

# Einleitung

In dieser Ausarbeitung von Vorlesungen, welche in den letzten Jahren an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel abgehalten wurden, wird versucht, eine Einführung in die Ordnungs- und Verbandstheorie und den damit eng verbundenen algebraischen Kalkül der binären Relationen zu geben und Anwendungen insbesondere in der Informatik zu demonstrieren. Die eben erwähnten Gebiete spielen heute in vielen Bereichen der reinen und angewandten Mathematik und der Informatik eine große Rolle. Etwa haben sehr viele Sätze der Mathematik über auf- und absteigende Ketten, wie sie etwa bei auflösbaren Gruppen oder Noetherschen Ringen auftreten, einen ordnungstheoretischen Hintergrund. Gleiches gilt für die Methoden der Informatik zum Beweis von Terminierungen von Deduktionen und Programmen. Ein weiteres Beispiel ist die Boolesche Algebra, ein spezieller Zweig der Verbandstheorie. Durch sie ist die Algebraisierung der Aussagenlogik gegeben. Ihre Bedeutung für insbesondere die Informatik ergibt sich bei den Schaltabbildungen und den logischen Schaltungen. Als letztes Beispiel seien noch Fixpunkte genannt. Sehr viele praktisch bedeutende Probleme lassen sich als Fixpunktprobleme formulieren, etwa die Berechnung der relationalen transitiven und reflexiv-transitiven Hüllen oder das damit eng verbundene Erreichbarkeitsproblem auf Graphen. Algorithmische Lösungen dieser Probleme ergeben sich dann oft direkt aus den „konstruktiven“ Fixpunktsätzen über vollständigen Verbänden. Fixpunkte spielen auch bei der sogenannten denotationellen Semantik von Programmiersprachen eine große Rolle.

Es gibt wahrscheinlich kein mathematisches Konzept, das so viele Anwendungen findet, wie das einer Ordnung. Diese wurden in der Mathematik schon sehr früh betrachtet. Einzelne der grundlegenden Gedanken gehen sogar sehr weit zurück, teilweise bis Aristoteles. Eine überragende Bedeutung kam den Ordnungen insbesondere zu Beginn des 20. Jahrhunderts zu, als die Grundlagen der Mathematik und hier insbesondere die der Mengenlehre intensiv diskutiert wurden. Untrennbar damit sind die Namen G. Cantor, E. Zermelo und F. Hausdorff verbunden. G. Cantor begründete die Mengenlehre. Von E. Zermelo stammt die Einsicht, daß das Auswahlaxiom ein wesentliches Beweismittel der Mathematik ist. Seine heutzutage mit Abstand am häufigsten verwendete Konsequenz – man sollte genauer sagen: äquivalente Formulierung – ist das bekannte Lemma von M. Zorn. Und F. Hausdorff hat wohl als erster die Ordnungsaxiome explizit formuliert. Sein sogenanntes Maximalkettenprinzip ist ebenfalls logisch äquivalent zum Zornschen Lemma.

Den Ursprung der Verbandstheorie kann man wohl bei G. Boole sehen, der schon im 19. Jahrhundert eine Algebraisierung der Aussagenlogik untersuchte, sowie bei R. Dedekind,

der sich den Verbänden von den Idealen bei algebraischen Zahlen, also von der algebraischen Seite her näherte. Von R. Dedekind stammt auch die heute übliche algebraische Verbandsdefinition, von ihm auch als Dualgruppe bezeichnet, wie etwa in der grundlegenden Arbeit „Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe“ (Mathematische Annalen 53, 371–403, 1900). Die Untersuchungen von G. Boole wurden sehr bald von anderen Wissenschaftlern aufgegriffen, insbesondere um 1880 von C.S. Peirce in seiner „Algebra of Logic“ und von E. Schröder, der von 1885 bis 1895 das umfassende Werk „Algebra der Logik“ in drei Bänden publizierte. Eine Vereinheitlichung zu der Theorie, wie wir sie heutzutage kennen, ist in erster Linie das Werk von G. Birkhoff. Es sind aber noch eine Reihe von weiteren bekannten Mathematikern zu nennen, die zur Grundlegung und Weiterentwicklung der Verbandstheorie als einem Teilgebiet sowohl der modernen Algebra als auch der Ordnungstheorie beigetragen haben. Ohne Vollständigkeitsanspruch seien genannt R.P. Dilworth, O. Frink, P. Halmos, L. Kantorovik, K. Kuratowski, J. von Neumann, O. Ore und H.M. Stone.

Bei einer Historie der Relationenalgebra kann man ebenfalls bei den schon oben genannten Mathematikern A. de Morgan, C.S. Peirce und E. Schröder ansetzen. Diese gingen jedoch alle noch komponentenbehaftet vor, verwendeten also die Elementbeziehung (in verschiedensten Schreibweisen). Wichtige Daten für das komponentenfreie, algebraische Vorgehen, bei dem die Elementbeziehung vermieden wird und stattdessen nur mehr Operationen auf Relationen Verwendung finden, sind 1941, als A. Tarski eine Axiomatisierung der abstrakten Relationenalgebra publizierte, und 1955, als er zusammen mit L. Chin die grundlegendsten arithmetischen Gesetze der abstrakten Relationenalgebra veröffentlichte<sup>1</sup>. Nach und nach fand der Ansatz Anklang und vielfältige Anwendungen und im Jahr 1989 erschien, von G. Schmidt und T. Ströhlein und in Deutsch, das erste Lehrbuch über abstrakte Relationenalgebra. Eine erste gemeinsame Konferenz über relationale Methoden in der Informatik (Initiative RelMiCS, nun RAMiCS für „Relational and Algebraic Methods in Computer Science“) fand 1994 statt. Bis heute folgten 12 weltweite weitere Treffen dieser Art, die bisher letzte RAMiCS-Konferenz fand in diesem Jahr in Cambridge (UK) statt. Weil Relationenalgebra als Gebiet wesentlich jünger als Verbandstheorie ist, verzichten wir hier auf die Nennung weiterer Namen von Wissenschaftlern, da eine Bewertung ihres endgültigen wissenschaftlichen Einflusses derzeit noch unmöglich erscheint.

Nach diesen knappen historischen Betrachtungen wird nun, ebenfalls sehr knapp, der Inhalt des Buchs skizziert. Er gliedert sich grob in drei Teile.

Der erste Teil ist den Ordnungen und Verbänden gewidmet. Hier werden zuerst die Grundlagen der Ordnungs- und Verbandstheorie vorgestellt. Darauf aufbauend werden dann spezielle Klassen von Ordnungen und Verbänden diskutiert, die wichtigsten Fixpunktsätze bewiesen und anhand von einigen exemplarischen Anwendungen vertieft, Vervollständigungs- und Darstellbarkeitsfragen geklärt und transfinite Zahlen mit dem Auswahlaxiom und wichtigen Folgerungen (genauer: dazu äquivalenten Formulierungen, wie etwa das Lemma von M. Zorn) und Anwendungen präsentiert. Ein Abschnitt über einige spezielle Anwen-

---

<sup>1</sup>Man vergleiche hierzu mit A. Tarski, On the calculus of relations, Journal of Symbolic Logic 6, 73–89, 1941. und mit L.H. Chin, A. Tarski, Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras, University of California Publications in Mathematics (new series) 1, 341–384, 1951.

dungen von Ordnungen und Verbänden in der Informatik schließt den ersten Teil ab.

Der zweite Teil des Buchs ist relativ kurz. Zuerst werden hier die grundlegenden Begriffe von konkreten, also mengentheoretischen, Relationen eingeführt und dann im Rahmen von abstrakten Relationenalgebren algebraisiert. Ein Teil der Axiome einer Relationenalgebra ist rein verbandstheoretischer Natur; hierdurch wird die Brücke zum ersten Teil des Buchs hergestellt. Die algebraische Behandlung von Relationen beinhaltet insbesondere die algebraische Definition von bestimmten Klassen von Relationen bzw. von relationalen Operationen und den Beweis von wichtigen Eigenschaften. Nach dieser Einführung in die Algebra der Relationen und das Rechnen in ihr befassen wir uns noch mit den strukturerhaltenden Funktionen zwischen Relationen. Dies ist in unserem Rahmen insbesondere wichtig, um die „Eindeutigkeit“ von axiomatisch definierten relationalen Strukturen festzulegen, welche später bei gewissen Anwendungen eine Rolle spielen.

Im dritten Teil des Buchs konzentrieren wir uns auf Anwendungen von Relationen beim Algorithmenentwurf. Dabei werden oftmals auch ordnungs- und verbandstheoretische Eigenschaften wesentlich mitverwendet und auch Fixpunkte spielen bei vielen dieser Anwendungen eine zentrale Rolle. Zuerst zeigen wir, wie man Datenstrukturen – insbesondere Mengen und einige der in der universellen Algebra bzw. der Semantik von Programmiersprachen wichtigen sogenannten Bereichskonstruktionen – mit relationenalgebraischen Mitteln beschreiben kann. Dann demonstrieren wir anhand von vielen Fallstudien, wie man konkrete Probleme durch relationale Programme löst, also durch Programme, die sich im wesentlichen nur auf einen Datentyp für Relationen mit all den früher vorgestellten Operationen stützen. Viele der Beispiele sind graphentheoretischer Natur, wie etwa die Bestimmung der erreichbaren Knoten, das Testen von Kreisfreiheit oder die Berechnung von Kernen. Wir betrachten aber auch Probleme aus anderen Bereichen, beispielsweise kombinatorische 2-Personen-Spiele oder die Bestimmung kanonischer Epimorphismen. Durch die relationale Behandlung von ordnungs- und verbandstheoretischen Problemen wird schließlich der Bogen wieder zurück zum ersten Teil des Buchs geschlagen. In dem dritten Teil wird auch ein seit 1993 an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel entwickeltes Computersystem zur Manipulation und Visualisierung von konkreten Relationen und zum relationalen Programmieren vorgestellt. Mit Hilfe des Systems, genannt RELVIEW, wurden insbesondere auch viele Beispiele des Buchs berechnet und entsprechende Bilder erstellt.

Wir wollen auch kurz auf begleitende und weiterführende Literatur eingehen. Die nachfolgend angegebenen Bücher gehen in der Regel bei speziellen Gebieten weit über das hinaus, was diese Vorlesungsausarbeitung an Stoff enthält. Bezüglich der Ordnungs- und Verbandstheorie sei insbesondere auf die folgenden Lehrbücher verwiesen.

- H. Gericke, Theorie der Verbände, 2. Auflage, Bibliographisches Institut, 1967.
- H. Hermes, Einführung in die Verbandstheorie, 2. Auflage, Springer Verlag, 1967.
- G. Birkhoff, Lattice Theory, 3. Auflage, Amer. Math. Soc, 1967.
- M. Ern , Einführung in die Ordnungstheorie, Bibliographisches Institut, 1982.
- R. Freese, J. Jezek, J.B. Nation, Free Lattices, Amer. Math. Soc, 1995.

- B.A. Davey, H.A. Priestley, Introduction to Lattices and Orders, 2. Auflage, Cambridge University Press, 2002.

Bezüglich der konkreten Relationen und der abstrakten Relationenalgebra verweisen wir auf das nachfolgende, schon oben erwähnte Lehrbuch.

- G. Schmidt, T. Ströhlein, Relationen und Graphen, Springer Verlag, 1989.

Eine überarbeitete englischsprachige Ausgabe dieses Buchs ist 1993 als „Relations and Graphs“ ebenfalls beim Springer Verlag erschienen. Sowohl die deutsche als auch die englische Ausgabe des Buchs von G. Schmidt und T. Ströhlein enthalten einen Anhang, in dem die wichtigsten Begriffe und Aussagen der Verbandstheorie und der abstrakten Relationenalgebra zusammengestellt sind.

Im Gegensatz zur Verbandstheorie werden wir in diesem Buch bei Relationenalgebra des öfteren Stoff bringen, den man nur in Originalarbeiten, d.h. Zeitschriften und Tagungsbänden, nachlesen kann. Außer dem Buch von G. Schmidt und T. Ströhlein existiert derzeit kein weiteres *Lehrbuch* (dieser Ausdruck sei betont) über die algebraische, komponentenfreie Behandlung der binären Relationen. Es gibt jedoch das nachfolgend angegebene Buch, in dem sich einige führende Experten in Relationenalgebra vor einigen Jahren zusammengetan haben, und eine Reihe von sehr gut lesbaren Artikeln über die Anwendung von Relationen in verschiedensten Bereichen der Informatik (wie Semantik, Algorithmik, Datenstrukturen, Datenbanken und Linguistik) produzierten.

- C. Brink, W. Kahl, G. Schmidt (Herausgeber): Relational Methods in Computer Science, Springer Verlag, 1997.

Für Leser, die sich vertieft mit Relationenalgebra beschäftigen wollen, seien noch die drei nachfolgenden Monographien angegeben. Es muß an dieser Stelle jedoch bemerkt werden, daß es sich dabei um keine Lehrbücher handelt und das Verstehen dieser Bücher eine gute mathematische Ausbildung und teilweise auch einen beträchtlichen Aufwand erfordert.

- G. Birkhoff, S. Givant, A Formalization of Set Theory without Variables, Amer. Math. Soc, 1987.
- R. Maddux, Relation Algebras, Elsevier, 2006.
- G. Schmidt, Relational Mathematics, Cambridge University Press, 2011.

Weiterhin sei noch auf den Artikel „The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations“ von R.D. Maddux (Studia Logica 50. Seite 421-455, 1991) verwiesen. In ihm werden, sich orientierend an der geschichtlichen Entwicklung, die Grundlagen der axiomatischen Relationenalgebra dargelegt. Besonders interessant ist der Artikel für Leser, die an historischen Fakten interessiert sind, denn er enthält ein umfangreiches Literaturverzeichnis und eine Fülle interessanter wörtlicher Zitate aus den frühen Arbeiten von A. de Morgan, C.S. Peirce und anderen.

Das Lesen dieses Buchs, welches sich primär an Studierende der Informatik und Mathematik im Diplom-Hauptstudium, den letzten Semestern eines Bachelor-Studiums oder im

Master-Studium wendet, erfordert relativ wenig tiefgehende Voraussetzungen. Aus der Mathematik werden nur die Grundbegriffe der Mengenlehre und etwas klassische Algebra (wie Gruppen, Ringe und Körper), mathematische Logik (hier insbesondere Aussagenlogik und das Umformen von prädikatenlogischen Formeln) und grundlegendste Notationen der Graphentheorie (Wege, Erreichbarkeit, Kreise usw.) vorausgesetzt und aus der Informatik eine gewisse Vertrautheit mit Algorithmik (Datenstrukturen, Entwurfsmethoden,  $O$ -Notation, etwas Komplexitätstheorie), imperativen Programmiersprachen (wie C oder dem entsprechenden Umfang von Java) und den fundamentalsten Programmentwicklungstechniken (wie beispielsweise der Zusicherungsmethode mit Vorbedingung, Nachbedingung und Schleifeninvarianten von R. Floyd und C.A.R. Hoare). Da dies aber alles nicht über das hinausgeht, was man üblicherweise im Diplom-Grundstudium oder den ersten Semestern eines Bachelor-Studiums Informatik oder Mathematik lernt, verzichten wir hier auf die Angabe von entsprechender Literatur.

Die vorliegende zweite Auflage entspricht im Großen und Ganzen der ersten Auflage von 2008. Es wurden nur alle zwischenzeitlich gefundenen Fehler korrigiert, einige Beweise vereinfacht und einige Formulierungen verbessert. Viele Studierende, Mitarbeiter, Kollegen und Freunde haben in den letzten Jahren durch zahlreiche Vorschläge und Anregungen, konstruktive Kritik und auch aufwendiges Korrekturlesen an der Entstehung dieses Buchs mitgewirkt. Ihnen, die nicht alle namentlich genannt werden können, sei an dieser Stelle sehr herzlich gedankt. Danken möchte ich auch dem leider viel zu früh verstorbenen Kollegen Ingo Wegener für seine Unterstützung bei der Publikation des Werkes und dem Vieweg+Teubner Verlag für die sehr angenehme Zusammenarbeit.

Kiel, im September 2012

Rudolf Berghammer



<http://www.springer.com/978-3-658-00618-1>

Ordnungen, Verbände und Relationen mit  
Anwendungen

Berghammer, R.

2012, XIV, 392 S. 82 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-00618-1