist eine *Randbedingung 3. Art* oder *Robinsche Randbedingung*. Diese Art von Randbedingungen zählt ebenfalls zu den natürlichen Randbedingungen.

Integrale Form

Zusammen mit den geometrischen Beziehungen (2.15), dem Hookschen Gesetz (2.16) und den Randbedingungen (2.17) – (2.18) gibt die integrale Form des Kräftegleichgewichts (2.14) ein komplettes mathematisch-mechanisches Modell zur Beschreibung der statischen Deformation eines Stabes. Dieses erlaubt es uns, die auftretenden Verschiebungen, Deformationen und Spannungen eindeutig zu bestimmen.

Differentielle Form

Aus den geometrischen Beziehungen (2.15) und dem Hookschen Gesetz (2.16) ergibt sich die Beziehung $\sigma(x_1) = E(x_1)u'(x_1)$. Setzen wir dies in die integrale Form (2.14) des Kräftegleichgewichts ein und multiplizieren wir die dadurch erhaltene Gleichung mit $-1/(\Delta x_1^* \text{meas}(Q))$, dann erhalten wir unter Beachtung der entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen durch den Grenzübergang $\Delta x_1^* \rightarrow 0$ wieder, wie im Falle der Wärmeleitung (siehe Abschnitt 2.1.1), die differentielle Form. Zusammen mit den Randbedingungen ergibt sich das folgende Randwertproblem (2.19).

Gesucht ist die Verschiebung $u(x) \in C^2(0, \ell) \cap C^1(0, \ell] \cap C[0, \ell]$, so dass die Differentialgleichung

$$-(E(x)u'(x))' = f(x) \quad \text{für alle } x \in (0, \ell) \quad (2.19)$$

gilt sowie die Randbedingungen $u(0) = 0$ und $E(\ell)u'(\ell) = t_\ell$ erfüllt werden.

(Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir für die Ortsvariable x anstelle von x_1 geschrieben.) Aus der Verschiebung $u(x)$ erhalten wir über die geometrischen Beziehungen (2.15) die Deformation $\varepsilon(x)$ und schließlich über das Hooksche Gesetz (2.16) die Spannung $\sigma(x)$. Damit sind alle mechanischen Grundgrößen bekannt. Falls der Stab aus einem homogenen Material besteht, wie wir das oben angenommen haben, dann ist der Youngsche Elastizitätsmodul E für den gesamten Stab konstant, d.h. $E(x) = E = \text{konst.} > 0$ für alle $x \in [0, \ell]$. Damit nimmt die gewöhnliche Differentialgleichung (2.19) die einfache Form $-E u''(x) = f(x)$ an.

Die Differentialgleichung (2.19) ist eine typische Vertreterin aus der Klasse der elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

2.2.2 Der dynamische Fall: Longitudinalschwingungen eines Stabes

Mechanisches Problem

Gesucht sind die durch das Verschiebungsfeld $u(x_1, t)$ mit $x_1 \in [0, \ell]$ und $t \in [0, T]$ beschriebenen Längsschwingungen (Longitudinalschwingungen) eines longitudinal, durch zeitabhängige Volu-

menkräfte $f(x_1, t)$ (Volumenkraftdichte) und durch eine Flächenkraft $t_\ell(t)$ im Punkt $P(x_1) = P(\ell)$ dynamisch belasteten, materialhomogenen, linear elastischen Stabes der Länge ℓ mit konstantem Querschnitt Q . Wir setzen wieder kleine Verschiebungen und Deformationen voraus. Wie im statischen Fall nehmen wir an, dass die Länge ℓ sehr viel größer ist als der Durchmesser des Querschnitts Q des Stabes. Der Stab sei wieder im Punkt $P(x_1) = P(0)$ fest eingespannt, d.h. $u(0, t) = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Das oben beschriebene mechanische Problem ist offenbar das dynamische Analogon des statisch belasteten Stabes aus dem Abschnitt 2.2.1.

Das dynamische Kräftegleichgewicht an einem „kleinen“ Stabstück S der Länge Δx_1^*

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (Kraft = Masse mal Beschleunigung) ergibt sich sofort, dass an jedem virtuell herausgeschnittenen Stabstück $S = (x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}) \times Q$ die resultierenden Volumen- und Oberflächenkräfte im Gleichgewicht mit den Trägheitskräften stehen, d.h.

$$\begin{aligned} & -\sigma\left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, t\right) \text{meas}(Q) + \sigma\left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}, t\right) \text{meas}(Q) \\ & + \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1, t) dx_1 = \text{meas}(Q) \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} a(x_1, t) \rho(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei ρ die Dichte bezeichnet. Die Beschleunigung

$$a(x_1, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_1, t)$$

ergibt sich aus der ersten partiellen zeitlichen Ableitung der Geschwindigkeit v , die sich ihrerseits aus der ersten partiellen Zeitableitung der Verschiebungen u ergibt.

Integrale Form

Durch Integration von (2.20) über ein beliebiges Zeitintervall $[t^* - \frac{\Delta t^*}{2}, t^* + \frac{\Delta t^*}{2}] \subset [0, T]$ und unter Verwendung der geometrischen Beziehungen (2.15) und des Hookschen Gesetzes (2.16) erhalten wir die integrale Form

$$\begin{aligned} & \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \left[E\left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}, t\right) - E\left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, t\right) \right] dt \\ & + \int_{t^* - \frac{\Delta t^*}{2}}^{t^* + \frac{\Delta t^*}{2}} \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} f(x_1, t) dx_1 dt = \int_{x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}}^{x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x_1, t^* + \frac{\Delta t^*}{2}\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x_1, t^* - \frac{\Delta t^*}{2}\right) \right] \rho(x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (2.21)$$

die für alle $x_1^* \in (0, \ell)$ und alle $\Delta x_1^* > 0$ mit $[x_1^* - \frac{\Delta x_1^*}{2}, x_1^* + \frac{\Delta x_1^*}{2}] \subset [0, \ell]$ sowie für alle $t^* \in (0, T)$ und alle $\Delta t^* > 0$ mit $[t^* - \frac{\Delta t^*}{2}, t^* + \frac{\Delta t^*}{2}] \subset [0, T]$ gelten muss. Dazu kommen noch die oben

angegebenen Randbedingungen und die Anfangsbedingungen. Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ sind die Anfangsverschiebungen $u_0(x_1)$ und die Anfangsgeschwindigkeiten $v_0(x_1)$ in jedem Punkt $P(x_1)$, $x_1 \in [0, \ell]$, des Stabes vorgegeben.

Differentielle Form

Multiplizieren wir die Gleichung (2.21) mit $1/(\Delta t^* \Delta x_1^*)$ und lassen Δx_1^* sowie Δt^* gegen Null streben, dann erhalten wir bei glatten Eingangsdaten die differentielle Form der Schwingungsgleichung. (Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir bei der Ortsvariablen wieder den Index 1 weg.)

Gesucht ist $u \in C^{2,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T}) \cap C^{1,0}((0, \ell] \times (0, T)) \cap C^{0,1}([0, \ell] \times [0, T))$, so dass

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) = f(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in Q_T = (0, \ell) \times (0, T) \quad (2.22)$$

gilt und die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ E(\ell) \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) &= t_\ell(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{für alle } t \in (0, T)$$

sowie die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{für alle } x \in [0, \ell]$$

erfüllt werden.

Die Schwingungsgleichung (2.22) ist eine typische Vertreterin aus der Klasse der hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

2.2.3 Mehrdimensionale lineare Elastizitätsprobleme

Mechanische Problemstellungen in der Statik und Dynamik

Gesucht ist das Verschiebungsfeld $\vec{u}(x) = (u_1(x) \ u_2(x) \ u_3(x))^T$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega}$, eines statisch, durch Volumen- und Oberflächenkräfte belasteten, materialhomogenen, isotropen, linear elastischen Körpers, der im undeformierten Zustand das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ einnimmt. Dabei setzen wir wieder kleine Verschiebungen und Deformationen voraus. Die Volumenkräfte sind durch die Volumenkraftdichtefunktion $\vec{f}(x) = (f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x))^T$ mit $x \in \Omega$ gegeben. Die Oberflächenkräfte, die durch die Oberflächenkräftedichtefunktion $\vec{g}_2 = (g_{21} \ g_{22} \ g_{23})^T$ definiert sind, greifen am Randstück Γ_2 an (Neumannsche Randbedingung), während auf Γ_1 die Verschiebungen $\vec{g}_1 = (g_{11} \ g_{12} \ g_{13})^T$ vorgegeben sind (Dirichletsche Randbedingung). Für den Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω gilt $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$ mit $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. In der Elastodynamik lassen wir zu, dass die Volumen- und Oberflächenkräfte sowie die vorgegebenen Randverschiebungen sich zeitlich ändern können und die Trägheitskräfte nicht mehr vernachlässigbar sind.

Spannungszustand (Kinetik)

Der Spannungszustand in einem Punkt $x \in \bar{\Omega}$ wird durch die Menge $\{\vec{t}^{(n)}(x) = (t_1^{(n)} \ t_2^{(n)} \ t_3^{(n)})^T : n = \vec{n} \in \mathcal{N} = \{n \in \mathbb{R}^3 : |n| = 1\}\}$ aller totalen Spannungen $\vec{t}^{(n)}(x)$ definiert. Unter der totalen Spannung $\vec{t}^{(n)}(x)$ verstehen wir die Spannung, die im Punkt x auf eine Schnittfläche mit der Normalen $\vec{n}(x)$ wirkt. Die Komponenten der totalen Spannungen $\vec{t}^{(e^{(i)})}(x) = (\sigma_{i1} \ \sigma_{i2} \ \sigma_{i3})^T$ für die Einheitsvektoren $e^{(i)} = (e_1^{(i)} \ e_2^{(i)} \ e_3^{(i)})^T$ mit $e_j^{(i)} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, definieren den Spannungstensor

$$\sigma = \sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

(δ_{ij} bezeichnet das *Kronecker-Symbol*. Es gilt $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.)

Sind die Komponenten σ_{ij} des Spannungstensors σ im Punkt $x \in \Omega$ bekannt, dann lassen sich die totalen Spannungen $\vec{t}^{(n)}(x)$ mit der Transformationsformel

$$t_i^{(n)}(x) = \sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 + \sigma_{3i}n_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.23)$$

für jede Einheitsnormale $n = (n_1 \ n_2 \ n_3)^T \in \mathcal{N}$ berechnen. Die Transformationsformel (2.23) kann mechanisch leicht verifiziert werden, indem das Kräftegleichgewicht an einem geeignet gewählten Tetraeder betrachtet wird.

Analog zur Herleitung der stationären Wärmeleitgleichung (2.7) aus der Wärmemengenbilanz an einem aus Ω virtuell herausgeschnittenen Quader „ $\Delta x_1^* \times \Delta x_2^* \times \Delta x_3^*$ “ (siehe Abbildung 2.6) können wir nun wie folgt vorgehen. Wir schneiden virtuell einen Quader aus einem sich im statischen Kräftegleichgewicht befindlichen Körper aus und betrachten an diesem Quader das Kräftegleichgewicht. Dann können wir das folgende System von partiellen Differentialgleichungen ableiten:

$$-\frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3}(x) = f_i(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.24)$$

Dieses Differentialgleichungssystem kann auch kurz in der Form

$$-\operatorname{div} \sigma = \vec{f} \quad \text{in } \Omega \quad (2.25)$$

geschrieben werden. Mathematisch eleganter lassen sich die Differentialgleichungen (2.24) bzw. (2.25) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes ableiten (vergleiche auch Bemerkung 2.2). Tatsächlich, für alle, aus einem im statischen Gleichgewicht befindlichen Körper Ω , virtuell herausgeschnittenen, hinreichend regulären Teilgebiete G müssen die resultierenden Kräfte und Momente gleich Null sein, d.h.

$$-\int_{\partial G} t_i^{(n)}(x) dO + \int_G f_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.26)$$

und

$$-\int_{\partial G} x \times \vec{t}^{(n)}(x) dO + \int_G x \times \vec{f}(x) dx = 0. \quad (2.27)$$

Aus der integralen Form des Kräftegleichgewichtes (2.26) erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel (2.23) und des Gaußschen Integralsatzes (siehe [MV01a, Zei13]) die Integralbeziehungen

$$\int_G \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}(x) dx + \int_G f_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

die wegen der Beliebigkeit von G und der vorausgesetzten Stetigkeit der Integranden sofort auf die Differentialgleichungen (2.24) bzw. (2.25) führen. Analog erhalten wir aus der integralen Form des Momentengleichgewichtes (2.26) die Integralbeziehungen

$$\int_G x \times (\vec{f}(x) + \operatorname{div} \sigma(x)) dx + \int_G \begin{pmatrix} \sigma_{23}(x) - \sigma_{32}(x) \\ \sigma_{31}(x) - \sigma_{13}(x) \\ \sigma_{12}(x) - \sigma_{21}(x) \end{pmatrix} dx = 0,$$

die wegen (2.25) die Symmetrie des Spannungstensors zur Folge haben, d.h.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, 3.$$

Im dynamischen Fall muss wieder die Trägheitskraft berücksichtigt werden. Analog zum statischen Fall ergibt das dynamische Kräftegleichgewicht die Integralbeziehung

$$\int_{\partial G} \vec{t}^{(n)}(x, t) ds + \int_G \vec{f}(x, t) dx = \int_G \rho \vec{a}(x, t) dx, \quad (2.28)$$

und das dynamische Momentengleichgewicht die Integralbeziehung

$$\int_{\partial G} x \times \vec{t}^{(n)}(x, t) ds + \int_G x \times \vec{f}(x, t) dx = \int_G \rho x \times \vec{a}(x, t) dx. \quad (2.29)$$

Dabei bezeichnen wieder \vec{a} die Beschleunigung und ρ die Dichte. Aus der integralen Form des dynamischen Kräftegleichgewichtes (2.28) folgen die Differentialgleichungen

$$\rho \vec{a} - \operatorname{div} \sigma = \vec{f}, \quad (2.30)$$

die im gesamten Raum-Zeit-Zylinder $Q_T = \Omega \times (0, T)$ erfüllt sein müssen. Die integrale Form des dynamischen Momentengleichgewichtes (2.29) hat wieder die Symmetrie des Spannungstensors zur Folge.

Verzerrungszustand (Kinematik)

Unter der Wirkung externer Kräfte bewegt sich ein materieller Punkt $P(x) = P(x_1, x_2, x_3)$ eines deformierbaren Körpers $\bar{\Omega}$ in eine andere Position $x + \vec{u}(x)$. Dabei ist $\vec{u} = (u_1(x) \ u_2(x) \ u_3(x))^T$ der Verschiebungsvektor.

Der Abstand ds des Punktes $P(x)$ zu einem benachbarten Punkt $P(x + dx)$ ändert sich durch die Deformation zu $\tilde{d}s$ (siehe Abbildung 2.15). Für die Längenänderung erhalten wir im differenti-

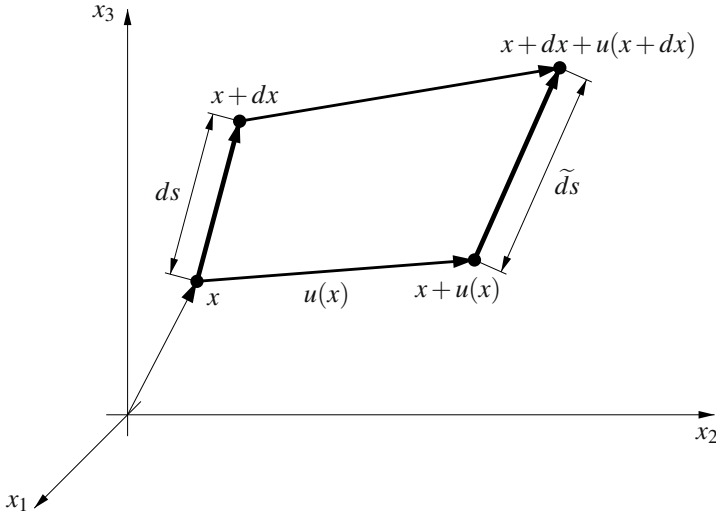


Abbildung 2.15: Geometrische Beziehungen

ellen Rechenkalkül die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 (\tilde{ds})^2 - (ds)^2 &= 2 \sum_{i=1}^3 dx_i du_i + \sum_{i=1}^3 (du_i)^2 \\
 &= 2 \sum_{i=1}^3 dx_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right)^2 \\
 &= 2 \sum_{i,j=1}^3 e_{ij} dx_i dx_j.
 \end{aligned}$$

Der symmetrische Tensor zweiter Ordnung

$$e = e(x) = (e_{ij})_{i,j=1,2,3} \quad \text{mit} \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.31)$$

heißt *Greenscher Verzerrungstensor*.

Im folgenden setzen wir voraus, dass

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, 3$$

gilt. Dann können in (2.31) die quadratischen Terme vernachlässigt werden. Der symmetrische Tensor zweiter Ordnung

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = (\varepsilon_{ij})_{i,j=1,2,3} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.32)$$

heißt *Cauchyscher Verzerrungstensor*. Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass die Komponenten ε_{ii} die relative Längenänderung des Linienelementes „ dx_i “ widerspiegeln, während $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ mit $i \neq j$ die Änderung des Winkels zwischen den Linienelementen „ dx_i “ und „ dx_j “ beschreibt (Schubwinkel).

Ein Verschiebungsfeld \vec{u} produziert genau dann keine Deformationen, wenn es eine Starrkörperverschiebung ist, d.h.

$$\varepsilon = 0 \iff \vec{u} \in \mathcal{R} = \{\vec{u} = a \times x + b : a, b \in \mathbb{R}^3\}.$$

Dabei ist

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\}$$

der Unterraum der Starrkörperverschiebungen, der durch jeweils drei Translationen und Rotationen aufgespannt wird, ist.

Das Hookesche Gesetz (Stoffgesetz)

Im Mehrdimensionalen wird ein linear-elastisches Materialverhalten durch das Hookesche Gesetz

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.33)$$

beschrieben, d.h. es wird wie in (2.16) eine lineare Beziehung zwischen σ und ε angenommen. Die Koeffizienten D_{ijkl} heißen elastische Koeffizienten. Das Material wird homogen genannt, falls die elastischen Koeffizienten D_{ijkl} nicht von x abhängen. Andernfalls wird von einem inhomogenen, linear-elastischen Material gesprochen. Aus den Symmetrieeigenschaften des Spannungs- und Verzerrungstensors folgt, dass von den 81 elastischen Koeffizienten nur 21 Koeffizienten unabhängig voneinander gewählt werden können. Orthotrope Materialien können durch 9 unabhängige elastische Koeffizienten beschrieben werden. Im Falle isotroper Materialien sind die Materialeigenschaften nicht mehr richtungsabhängig. Dann bleiben 2 unabhängige elastische Koeffizienten übrig. Mit den positiven Laméschen Elastizitätskonstanten λ_e und μ_e ergibt sich die Darstellung

$$D_{ijkl} = \lambda_e \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_e (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

Setzen wir diese Beziehungen in die Gleichungen (2.33) ein, erhalten wir für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \sum_{k,l=1}^3 D_{iikl} \varepsilon_{kl} \\ &= D_{ii11} \varepsilon_{11} + D_{ii22} \varepsilon_{22} + D_{ii33} \varepsilon_{33} \\ &\quad + D_{ii12} \varepsilon_{12} + D_{ii21} \varepsilon_{21} + D_{ii13} \varepsilon_{13} + D_{ii31} \varepsilon_{31} + D_{ii23} \varepsilon_{23} + D_{ii32} \varepsilon_{32} \\ &= \lambda_e (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_e \varepsilon_{ii} \end{aligned} \quad (2.35)$$

und für $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\
 &= D_{ij11} \varepsilon_{11} + D_{ij22} \varepsilon_{22} + D_{ij33} \varepsilon_{33} \\
 &\quad + D_{ij12} \varepsilon_{12} + D_{ij21} \varepsilon_{21} + D_{ij13} \varepsilon_{13} + D_{ij31} \varepsilon_{31} + D_{ij23} \varepsilon_{23} + D_{ij32} \varepsilon_{32} \\
 &= \mu_e \varepsilon_{ij} + \mu_e \varepsilon_{ji} \\
 &= 2\mu_e \varepsilon_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Im letzten Schritt haben wir die Symmetrie des Cauchyschen Verzerrungstensors genutzt (siehe (2.32)).

Anstelle der Laméschen Elastizitätskonstanten λ_e und μ_e werden in der Literatur auch der Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Querkontraktionszahl ν verwendet, die durch die Beziehung

$$\lambda_e = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu_e = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.37}$$

mit den Laméschen Elastizitätskonstanten verknüpft sind. Die Elastizitätskonstanten werden experimentiell bestimmt.

Die Laméschen Gleichungen der Elastostatik

Das statische Kräftegleichgewicht (2.24) bzw. (2.25), die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (2.32), das Hookesche Gesetz (2.33), die Dirichletschen Randbedingungen auf Γ_1 und die Neumannschen Randbedingungen auf Γ_2 geben eine komplette mathematische Beschreibung des am Anfang gestellten elastostatischen mechanischen Problems in divergenter Form.

Gesucht ist das Verschiebungsfeld $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ mit $u_1, u_2, u_3 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2) \cap C(\bar{\Omega})$, so dass die Laméschen partiellen Differentialgleichungen

$$- \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,l=1}^3 D_{jikl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) = f_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \tag{2.38}$$

gelten und die Randbedingungen

$$\vec{u}(x) = \vec{g}_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1,$$

$$t_i^{(n)}(x) := \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}(x) n_j(x) := \sum_{j=1}^3 \sum_{k,l=1}^3 D_{jikl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) n_j(x) = g_{2i}(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2$$

auf Γ_1 (Dirichlet) bzw. Γ_2 (Neumann) erfüllt werden. Die Komponenten $\varepsilon_{kl}(\vec{u}(x))$ des Cauchyschen Verzerrungstensors werden über die Beziehung (2.32) aus dem Verschiebungsfeld \vec{u} berechnet und die elastischen Koeffizienten D_{jikl} für isotrope Materialien sind durch die Beziehung (2.34) definiert.

Die divergente Form (2.38) der Laméschen Gleichungen ist Ausgangspunkt für die Variationsformulierung, die wir im Kapitel 4 herleiten werden.

Ausgehend vom obigen Randwertproblem leiten wir noch eine äquivalente Formulierung dieses Randwertproblems im Fall eines isotropen Materials her. Die linke Seite der Differentialgleichung (2.38) lautet für $i = 1$ unter Nutzung des Hookeschen Gesetzes (2.33)

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,l=1}^3 D_{j1kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) &= - \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{k,l=1}^3 D_{11kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) - \frac{\partial}{\partial x_2} \sum_{k,l=1}^3 D_{21kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_3} \sum_{k,l=1}^3 D_{31kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) \\
 &= - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{j1}}{\partial x_j}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Daraus ergibt sich mittels der Beziehungen (2.35) und (2.36)

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,l=1}^3 D_{j1kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) &= - \frac{\partial}{\partial x_1} (\lambda_e (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu_e \varepsilon_{11}) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} (2\mu_e \varepsilon_{21}) - \frac{\partial}{\partial x_3} (2\mu_e \varepsilon_{31}).
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition (2.32) der Komponenten ε_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, des Cauchyschen Verzerrungstensors folgt

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,l=1}^3 D_{j1kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) &= - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_e \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu_e \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2\mu_e \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2\mu_e \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right) \\
 &= - \lambda_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - 2\mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\
 &\quad - \mu_e \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \mu_e \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}.
 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Verschiebungskomponenten u_i , $i = 1, 2, 3$, zweimal stetig differenzierbar sind, können wir die Reihenfolge der Ableitungsbildung bei den zweiten partiellen Ableitungen vertauschen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,l=1}^3 D_{j1kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) &= - \lambda_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - 2\mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \\
 &\quad - \mu_e \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \mu_e \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}
 \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k,l=1}^3 D_{j1kl} \varepsilon_{kl}(\vec{u}(x)) &= -\lambda_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \mu_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \\
 &\quad - \mu_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \mu_e \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) - \mu_e \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \\
 &= -(\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\
 &\quad - \mu_e \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\
 &= -(\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{div} \vec{u}) - \mu_e \Delta u_1.
 \end{aligned}$$

Somit lautet für $i = 1$ die Differentialgleichung in (2.38)

$$-\mu_e \Delta u_1 - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_1} (\operatorname{div} \vec{u}) = f_1. \quad (2.40)$$

Auf analoge Weise erhält man für $i = 2$ und $i = 3$

$$\begin{aligned}
 -\mu_e \Delta u_2 - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_2} (\operatorname{div} \vec{u}) &= f_2, \\
 -\mu_e \Delta u_3 - (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial x_3} (\operatorname{div} \vec{u}) &= f_3.
 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Mittels der Beziehungen (2.40) und (2.41) lässt sich das Differentialgleichungssystem (2.38) in Form der Laméschen Gleichungen

$$-\mu_e \Delta \vec{u} - (\lambda_e + \mu_e) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}) = \vec{f}$$

zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes \vec{u} (siehe auch (1.36)) schreiben. Zusammen mit den Randbedingungen erhalten wir die folgende gemischte Randwertaufgabe der Elastostatik in der klassischen Formulierung.

Gesucht ist das Verschiebungsfeld $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ mit $u_1, u_2, u_3 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2) \cap C(\bar{\Omega})$, so dass die Laméschen partiellen Differentialgleichungen

$$-\mu_e \Delta \vec{u}(x) - (\lambda_e + \mu_e) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{u}(x)) = \vec{f}(x) \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \quad (2.42)$$

gelten und die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 \vec{u}(x) &= \vec{g}_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1, \\
 \vec{i}^{(n)}(x) := \sigma(x) \vec{n}(x) &= \vec{g}_2(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2
 \end{aligned}$$

auf Γ_1 (Dirichlet) bzw. Γ_2 (Neumann) erfüllt werden..

Beide Formulierungen sind natürlich im klassischen Sinne äquivalent.

Die Navier-Laméschen Gleichungen der Elastodynamik

Das dynamische Kräftegleichgewicht (2.30), die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (2.32), das Hookesche Gesetz (2.33), die Dirichletschen Randbedingungen auf Γ_1 , die Neumannschen Randbedingungen auf Γ_2 sowie geeignete Anfangsbedingungen für die Verschiebungen \vec{u} und die Geschwindigkeiten $\vec{v} = \partial\vec{u}/\partial t$ zum Zeitpunkt $t = 0$ geben eine komplette mathematische Beschreibung des am Anfang dieses Abschnitts gestellten elastodynamischen mechanischen Problems.

Wenn wir wieder, wie im elastostatischen Fall, die entsprechenden Beziehungen ineinander einsetzen und nutzen, dass die Beschleunigung $\vec{a} = \partial^2\vec{u}/\partial t^2$ gleich der zweiten partiellen Ableitung der Verschiebungen nach der Zeit ist, dann erhalten wir zusammen mit den Rand- und Anfangsbedingungen das folgende gemischte Anfangsrandwertproblem der Elastodynamik.

Gesucht ist das Verschiebungsfeld $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ mit $u_1, u_2, u_3 \in C^{2,2}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T) \cap C^{1,0}((\Omega \cup \Gamma_2) \times (0, T)) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega} \times [0, T))$, so dass die Navier-Laméschen partiellen Differentialgleichungen

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}(x, t) - \mu_e \Delta \vec{u}(x, t) - (\lambda_e + \mu_e) \text{grad}(\text{div} \vec{u}(x, t)) = \vec{f}(x, t) \quad \text{für alle } (x, t) \in Q_T \quad (2.43)$$

gelten und die Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}(x, t) = \vec{g}_1(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1 \\ \vec{t}^{(n)}(x) = \vec{g}_2(x, t) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2 \end{array} \right\} \quad \text{für alle } t \in (0, T) \quad (2.44)$$

sowie die Anfangsbedingungen

$$\vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, 0) = \vec{v}_0(x) \quad \text{für alle } x \in \bar{\Omega} \quad (2.45)$$

erfüllt werden.

Zeitharmonische Erregungen

Falls die Erregungen in der Elastodynamik zeitharmonisch sind, d.h. in (2.43) und (2.44) die gegebenen Kräfte und die eingepprägten Randverschiebungen die Form

$$\vec{f}(x, t) = \vec{f}(x) \exp(i\omega t), \quad \vec{g}_2(x, t) = \vec{g}_2(x) \exp(i\omega t) \quad \text{und} \quad \vec{g}_1(x, t) = \vec{g}_1(x) \exp(i\omega t) \quad (2.46)$$

haben, dann können wir mit dem Verschiebungsansatz

$$\vec{u}(x, t) = \vec{u}(x) \exp(i\omega t) \quad (2.47)$$

vom Zeitbereich in den Frequenzbereich übergehen. Hierbei bezeichnen ω die Erregerfrequenz und $\vec{f}(x)$, $\vec{g}_2(x)$, $\vec{g}_1(x)$ sowie $\vec{u}(x)$ die entsprechenden Amplituden. Wenn wir nun die Beziehungen (2.46) und (2.47) in (2.43) und (2.44) einsetzen, dann erhalten wir zur Bestimmung der unbekanntenen Verschiebungsamplitude $\vec{u}(x)$ das folgende Randwertproblem.

Gesucht ist das Verschiebungsamplitudenfeld $\vec{u} = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T$ mit $u_1, u_2, u_3 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2)$, so dass die partiellen Differentialgleichungen

$$-\mu_e \Delta \vec{u}(x) - (\lambda_e + \mu_e) \text{grad}(\text{div} \vec{u}(x)) - \omega^2 \vec{u}(x) = \vec{f}(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega \quad (2.48)$$

gelten und die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{u}(x) &= \vec{g}_1(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1, \\ \vec{t}^{(n)}(x) &= \vec{g}_2(x) \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

erfüllt werden.

Die partiellen Differentialgleichungen (2.48) sind vom Helmholtz-Typ und nur dann eindeutig lösbar, wenn ω kein Eigenwert (Eigenfrequenz) ist, d.h. wenn das Elastizitätseigenwertproblem

$$\begin{aligned} -\mu_e \Delta \vec{u}(x) - (\lambda_e + \mu_e) \text{grad}(\text{div} \vec{u}(x)) &= \lambda \vec{u}(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \\ \vec{u}(x) &= 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1, \\ \vec{t}^{(n)}(x) &= 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2 \end{aligned}$$

für $\lambda = \omega^2$ keine nichttrivialen, d.h. von identisch Null verschiedene Lösungen \vec{u} hat. Der eben beschriebene Übergang vom Zeitbereich zum Frequenzbereich erlaubt es uns, in der numerischen Praxis eine aufwändige Zeitintegration durch die numerische Lösung eines Randwertproblems vom Helmholtz-Typ zu ersetzen.

Strukturmechanische Modelle

In den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 haben wir mit dem Stab bereits eines der einfachsten strukturmechanischen Modelle behandelt. Die spezielle Geometrie und die spezielle Belastung führten auf örtlich eindimensionale elliptische Randwertprobleme beziehungsweise örtlich eindimensionale hyperbolische Anfangsrandwertprobleme im statischen beziehungsweise dynamischen Belastungsfall. Im Folgenden betrachten wir zweiachsige Verzerrungs- und Spannungszustände, die auf örtlich zweidimensionale Probleme führen. Diese Probleme können formal aus den Gleichungen der dreidimensionalen linearen Elastizitätstheorie abgeleitet werden. Wir können uns dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den statischen Belastungsfall beschränken.

Im Abschnitt 1.3.3 haben wir einen Profilträger $\Omega = Q \times (-\ell/2, \ell/2)$ betrachtet (siehe Abbildung 1.8, S. 24), dessen Querschnitt Q in Längsrichtung (x_3 -Richtung) konstant ist und der orthogonal zur x_3 -Achse belastet wird, wobei die Belastungen sich in x_3 -Richtung nicht ändern. Außerdem setzen wir voraus, dass die Länge ℓ des Profilträgers sehr viel größer ist als der Durchmesser der Querschnittsfläche Q . Diese Konstellation ist typisch für den *ebenen Verzerrungszustand*. Wie bereits im Abschnitt 1.3.3 dargestellt, kann dann angenommen werden, dass das Verschiebungsfeld \vec{u} die Form

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat und die Verzerrungen ε_{ij} mit $i = 3$ oder $j = 3$ verschwinden. Das Verschwinden der Ver-

zerrungen ε_{ij} mit $i = 3$ oder $j = 3$ ist für die Namensgebung „ebener Verzerrungszustand“ verantwortlich. Für isotrope Materialien hat das Verschwinden der Verzerrungen ε_{ij} mit $i = 3$ oder $j = 3$ zur Folge, dass

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{13} = 0. \quad (2.49)$$

Außerdem gilt wegen (2.35) und $\varepsilon_{33} = 0$

$$\sigma_{11} = \lambda_e(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu_e\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{22} = \lambda_e(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu_e\varepsilon_{22} \quad (2.50)$$

und

$$\sigma_{33} = \lambda_e(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \quad (2.51)$$

Addition der beiden Beziehungen in (2.50) liefert

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2(\lambda_e + \mu_e)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}).$$

Damit erhalten wir aus (2.51)

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda_e}{2(\lambda_e + \mu_e)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Im letzten Schritt haben wir den Zusammenhang (2.37) zwischen den Laméschen Elastizitätskonstanten und dem Elastizitätsmodul E sowie der Poissonschen Querkontraktionszahl ν genutzt. Folglich kann σ_{33} durch σ_{11} und σ_{22} ausgedrückt und somit eliminiert werden. Für die restlichen Komponenten des Spannungstensors erhalten wir die Beziehungen

$$\sigma_{11} = \lambda_e(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu_e\varepsilon_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad (2.52)$$

$$\sigma_{22} = \lambda_e(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu_e\varepsilon_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad (2.53)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\mu_e\varepsilon_{12} = 2G\varepsilon_{12}. \quad (2.54)$$

Hierbei bezeichnet $G = \mu_e = E/(2(1+\nu))$ den sogenannten Gleitmodul. Unter Benutzung der Voraussetzungen des ebenen Verzerrungszustandes und der daraus folgenden Beziehungen erhalten wir aus den Gleichungen (2.38) der dreidimensionalen Elastostatik die folgende Randwertaufgabe zur Bestimmung der unbekanntenen Verschiebungskomponenten $u_1(x_1, x_2)$ und $u_2(x_1, x_2)$ in divergenter Form.

Gesucht sind die Verschiebungskomponenten $u_1(x_1, x_2)$ und $u_2(x_1, x_2)$ mit $u_1, u_2 \in C^2(Q) \cap C^1(Q \cup \Gamma_2) \cap C(\bar{Q})$, so dass die Laméschen partiellen Differentialgleichungen

$$-\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\vec{u}(x)) = f_i(x), \quad i = 1, 2, \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2) \in Q \quad (2.55)$$

gelten und die Randbedingungen

$$u_i(x) = g_{1i}(x), \quad i = 1, 2, \quad \text{für alle } x \in \Gamma_1,$$

$$t_i^{(n)}(x) := \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji}(\vec{u}(x)) n_j(x) = g_{2i}(x), \quad i = 1, 2, \quad \text{für alle } x \in \Gamma_2$$

auf Γ_1 (Dirichlet) bzw. Γ_2 (Neumann) erfüllt werden, wobei die Komponenten $\sigma_{ji}(\vec{u}(x))$ des Spannungstensors durch die Beziehungen (2.52) – (2.54) und (2.32) definiert sind.

Die divergente Form ist äquivalent zu der im Kapitel 1 gegebenen klassischen Form (1.42) der Laméschen Gleichungen für den ebenen Verzerrungszustand, wobei im Kapitel 1 die rechte Seite (keine Volumenkräfte) und die Randbedingungen für das dort betrachtete Beispiel eines Profilträgers angegeben wurden.

In scheibenartigen Bauteilen, deren Dicke in einer Koordinatenrichtung, beispielsweise in x_3 -Richtung, konstant ist und die wesentlich kleiner ist als die übrigen Abmessungen, entsteht bei Belastung in der Bauteilebene näherungsweise ein *ebener Spannungszustand* (siehe Abbildung 2.16).

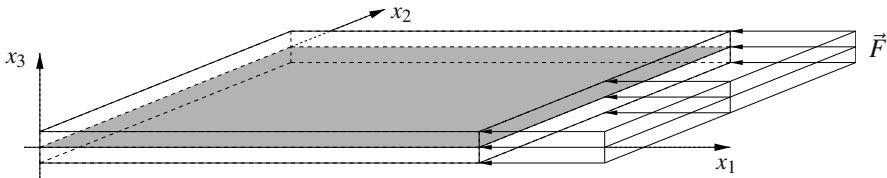


Abbildung 2.16: Scheibenartiges Bauteil unter Belastung

Es wird dann angenommen, dass die Spannungskomponenten σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} nur von x_1 und x_2 abhängen und dass $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ gilt. Das entsprechende Randwertproblem für den *ebenen Spannungszustand* erhält man aus den Beziehungen (1.42) für den ebenen Verzerrungszustand, wenn in den Laméschen Konstanten (2.37) der Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Querkontraktionszahl ν durch

$$\nu = \frac{\bar{\nu}}{1 + \bar{\nu}} \quad \text{und} \quad E = \frac{\bar{E}(1 + 2\bar{\nu})}{(1 + \bar{\nu})^2} \quad (2.56)$$

substituiert werden. Dabei sind \bar{E} und $\bar{\nu}$ der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl des Materials, aus dem das betrachtete dünne Bauteil (Scheibe) besteht. Mit diesem Substitutions-trick kann das Randwertproblem für den ebenen Spannungszustand wieder durch das Randwertproblem (2.55) beschrieben werden. Wir werden dies im Abschnitt 4.5.7, S. 387, wenn wir die

Lösung eines ebenen linearen Elastizitätsproblems mittels der Finite-Elemente-Methode erläutern, ausführlich diskutieren.

Wenn die Geometrie und die Belastungen rotationssymmetrisch sind, dann kann das Problem durch den Übergang auf Zylinderkoordinaten ebenfalls reduziert werden. Im Kapitel 1 haben wir diesen Fall für das dickwandige Rohr unter Innendruck demonstriert. Balken, Platten und Schalen sowie Stab- und Flächentragwerke sind weitere strukturelle Modelle, die in der Praxis, vor allem im Bauingenieurwesen, eine wichtige Rolle spielen (siehe z.B. [BK85]).

Nichtlineare Probleme der Festkörpermechanik

In der Festkörpermechanik können Nichtlinearitäten in verschiedenen Formen auftreten. *Stoffliche* oder *physikalische Nichtlinearitäten* folgen aus einem nichtlinearen Materialverhalten. Das Hooksche Gesetz (2.33), das eine lineare Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen beschreibt, muss durch ein nichtlineares Stoffgesetz, welches das nichtlineare Materialverhalten adäquat beschreibt, ersetzt werden. Zum Beispiel verhält sich Gummi nichtlinear elastisch. Andere Materialien, wie zum Beispiel Stahl oder Boden, können bleibende Deformationen aufweisen, die mit elastisch-plastischen Materialgesetzen modelliert werden können (siehe z.B. [KL84]). *Geometrische Nichtlinearitäten* treten in Verbindung mit großen Verschiebungen und Verdehnungen bei kleinen Verzerrungen sowie bei großen Deformationen auf. Kontaktprobleme führen selbst dann auf nichtlineare Problemstellungen, wenn das physikalische und geometrische Verhalten linear ist. Die meisten gekoppelten Feldprobleme sind nichtlinear (siehe z.B. [Kal07]).

Die FE-Diskretisierung nichtlinearer Feldprobleme führt üblicherweise auf großdimensionierte, nichtlineare Gleichungssysteme, deren iterative Lösung im Kapitel 6 betrachtet wird. Das Lehrbuch [Wri01] von P. Wriggers gibt einen exzellenten Überblick über die numerische Behandlung typischer nichtlinearer Probleme der Festkörpermechanik. Der interessierte Leser sei auch auf die englischsprachige Monographie [SH98] von J.C. Simon und T.J.R. Hughes verwiesen.



<http://www.springer.com/978-3-658-01100-0>

Methode der finiten Elemente für Ingenieure
Eine Einführung in die numerischen Grundlagen und
Computersimulation

Jung, M.; Langer, U.

2013, XVI, 639 S. 172 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-01100-0