Kapitel 2

Spezielle Klassen von Verbänden

In diesem Kapitel stellen wir einige wichtige Klassen von Verbänden vor, wie sie oft in der Mathematik und Informatik auftreten. Wir schreiten dabei in den ersten drei Abschnitten zu immer größerer Spezialisierung fort und lernen nacheinander modulare, distributive und Boolesche Verbände kennen. Im letzten Abschnitt betrachten wir schließlich noch vollständige Verbände. Es gibt noch weitere wichtige Verbandsklassen, etwa Heyting-Algebren, Brouwer'sche Verbände, bezüglich derer wir jedoch auf weiterführende Literatur verweisen müssen.

2.1 Modulare Verbände

In allen Verbänden gilt die modulare Ungleichung

$$a \sqsubseteq c \quad \Longrightarrow \quad a \sqcup (b \sqcap c) \sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap c$$

für alle Elemente $a, b, c \in V$; siehe Beispiel 1.4.2.2. Fordert man rechts des Implikationspfeiles sogar Gleichheit, so definiert diese Verstärkung der modularen Ungleichung eine bedeutende Klasse von Verbänden, mit der wir uns nun beschäftigen.

2.1.1 Definition Ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ heißt *modular*, falls für alle a, b, $c \in V$ das *modulare Gesetz* (auch *Modulgesetz* oder *modulare Gleichung*)

$$a \sqsubseteq c \quad \Longrightarrow \quad a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap c$$

gilt, wobei $\sqsubseteq$ die Verbandsordnung ist. □

Die Bezeichnung „Modulgesetz" wurde im Jahr 1897 vom Mathematiker R. Dedekind eingeführt, auf den auch die Definition der natürlichen Zahlen mittels der nun Peano-Axiome genannten Eigenschaften zurückgeht, sowie die Definition der reellen Zahlen mittels Schnitten. Man spricht deshalb in der Literatur manchmal auch von *Dedekindschen Verbänden.*

R. Berghammer, *Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen*,
DOI 10.1007/978-3-658-00619-8_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2012

Weil die duale Form des Modulgesetzes, analog zur modularen Ungleichung, äquivalent zum Modulgesetz ist, haben wir sofort die folgende wichtige Eigenschaft:

2.1.2 Satz Das Dualitätsprinzip gilt auch für die Klasse der modularen Verbände. □

Man kann das Modulgesetz auch als Gleichung ausdrücken, wie es im nachstehenden Satz geschieht.

2.1.3 Satz Über einem Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ ist die (implizit über $a, b, c \in V$ allquantifizierte) Implikation

$$a \sqsubseteq c \quad \Longrightarrow \quad a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap c$$

(also das Modulgesetz) äquivalent zur (wiederum implizit über $a, b, c \in V$ allquantifizierten) Gleichung

$$a \sqcap ((a \sqcap b) \sqcup c) \;=\; (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c).$$

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Es seien drei beliebige Elemente $a, b, c \in V$ gegeben. Dann haben wir die Beziehung $a \sqcap b \sqsubseteq a$ und wir können mit Hilfe des Modulgesetzes die gewünschte Gleichung wie folgt beweisen:

$$\begin{array}{rcll} a \sqcap ((a \sqcap b) \sqcup c) & = & ((a \sqcap b) \sqcup c) \sqcap a & \text{Kommutativität} \\ & = & (a \sqcap b) \sqcup (c \sqcap a) & \text{Modulgesetz (von rechts)} \\ & = & (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) & \text{Kommutativität} \end{array}$$

„$\Longleftarrow$“: Nun seien $a, b, c \in V$ mit $a \sqsubseteq c$ vorausgesetzt. Dann beweist man die rechte Seite des Modulgesetzes wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} (a \sqcup b) \sqcap c & = & ((a \sqcap c) \sqcup b) \sqcap c & a \sqsubseteq c \\ & = & c \sqcap ((c \sqcap a) \sqcup b) & \text{Kommutativität} \\ & = & (c \sqcap a) \sqcup (c \sqcap b) & \text{Voraussetzung} \\ & = & a \sqcup (c \sqcap b) & a \sqsubseteq c \\ & = & a \sqcup (b \sqcap c) & \text{Kommutativität} \end{array}$$

Damit sind beide Richtungen der Äquivalenz gezeigt. □

Modulare Verbände sind also algebraische Strukturen, die durch (allquantifizierte) Gleichungen definiert werden können. Solche Strukturen heißen in der Literatur des mathematischen Teilgebiets „Universelle Algebra“ (einer Erweiterung der klassischen Algebra) auch *Varietäten*. Aus der Universellen Algebra ist bekannt, daß bei Varietäten die definierenden Gesetze auch für die Unterstrukturen, die direkten Produkte und die homomorphen Bilder gelten[1]. Als unmittelbare Konsequenz erhalten wir somit das folgende Resultat:

[1]Dies ist ein bekannter Satz von G. Birkhoff: Varietäten sind abgeschlossen bzgl. Unterstrukturen, direkten Produkten und homomorphen Bildern. Einen Beweis findet man im Anhang des in der Einleitung zitierten Buchs von H. Hermes. Er basiert unter anderem darauf, daß für einen Ausdruck $t(x_1, \ldots, x_n)$ über $x_1, \ldots, x_n$ das Bild unter einem Homomorphismus gegeben ist durch $t(f(x_1), \ldots, f(x_n))$.

2.1.4 Satz Jeder Unterverband, jeder Produktverband und jedes homomorphe Bild eines modularen Verbands (also jeder Verband V, zu dem es einen surjektiven Verbandshomomorphismus $f : W \to V$ mit einen modularen Verband W gibt) ist modular. $\square$

Bevor wir noch etwas genauer auf die Theorie modularer Verbände eingehen, insbesondere eine exakte Charakterisierung beweisen, wollen wir erst einige Beispiele behandeln.

2.1.5 Beispiele (für modulare/nicht-modulare Verbände) Nachfolgend sind einige Beispiele für modulare Verbände angeben, sowie ein Beispiel für einen Verband, der nicht modular ist.

1. Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so heißt eine Untergruppe N von G *Normalteiler*, falls $g^{-1}Ng \subseteq N$ für alle $g \in G$ gilt. Definiert man auf der Menge $\mathcal{N}(G)$ der Normalteiler von G zwei Operationen $\sqcup$ und $\sqcap$ durch

   $$\begin{aligned} N \sqcup M &= \{xy \mid x \in N, y \in M\} && \textit{Komplexprodukt} \\ N \sqcap M &= N \cap M && \textit{Durchschnitt}, \end{aligned}$$

   so ist $(\mathcal{N}(G), \sqcup, \sqcap)$ ein modularer Verband. Dies ist durch elementare Gruppentheorie relativ einfach nachzuweisen.

2. Weitere Beispiele für modulare Verbände, die aus der klassischen Algebra kommen, sind etwa die Untervektorräume eines Vektorraumes (mit $W + Z$ als der Supremumsbildung und $W \cap Z$ als der Infimumsbildung), die Ideale eines Ringes und die Teilmodule eines Moduls.

3. Als Beispiel für einen *nichtmodularen Verband* betrachten wir $(V_{\neg M}, \sqcup, \sqcap)$, wobei das Ordnungsdiagramm von $V_{\neg M}$ wie in der nachfolgenden Figur angegeben aussieht: Die drei Elemente, die das Modulgesetz[2] nicht erfüllen, sind a, b und c. Aus der

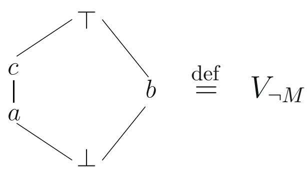


Abbildung 2.1: Beispiel für einen nicht-modularen Verband

   Abschätzung $a \sqsubseteq c$ folgt nämlich sofort die Ungleichung

   $$\begin{aligned} a \sqcup (b \sqcap c) &= a \sqcup \bot && \text{siehe Bild} \\ &= a && \bot \text{ kleinstes Element} \\ &\neq c && \text{siehe Bild} \\ &= \top \sqcap c && \top \text{ größtes Element} \\ &= (a \sqcup b) \sqcap c && \text{siehe Bild.} \end{aligned}$$ $\square$

[2] Man vergleiche mit Definition 2.1.1.

In der Literatur wird der zuletzt gezeigte Verband $V_{\neg M}$ auch als Pentagon-Verband N_5 bezeichnet. Durch das Beispiel $V_{\neg M}$ ist nicht nur ein zufälliger Verband angegeben, der nicht modular ist, sondern genau die Nichtmodularität von Verbänden getroffen. Dies ist der Inhalt des folgenden wichtigen Charakterisierungssatzes für modulare Verbände. Eine erste Formulierung mit Beweis findet man in der in der Einleitung zitierten grundlegenden Arbeit von R. Dedekind aus dem Jahr 1900; siehe das dortige Theorem IX auf Seite 389.

2.1.6 Satz (Charakterisierung modularer Verbände) Ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ ist genau dann nicht modular, wenn er einen Unterverband besitzt, der isomorph zum in Abbildung 2.1 angegebenen 5-elementigen Verband $V_{\neg M}$ ist.

Beweis: „$\Longleftarrow$“: Diese Richtung wurde schon im Beispiel 2.1.5.3 mit der Angabe von $V_{\neg M}$ und der entsprechenden Rechnung begründet.

„$\Longrightarrow$“: Es sei V ein nichtmodularer Verband. Also gibt es Elemente $a, b, c \in V$ mit den beiden folgenden Eigenschaften:

$$
\begin{array}{lcll}
a & \sqsubseteq & c & \qquad (*) \\
a \sqcup (b \sqcap c) & \sqsubset & (a \sqcup b) \sqcap c & \qquad (**)
\end{array}
$$

Man beachte, daß in Eigenschaft $(**)$ die Beziehung „$\sqsubseteq$“ immer gültig ist, da die modulare Ungleichung[3] stets gilt.

1. Es gilt die Ungleichheit $a \neq c$. Wäre nämlich $a = c$, so bekommt man einen Widerspruch zur Nichtmodularität wie folgt:

$$
\begin{array}{rcll}
a \sqcup (b \sqcap c) & = & a \sqcup (b \sqcap a) & \text{Annahme } a = c \\
 & = & a & \text{Absorption} \\
 & = & c & \text{Annahme } a = c \\
 & = & (c \sqcup b) \sqcap c & \text{Absorption} \\
 & = & (a \sqcup b) \sqcap c & \text{Annahme } a = c
\end{array}
$$

2. Die zwei Elemente a und b sind unvergleichbar, insbesondere gilt also auch $a \neq b$. Wäre nämlich $a \sqsubseteq b$, so impliziert dies

$$(a \sqcup b) \sqcap c \;=\; b \sqcap c \;\sqsubseteq\; a \sqcup (b \sqcap c)$$

und mit Hilfe der modularen Ungleichung folgt daraus die Gleichung

$$a \sqcup (b \sqcap c) \;=\; (a \sqcup b) \sqcap c,$$

was ein Widerspruch zur Eigenschaft $(**)$ ist. Analog zeigt man $b \not\sqsubseteq a$, d.h. man führt $b \sqsubseteq a$ zu einem Widerspruch.

3. Die Elemente b und c sind ebenfalls unvergleichbar. Hier folgt der Beweis analog zum Beweis von (2).

[3] Man vergleiche dazu mit dem Beispiel 1.4.2.2.

Nun betrachtet man die folgende Teilmenge von V:

$$\mathcal{N}_5 \;:=\; \{b \sqcap c, b, a \sqcup (b \sqcap c), (a \sqcup b) \sqcap c, a \sqcup b\}$$

In dieser Teilmenge haben wir zwei Ketten, nämlich die Kette

$$\begin{array}{rcll} b \sqcap c & \sqsubset & b & \qquad b \sqcap c = b \text{ wäre Widerspruch zu (3)} \\ & \sqsubset & a \sqcup b & \qquad b = a \sqcup b \text{ wäre Widerspruch zu (2)} \end{array}$$

mit drei Elementen und die Kette

$$\begin{array}{rcll} b \sqcap c & \sqsubset & a \sqcup (b \sqcap c) & \qquad b \sqcap c = a \sqcup (b \sqcap c) \text{ impliziert } a \sqsubseteq b\text{, Wsp. zu (2)} \\ & \sqsubset & (a \sqcup b) \sqcap c & \qquad \text{wegen } (**) \\ & \sqsubset & a \sqcup b & \qquad (a \sqcup b) \sqcap c = a \sqcup b \text{ impliziert } b \sqsubseteq c\text{, Wsp. zu (3)} \end{array}$$

mit vier Elementen. Weiterhin ist das Element b sowohl mit $a \sqcup (b \sqcap c)$ als auch mit $(a \sqcup b) \sqcap c$ unvergleichbar. Dazu sind nochmals vier Fälle zu überprüfen. Wir führen nur die zwei ersten Fälle als Beispiele durch: Es gilt

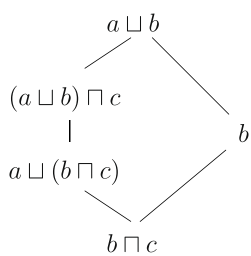
$$\begin{array}{rcll} b \sqsubseteq a \sqcup (b \sqcap c) & \Longrightarrow & b \sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap c & \qquad \text{Modulare Ungleichung} \\ & \Longrightarrow & b \sqsubseteq c, & \end{array}$$

also wir haben beim Vorliegen von $b \sqsubseteq a \sqcup (b \sqcap c)$ einen Widerspruch zu (3). Ferner gilt

$$a \sqcup (b \sqcap c) \sqsubseteq b \quad \Longrightarrow \quad a \sqsubseteq b,$$

und dadurch bekommen wir aus $a \sqcup (b \sqcap c) \sqsubseteq b$ somit einen Widerspruch zu (2). Die Behandlung der zwei verbleibenden Fälle $b \sqsubseteq (a \sqcup b) \sqcap c$ und $(a \sqcup b) \sqcap c \sqsubseteq b$ erfolgt in vollkommen analoger Weise.

Als unmittelbare Folgerung bekommt man für die Menge $\mathcal{N}_5$ das folgende Ordnungsdiagramm (welches zu einer Raute entarten würde, wenn a gleich c wäre):



Damit ist es klar, wie der Isomorphismus f von $\mathcal{N}_5$ nach $V_{\neg M}$ aussieht. Es bleibt noch zu verifizieren, daß $\mathcal{N}_5$ ein Unterverband (d.h. abgeschlossen gegenüber $\sqcup$ und $\sqcap$) ist und f die Isomorphie-Gleichungen erfüllt.

Bei der Verifikation der Abgeschlossenheit müssen nur die Paare des obigen Diagramms betrachtet werden, die unvergleichbar sind; für die restlichen Paare ist offensichtlich das größere Element das Supremum und das kleinere Element das Infimum. Die Ergebnisse der Supremums- und Infimumsbildungen sind aus dem Diagramm ebenfalls ersichtlich. Hier kommen nun die entsprechenden formalen Beweise: Die Herleitungen

$$\begin{array}{rcll} ((a \sqcup b) \sqcap c) \sqcap b & = & b \sqcap c & \text{Absorption} \\ \\ ((a \sqcup b) \sqcap c) \sqcup b & \sqsubseteq & a \sqcup b \sqcup b & \\ & = & a \sqcup (b \sqcap c) \sqcup b \sqcup b & \text{Absorption} \\ & \sqsubseteq & ((a \sqcup b) \sqcap c) \sqcup b & \text{Voraussetzung} \end{array}$$

zeigen, daß das Supremum $a \sqcup b$ und das Infimum $b \sqcap c$ von $(a \sqcup b) \sqcap c$ und b in der Menge $\mathcal{N}_5$ liegen und die Herleitungen

$$\begin{array}{rcll} (a \sqcup (b \sqcap c)) \sqcup b & = & a \sqcup b & \text{Absorption} \\ \\ (a \sqcup (b \sqcap c)) \sqcap b & \sqsubseteq & (a \sqcup b) \sqcap c \sqcap b & \text{Voraussetzung} \\ & = & b \sqcap c \sqcap b & \text{Absorption} \\ & \sqsubseteq & (a \sqcup (b \sqcap c)) \sqcap b & \end{array}$$

zeigen, daß das Supremum $a \sqcup b$ und das Infimum $b \sqcap c$ von $a \sqcup (b \sqcap c)$ und b ebenfalls in der gleichen Menge liegen.

Das konkrete Hinschreiben von f und das Nachrechnen der Isomorphie-Gleichungen ist trivial und wird deshalb unterdrückt. □

In einem modularen Verband kann man zwei vergleichbare Elemente stets mittels eines beliebigen dritten Elements und $\sqcup, \sqcap$ auf Gleichheit testen. Dies ist sogar charakteristisch für modulare Verbände, wie der nachfolgende Satz zeigt.

2.1.7 Satz Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband. V ist genau dann modular, wenn für alle Elemente $a, b, c \in V$ die folgende Implikation gilt:

$$a \sqcap c = b \sqcap c,\ a \sqcup c = b \sqcup c,\ a \sqsubseteq b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

Beweis: „$\Longrightarrow$"; Es seien Elemente $a, b, c \in V$ mit $a \sqcap c = b \sqcap c$, $a \sqcup c = b \sqcup c$ und $a \sqsubseteq b$ gegeben. Die Annahme $a \sqsubseteq b$ macht das Modulgesetz anwendbar und bringt

$$\begin{array}{rcll} a & = & a \sqcup (c \sqcap a) & \text{Absorption} \\ & = & a \sqcup (c \sqcap b) & a \sqcap c = b \sqcap c \\ & = & (a \sqcup c) \sqcap b & \text{Modulgesetz} \\ & = & (b \sqcup c) \sqcap b & a \sqcup c = b \sqcup c \\ & = & b & \text{Absorption.} \end{array}$$

„$\Longleftarrow$"; Diese Richtung kann man mit Hilfe von Satz 2.1.6 durch Widerspruch zeigen. Wäre, bei Gültigkeit der Implikation

$$a \sqcap c = b \sqcap c,\ a \sqcup c = b \sqcup c,\ a \sqsubseteq b \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

für alle $a, b, c \in V$, der Verband V nämlich nicht modular, so gibt es einen Unterverband isomorph zu $V_{\neg M}$, und damit existieren $a, b, c \in V$ mit $a \sqcap c = b \sqcap c$, $a \sqcup c = b \sqcup c$, $a \sqsubseteq b$, aber auch $a \neq b$. Das ist ein Widerspruch zur vorausgesetzten Implikation! $\Box$

Die Richtung „$\Longleftarrow$" dieses Satzes ohne den Charakterisierungssatz 2.1.6 zu beweisen ist ebenfalls möglich, aber technisch wesentlich aufwendiger. Solch einen Beweis findet man beispielsweise in dem Lehrbuch L. Skornjakow, Elemente der Verbandstheorie, WTB Band 139, Akademie Verlag, 1973 auf den Seiten 114 und 115.

Als letzten Satz dieses Abschnitts beweisen wir nun noch das sogenannte Transpositionsprinzip, das ebenfalls auf R. Dedekind zurückgeführt werden kann (Theorem XVI seiner berühmten Arbeit in Band 53 der Mathematischen Annalen, Seite 393). Zu seiner Formulierung benötigen wir den Begriff des (abgeschlossenen) Intervalls, der die von den reellen Zahlen her bekannte Schreibweise $[a, b]$ auf beliebige Ordnungen verallgemeinert.

2.1.8 Definition Ist $(M, \sqsubseteq)$ eine Ordnung, so definiert man zu zwei Elementen $a, b \in M$ das *Intervall* von a nach b durch $[a, b] := \{x \in M \mid a \sqsubseteq x \sqsubseteq b\}$. $\Box$

Insbesondere ist das Intervall leer, falls a echt größer als b ist. Man nennt a und b auch die unteren und oberen Intervallgrenzen. Bei Verbänden bilden nichtleere Intervalle offensichtlich Unterverbände. Nach dieser Festlegung können wir nun den folgenden wichtigen Satz beweisen. Er wird uns zwar im Laufe dieses Werks direkt nicht mehr begegnen, hat aber viele Anwendungen in der Mathematik, insbesondere bei Kettenbedingungen.

2.1.9 Satz (Transpositionsprinzip von R. Dedekind) Ist $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein modularer Verband, so gilt für alle $a, b \in V$, daß die Abbildung

$$f_a : [b, a \sqcup b] \to [a \sqcap b, a] \qquad f_a(x) \ = \ x \sqcap a$$

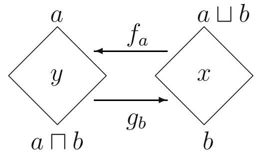
und die Abbildung

$$g_b : [a \sqcap b, a] \to [b, a \sqcup b] \qquad g_b(y) \ = \ y \sqcup b$$

invers zueinander sind und die Verbandsstruktur der durch die (nichtleeren) Intervalle induzierten Unterverbände erhalten. Sie sind also Verbandsisomorphismen zwischen diesen Unterverbänden.

Beweis: Der Beweis des Satzes besteht aus den beiden folgenden Teilbeweisen:

1. Wir zeigen zuerst die Tatsache, daß die beiden Abbildungen f_a und g_b zueinander invers (d.h. also bijektiv) sind. Diese Tatsache findet dann später bei den beiden Homomorphie-Beweisen Verwendung. In dem nachfolgenden Bild ist das Abbildungsverhalten der Abbildungen f_a und g_b auf Intervallen graphisch dargestellt:



Die Abbildungen f_a und g_b sind zueinander invers. Dazu nimmt man $x \in [b, a \sqcup b]$ und $y \in [a \sqcap b, a]$ beliebig und zeigt die erforderlichen Gleichungen wie folgt (beachte bei der Anwendung des dualen Modulgesetzes, daß $x \sqsupseteq b$ wegen $x \in [b, a \sqcup b]$):

$$\begin{aligned} g_b(f_a(x)) &= g_b(x \sqcap a) && \text{Definition } f_a \\ &= (x \sqcap a) \sqcup b && \text{Definition } g_b \\ &= x \sqcap (a \sqcup b) && \text{Modulgesetz, duale Form} \\ &= x && x \in [b, a \sqcup b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a(g_b(y)) &= f_a(y \sqcup b) && \text{Definition } g_b \\ &= (y \sqcup b) \sqcap a && \text{Definition } f_a \\ &= y \sqcup (b \sqcap a) && \text{Modulgesetz, } y \sqsubseteq a \\ &= y && y \in [a \sqcap b, a] \end{aligned}$$

2. Beweis der Homomorphie-Gleichungen. Im Fall der Operation $\sqcap$ bekommen wir für die Abbildung f_a die Gleichung

$$\begin{aligned} f_a(x \sqcap y) &= x \sqcap y \sqcap a && \text{Definition } f_a \\ &= (x \sqcap a) \sqcap (y \sqcap a) && \text{Idempotenz} \\ &= f_a(x) \sqcap f_a(y) && \text{Definition } f_a \end{aligned}$$

und analog zeigt man für g_b die geforderte Gleichung für die duale Operation durch

$$\begin{aligned} g_b(x \sqcup y) &= x \sqcup y \sqcup b && \text{Definition } g_b \\ &= (x \sqcup b) \sqcup (y \sqcup b) && \text{Idempotenz} \\ &= g_b(x) \sqcup g_b(y) && \text{Definition } g_b \end{aligned}$$

Die restlichen beiden Fälle folgen durch die Anwendung dieser Gleichungen mit (1), d.h. in Verbindung mit der Bijektivität: Wir haben für f_a, daß

$$\begin{aligned} f_a(x \sqcup y) &= f_a(g_b(u) \sqcup g_b(v)) && \text{mit } x = g_b(u), y = g_b(v) \\ &= f_a(g_b(u \sqcup v)) && \text{siehe oben} \\ &= u \sqcup v && \text{nach (1) (Bijektivität)} \\ &= f_a(x) \sqcup f_a(y) && \text{mit } u = f_a(x), v = f_a(y), \end{aligned}$$

und für g_b, daß

$$\begin{aligned} g_b(x \sqcap y) &= g_b(f_a(u) \sqcap f_a(v)) && \text{mit } x = f_a(u), y = f_a(v) \\ &= g_b(f_a(u \sqcap v)) && \text{siehe oben} \\ &= u \sqcap v && \text{nach (1) (Bijektivität)} \\ &= g_b(x) \sqcap g_b(y) && \text{mit } u = g_b(x), v = g_b(y). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Transpositionsprinzips erbracht. □

2.2 Distributive Verbände

Das Modulgesetz ist eine spezielle Eigenschaft, die für die „gängigen“ Operationen auf Zahlen usw. nicht zutrifft. Ein viel bekannteres Gesetz ist beispielsweise das Distributivgesetz, wie es in Ringen $(R, +, \cdot, 0, 1)$ vorkommt. Dort distributiert Multiplikation über Addition:

$$a \cdot (b + c) \;=\; a \cdot b + a \cdot c.$$

Dieses Gesetz zeichnet die Multiplikation gegenüber der Addition aus.

Bei Verbänden entfällt so eine Auszeichnung einer der beiden Operationen. Daß dies so sein muß, ergibt sich aus dem Dualitätsprinzip. Distributivität in Form von Ungleichungen gilt in Verbänden immer:

2.2.1 Satz In einem Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ gelten für alle Elemente $a, b, c \in V$ die folgenden distributiven Ungleichungen:

1. $a \sqcup (b \sqcap c) \;\sqsubseteq\; (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$
2. $a \sqcap (b \sqcup c) \;\sqsupseteq\; (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$.

Beweis: Man beachte, daß (2) aus (1) und dem Dualitätsprinzip folgt. Wir zeigen deshalb nur (1). Seien also $a, b, c \in V$ vorausgesetzt. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$a \sqcup (b \sqcap c) \;\sqsubseteq\; a \sqcup b \qquad\qquad a \sqcup (b \sqcap c) \;\sqsubseteq\; a \sqcup c$$

Daraus folgt, daß das Element $a \sqcup (b \sqcap c)$ eine untere Schranke der Menge $\{a \sqcup b, a \sqcup c\}$ ist. Nun bekommen wir die gewünschte Eigenschaft wie folgt:

$$a \sqcup (b \sqcap c) \;\sqsubseteq\; \bigsqcap\{a \sqcup b, a \sqcup c\} \;=\; (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) \qquad \Box$$

Wird eine der beiden Ungleichungen (1) und (2) von Satz 2.2.1 zu einer Gleichung, so gilt dies auch für die andere. Dies wird nachfolgend gezeigt.

2.2.2 Satz Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband. Dann sind die folgenden (implizit allquantifizierten) Distributivgesetze äquivalent:

1. $a \sqcup (b \sqcap c) \;=\; (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$
2. $a \sqcap (b \sqcup c) \;=\; (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$.

Beweis: Die Richtung „(1) $\Longrightarrow$ (2)“ folgt aus der Rechnung

$$\begin{array}{rcll}
a \sqcap (b \sqcup c) & = & (a \sqcap (a \sqcup c)) \sqcap (b \sqcup c) & \text{Absorption} \\
& = & a \sqcap (c \sqcup a) \sqcap (c \sqcup b) & \text{Kommutativität} \\
& = & a \sqcap (c \sqcup (a \sqcap b)) & \text{Gleichung (1)} \\
& = & ((a \sqcap b) \sqcup a) \sqcap (c \sqcup (a \sqcap b)) & \text{Absorption} \\
& = & ((a \sqcap b) \sqcup a) \sqcap ((a \sqcap b) \sqcup c) & \text{Kommutativität} \\
& = & (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) & \text{Gleichung (1)}
\end{array}$$

für alle $a, b, c \in V$ und die noch ausstehende Richtung „(2) $\Longrightarrow$ (1)“ folgt unmittelbar aus dem Dualitätsprinzip. □

Man beachte, daß im Beweis dieses Satzes die implizite Allquantifizierung der beiden Distributivgesetze wichtig war. Dies gilt sowohl für die gezeigte Rechnung, wo für die Elemente a, b und c von (1) Terme eingesetzt wurden, als auch für die Anwendung des Dualitätsprinzips. Verschärft man die distributiven Ungleichungen zu den Distributivgesetzen, so führt dies auch zu einer wichtigen Klasse von Verbänden.

2.2.3 Definition Ein Verband heißt *distributiv*, falls eines der Distributivgesetze aus Satz 2.2.2 gilt (und somit beide gelten). □

Die Distributivgesetze sind (allquantifizierte) Gleichungen und gehen durch Dualisierung ineinander über. Unmittelbare Folgerungen hiervon sind in dem folgenden Satz formuliert.

2.2.4 Satz

1. Jeder Unterverband, jeder Produktverband und jedes homomorphe Bild eines distributiven Verbands ist distributiv.
2. Das Dualitätsprinzip gilt auch für distributive Verbände.

Beweis: Wir argumentieren genau wie bei den modularen Verbänden: Distributive Verbände sind „gleichungsdefiniert“ (Satz von G. Birkhoff) und das Dualitätsprinzip gilt nach Satz 2.2.2, da das duale Axiom äquivalent zum Originalaxiom ist. □

Dies sind die Entsprechungen der Sätze 2.1.4 und 2.1.2 für modulare Verbände. Bei dieser Verbandsklasse hatten wir in Abschnitt 2.1 erst Beispiele angegeben, bevor wir genauer auf die Theorie eingingen. Hier wollen wir es genauso halten.

2.2.5 Beispiele (für distributive/nicht-distributive Verbände) Nachstehend geben wir einige Beispiele für distributive Verbände an und auch ein Beispiel für einen nicht-distributiven Verband.

1. Alle in den Beispielen 1.1.2 angegebenen Verbände $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$, $(2^X, \cup, \cap)$ und $(\mathbb{N}, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT})$ sind distributiv. Beim Teilbarkeitsverband $(\mathbb{N}, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT})$ ist der Nachweis der Distributivgesetze jedoch sehr mühselig.
2. Es sei $(M, \sqsubseteq)$ eine Totalordnung und $(M, \sqcup, \sqcap)$ der induzierte Verband. Dann ist $(M, \sqcup, \sqcap)$ distributiv und wir haben:

$$a \sqcup b \;=\; \max(a,b) \;=\; \begin{cases} a & \text{falls } b \sqsubseteq a \\ b & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{„das größere der Elemente“}$$

$$a \sqcap b \;=\; \min(a,b) \;=\; \begin{cases} a & \text{falls } a \sqsubseteq b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{„das kleinere der Elemente“}$$

3. Ein Beispiel für einen nicht-distributiven Verband ist $(V_{\neg D}, \sqcup, \sqcap)$, wobei das Ordnungsdiagramm für $V_{\neg D}$ wie folgt aussieht:

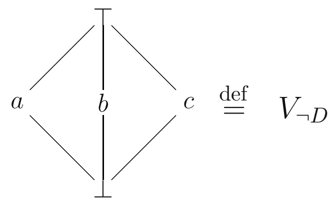


Abbildung 2.2: Beispiel für einen nicht-distributiven Verband

Die Elemente, die das Distributivgesetz (1), und damit auch (2), nicht erfüllen, sind $a, b, c \in V_{\neg D}$, wie die folgende einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{rcll} a \sqcup (b \sqcap c) & = & a \sqcup \bot & \text{siehe Bild} \\ & = & a & \bot \text{ kleinstes Element} \\ & \neq & \top & \text{siehe Bild} \\ & = & \top \sqcap \top & \text{Idempotenz} \\ & = & (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) & \text{siehe Bild} \end{array} \qquad \square$$

Die distributiven Verbände bilden eine (wie wir sogar zeigen werden echte) Teilklasse der Klasse der modularen Verbände, d.h. aus den Distributivgesetzen folgt das Modulgesetz. Wie dies geht, wird nachfolgend gezeigt.

2.2.6 Satz Ist ein Verband distributiv, so ist er auch modular.

Beweis: Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein distributiver Verband. Wir haben das Modulgesetz zu zeigen. Seien also $a, b, c \in V$ mit $a \sqsubseteq c$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} a \sqcup (b \sqcap c) & = & (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) & \text{Distributivgesetz} \\ & = & (a \sqcup b) \sqcap c & \text{da } a \sqsubseteq c, \end{array}$$

was den Beweis des Satzes beendet. $\square$

Die Umkehrung von Satz 2.2.6 gilt nicht. Somit sind die distributiven Verbände, wie schon vor Satz 2.2.6 angegeben wurde, eine echte Teilklasse der Klasse der modularen Verbände. Zum Beweis dieser Eigenschaft betrachten wir die sogenannte *Klein'sche Vierergruppe* V_4 mit $V_4 = \{e, a, b, c\}$ und den folgenden Gruppentafeln für die Gruppenoperation und die Inversenbildung[4]:

[4] Ein in klassischer Algebra geübter Leser wird sicherlich erkennen, daß die Klein'sche Vierergruppe isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist. Sie ist, neben der $\mathbb{Z}_4$, bis auf Isomorphie die einzige Gruppe mit 4 Elementen.

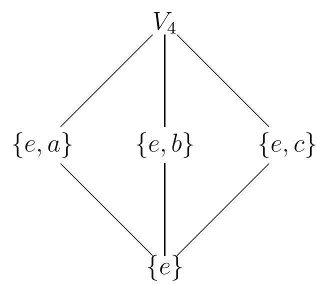
·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

-1	
e	e
a	a
b	b
c	c

Nach Beispiel 2.1.5.1 bildet die Menge $\mathcal{N}(V_4)$ der Normalteiler der Gruppe V_4 einen modularen Verband, mit der Durchschnittsbildung als Infimumsoperation und somit der Mengeninklusion als Ordnung. Die Normalteilermenge der V_4 besteht, wie man leicht sieht, aus genau fünf Mengen:

$$\mathcal{N}(V_4) \;=\; \{\{e\}, \{e,a\}, \{e,b\}, \{e,c\}, V_4\}$$

Für die Ordnungsrelation auf $\mathcal{N}(V_4)$, welche ja die Mengeninklusion ist, bekommen wir also sofort das nachfolgend angegebene Ordnungsdiagramm. Dies ist genau (formal: bis auf Isomorphie) das Ordnungsdiagramm des Verbands $V_{\neg D}$ aus dem Beispiel 2.2.5.3. Somit haben wir die Isomorphie-Beziehung $V_{\neg D} \cong \mathcal{N}(V_4)$, und damit ist der modulare Normalteilerverband der Klein'schen Vierergruppe nicht distributiv.



Man kann natürlich, durch Überprüfung aller möglichen Fälle, auch direkt zeigen, daß der Verband $V_{\neg D}$ modular ist.

Wie im Fall der modularen Verbände durch $V_{\neg M}$ ist im Fall der distributiven Verbände durch $V_{\neg D}$ genau die Nicht-Distributivität charakterisiert, wenn man Modularität annimmt. Wir formulieren diesen Sachverhalt nachfolgend als Satz. Auf einen Beweis des Satzes verzichten wir jedoch, da er sehr ähnlich zum Beweis von Satz 2.1.6 ist und wir dort schon im Detail demonstriert haben, wie man solche Charakterisierungssätze beweist.

2.2.7 Satz (Charakterisierung distributiver Verbände) Ein modularer Verband ist genau dann nicht distributiv, wenn er einen zum in Abbildung 2.2 angegebenen 5-elementigen Verband $V_{\neg D}$ isomorphen Unterverband enthält. $\square$

In der Literatur wird der spezielle Verband $V_{\neg D}$ auch als Diamant-Verband M_3 bezeichnet. Dabei spricht man allgemein von einem Diamant-Verband M_k, wenn eine Menge aus k Elementen dadurch zu einem Verband wird, daß man zwei Elemente $\top$ und $\bot$ so hinzufügt, daß $\top$ das größte Element ist, $\bot$ das kleinste Element ist, und alle restlichen Elemente paarweise unvergleichbar sind.

Insgesamt haben wir nach den vorangegangenen Resultaten das folgende Bild, welches die Hierarchie der bisher untersuchten Verbandsklassen graphisch darstellt. In dem Bild sind auch jeweils Vertreter aus den entsprechenden Klassen angegeben. Dadurch soll insbesondere auch die Echtheit der Klasseninklusionen angezeigt werden.

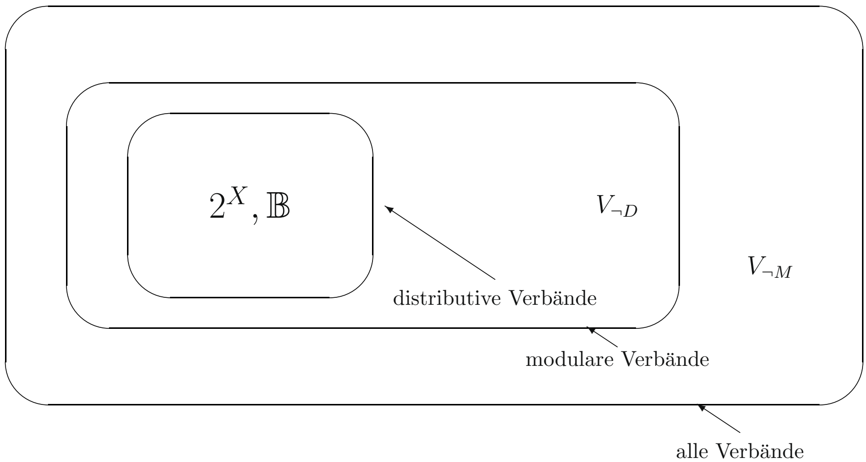


Abbildung 2.3: Hierarchie von Verbandsklassen

Bei den modularen Verbänden hatten wir in Satz 2.1.7 ein Kriterium formuliert, um eine Gleichheit $a = b$ testen zu können. Im distributiven Fall kann man auf die dritte Bedingung $a \sqsubseteq b$ von Satz 2.1.7 verzichten. Es gilt also:

2.2.8 Satz Ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ ist genau dann distributiv, wenn für alle $a, b, c \in V$ die nachfolgende Implikation gilt:

$$a \sqcap c = b \sqcap c, a \sqcup c = b \sqcup c \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Es seien Elemente $a, b, c \in V$ mit $a \sqcap c = b \sqcap c$ und $a \sqcup c = b \sqcup c$ gegeben. Dann zeigen wir $a = b$ wie folgt:

$$\begin{array}{rcll}
a & = & a \sqcup (a \sqcap c) & \text{Absorption} \\
& = & a \sqcup (b \sqcap c) & \text{Voraussetzung} \\
& = & (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & (a \sqcup b) \sqcap (b \sqcup c) & \text{Voraussetzung} \\
& = & (b \sqcup a) \sqcap (b \sqcup c) & \\
& = & b \sqcup (a \sqcap c) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & b \sqcup (b \sqcap c) & \text{Voraussetzung} \\
& = & b & \text{Absorption}
\end{array}$$

„$\Longleftarrow$“: Angenommen, V sei nicht-distributiv. Ist V modular, so ist der nach Satz 2.2.7 existierende Unterverband ein Widerspruch zur vorausgesetzten Implikation. Andernfalls führt der nach Satz 2.1.6 existierende Unterverband zu einem Widerspruch. $\square$

Zum Schluß dieses Abschnitts formulieren wir noch eine Aussage über Atome in distributiven Verbänden, die wir im nächsten Abschnitt benötigen.

2.2.9 Satz Es seien $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein distributiver Verband mit kleinstem Element O und $a \in \mathsf{At}(V)$ ein Atom. Dann gilt für alle $b_1, \ldots, b_n \in V$:

$$a \sqsubseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i \quad \Longrightarrow \quad \exists\, j \in \{1, \ldots, n\} : a \sqsubseteq b_j$$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis, wobei wir am Anfang den Indexbereich von j unterdrücken. Zuerst haben wir die nachstehende Implikation:

$$\begin{array}{rcll} \forall\, j : a \not\sqsubseteq b_j & \Longleftrightarrow & \forall\, j : a \sqcap b_j \neq a & \text{Definition von } \sqsubseteq \\ & \Longrightarrow & \forall\, j : a \sqcap b_j = \mathsf{O} & a \in \mathsf{At}(V), a \sqcap b_j \sqsubseteq a \end{array}$$

Aus der letzten Formel folgt mit Hilfe der endlichen Distributivgesetze (welche durch vollständige Induktion trivial beweisbar sind), daß

$$\begin{array}{rcll} a \sqcap \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i & = & \bigsqcup_{i=1}^{n} (a \sqcap b_i) & \text{Distributivgesetz} \\ & = & \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathsf{O} & \text{siehe oben} \\ & = & \mathsf{O}. & \end{array}$$

Wir haben aber auch die Beziehung

$$a \sqcap \bigsqcup_{i=1}^{n} b_i \quad = \quad a \qquad \text{wegen der Voraussetzung,}$$

also insgesamt die Gleichung $a = \mathsf{O}$. Diese Gleichung ist aber ein Widerspruch zur Eigenschaft $a \in \mathsf{At}(V)$. $\square$

2.3 Komplemente und Boolesche Verbände

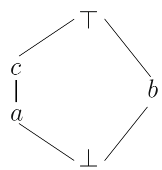
Die Booleschen Verbände, die in der Literatur auch *Boolesche Algebren* genannt werden, sind nach den modularen und distributiven Verbänden die dritte bedeutende Klasse, welche wir betrachten. Sie sind spezielle distributive Verbände, für die man die Existenz einer zusätzlichen Operation postuliert. Ihr Studium führt uns zurück zu den logischen Ausgangspunkten der Verbandstheorie im 19. Jahrhundert, wie wir sie schon in der Einleitung erwähnten. Um die Verbindung von den Verbänden zur Aussagenlogik herzustellen, wird genau die oben erwähnte zusätzliche Operation benötigt. Diese entspricht der *Negation* und wird auch so, oder *Komplement*, genannt.

2.3.1 Definition Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband mit dem kleinsten Element $\mathsf{O} \in V$ und dem größten Element $\mathsf{L} \in V$.

1. Zu $a \in V$ heißt $b \in V$ ein *Komplement*, falls $a \sqcup b = \mathsf{L}$ und $a \sqcap b = \mathsf{O}$.

2. Besitzt in V jedes Element ein Komplement, so heißt V *komplementär*. □

Komplemente müssen nicht immer existieren. In der Regel sind Komplemente nicht eindeutig, auch wenn sie existieren. Ein Beispiel für nicht-eindeutige Komplemente ist der nicht-modulare Verband $V_{\neg M}$ von Beispiel 2.1.5.3. Man beachte dazu die nachfolgend angegebene rechte Tabelle:



Elemente	Komplemente
$\top$	$\perp$
a	b
b	a, c
c	b
$\perp$	$\top$

Für distributive Verbände wird die Komplementbildung jedoch eindeutig, d.h. zu einer partiellen Abbildung. Dies wird im folgenden Satz gezeigt. In diesem Satz bezeichnet wiederum $\mathsf{O} \in V$ das *kleinste Element* von V und $\mathsf{L} \in V$ das *größte Element* von V. Diese Bezeichnungen werden *im restlichen Text immer* verwendet, sofern keine speziellen Symbole (wie etwa $\perp$ und $\top$ im Fall von $V_{\neg M}$ oder $V_{\neg D}$) explizit eingeführt werden.

2.3.2 Satz Es seien $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein distributiver Verband und $a, b_1, b_2 \in V$, so daß b_1 und auch b_2 Komplemente von a sind. Dann gilt $b_1 = b_2$.

Beweis: Wir starten mit den folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{lllllr} b_1 \sqcup a & = & \mathsf{L} & = & b_2 \sqcup a & \qquad b_1, b_2 \text{ Komplemente} \\ b_1 \sqcap a & = & \mathsf{O} & = & b_2 \sqcap a & \qquad b_1, b_2 \text{ Komplemente} \end{array}$$

Also gelten die beiden Gleichungen $b_1 \sqcup a = b_2 \sqcup a$ und $b_1 \sqcap a = b_2 \sqcap a$. Satz 2.2.8 liefert uns dann sofort die gewünschte Eigenschaft $b_1 = b_2$. □

Hat man also einen komplementären, distributiven Verband, so ist die Komplementbildung eine Abbildung. Diese spezielle Situation definiert eine neue Verbandsklasse.

2.3.3 Definition Ein *Boolescher Verband* (auch: eine *Boolesche Algebra*) ist ein komplementärer, distributiver Verband mit $\mathsf{O} \neq \mathsf{L}$. Dabei bezeichnet $\overline{a}$ das (eindeutig existierende) Komplement (oder die *Negation*) von a. □

Ein Boolescher Verband stellt also genaugenommen eine spezielle algebraische Struktur der Form $(V, \sqcup, \sqcap, \overline{}, \mathsf{L}, \mathsf{O})$ dar, mit zwei zweistelligen Operationen $\sqcup$ und $\sqcap$, einer einstelligen Operation $\overline{}$, und zwei Konstanten L und O, so daß $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband ist, für alle $a \in V$ die Gleichungen $a \sqcup \overline{a} = \mathsf{L}$, $a \sqcap \overline{a} = \mathsf{O}$, $\mathsf{O} \sqcap a = \mathsf{O}$, $a \sqcap \mathsf{L} = a$ gelten und $\mathsf{O} \neq \mathsf{L}$ zutrifft. Wegen der letzten Forderung liegt keine Varietät vor und damit ist der Satz von G. Birkhoff nicht anwendbar. Es sollte an dieser Stelle erwähnt werden, daß es Autoren gibt, die auf die Forderung $\mathsf{O} \neq \mathsf{L}$ verzichten. Normalerweise wird sie aber dazugenommen, um den trivialen Fall auszuschließen.

2.3.4 Beispiele (für Boolesche Verbände) Nachfolgend sind zwei Beispiele für Boolesche Verbände angegeben.

1. Die Verbände von Beispiel 1.1.2.1 und 1.1.2.2 sind Boolesche Verbände, mit

$$\overline{tt} = \mathit{ff} \qquad\qquad \overline{\mathit{ff}} = tt$$

   im Falle der Wahrheitswerte $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$ und

$$\overline{Y} = X \setminus Y = \complement_X Y$$

   im Falle des Potenzmengenverbands $(2^X, \cup, \cap)$, wobei nun X nicht leer sein darf.

2. Sind V und W Boolesche Verbände, so ist auch der Abbildungsverband W^V ein Boolescher Verband, wenn man das Komplement einer Abbildung wie folgt definiert:

$$\overline{f} : V \to W \qquad\qquad \overline{f}(a) = \overline{f(a)}$$

   Kleinstes Element im Booleschen Abbildungsverband ist die Abbildung, die alles nach O abbildet, und größtes Element im Booleschen Abbildungsverband ist die Abbildung, die alles nach L abbildet.

   Ist der Urbildbereich ein n-stelliger Produktverband des Verbands der Wahrheitswerte und der Bildbereich der Wahrheitswerte-Verband, so nennt man eine solche Abbildung eine n-stellige Schaltabbildung. Diese sind z.B. in der Rechnerarchitektur von besonderer Bedeutung. Wir gehen in Abschnitt 6.1 etwas genauer darauf ein. □

Weil Boolesche Verbände einen reicheren Vorrat an Operationen und Konstanten haben, betrachtet man, neben den bisherigen Unterverbänden, noch solche Unterstrukturen, die auch bezüglich der zusätzlichen Operation abgeschlossen sind. Die Konstanten braucht man nicht zu betrachten, wie wir später noch zeigen werden.

2.3.5 Definition Ist ein Unterverband U eines Booleschen Verbands V auch abgeschlossen bezüglich der Operation $\overline{}$ von V, so heißt er ein *Boolescher Unterverband* oder eine *Boolesche Unteralgebra* von V. □

Man beachte, daß die Elemente O und L eines Booleschen Verbands V in jedem Booleschen Unterverband U von V enthalten sind, da mit $a \in U$ auch $\overline{a} \in U$ zutrifft und somit auch $\mathsf{O} = a \sqcap \overline{a} \in U$ und $\mathsf{L} = a \sqcup \overline{a} \in U$.

Im Fall von Booleschen Verbänden muß man also zwischen einem Unterverband im ursprünglichem Sinne (der nicht auf das Komplement Bezug nimmt) und einem Booleschen Unterverband genau unterscheiden. Ein Boolescher Unterverband eines Booleschen Verbands ist natürlich auch ein Unterverband im ursprünglichen Sinn. Die Umkehrung gilt hingegen nicht. Beispielsweise ist in einem Potenzmengenverband jede einelementige Teilmenge ein Unterverband, der jedoch kein Boolescher Unterverband ist.

Auch Homomorphismen (und, analog dazu, Isomorphismen) werden im Fall von Booleschen Verbänden auf die Komplementoperation erweitert.

2.3.6 Definition Ein Verbandshomomorphismus $f : V \to W$ heißt im Fall von Booleschen Verbänden V und W ein *Boolescher Verbandshomomorphismus* oder *Boolescher Algebrenhomomorphismus*, falls $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$ für alle $a \in V$ gilt. Bijektive Boolesche Verbandshomomorphismen heißen *Boolesche Verbandsisomorphismen* oder *Boolesche Algebrenisomorphismen.* □

Wiederum ist natürlich ein jeder Boolescher Verbandshomomorphismus $f : V \to W$ zwischen Booleschen Verbänden V und W ein Verbandshomomorhismus im ursprünglichen Sinne und die Umkehrung gilt wiederum nicht. Hier sind konstantwertige Funktionen Gegenbeispiele. Sie sind offensichtlich Verbandshomomorphismen aber im allgemeinen keine Booleschen Verbandshomomorphismen, wie wir gleich zeigen werden.

Boolesche Verbandshomomorphismus $f : V \to W$ bilden kleinste auf kleinste und größte auf größte Elemete ab; man braucht diese Eigenschaft also nicht zu postulieren, wie es eigentlich nach dem Vorgehen der universellen Algebra erforderlich wäre. Hier ist der Beweis für den ersten Fall:

$$f(\mathsf{O}) \;=\; f(\mathsf{O} \sqcap \overline{\mathsf{O}}) \;=\; f(\mathsf{O}) \sqcap f(\overline{\mathsf{O}}) \;=\; f(\mathsf{O}) \sqcap \overline{f(\mathsf{O})} \;=\; \mathsf{O}$$

Analog zeigt man die Gleichung $f(\mathsf{L}) = \mathsf{L}$:

$$f(\mathsf{L}) \;=\; f(\mathsf{L} \sqcup \overline{\mathsf{L}}) \;=\; f(\mathsf{L}) \sqcup f(\overline{\mathsf{L}}) \;=\; f(\mathsf{L}) \sqcup \overline{f(\mathsf{L})} \;=\; \mathsf{L}$$

Der folgende Satz zeigt, daß die eben bewiesenen Gleichungen sogar charakteristisch für Boolesche Verbandshomomorphismen sind.

2.3.7 Satz Gegeben sei ein Verbandshomomorphismus $f : V \to W$ zwischen Booleschen Verbänden V und W. Dann gilt:

$$f \text{ Boolescher Verbandshomomorphismus} \iff f(\mathsf{O}) = \mathsf{O} \text{ und } f(\mathsf{L}) = \mathsf{L}$$

Beweis: Wir haben nur die Richtung „$\Longleftarrow$“ zu beweisen. Dazu sei $a \in V$ beliebig vorgegeben. Dann gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned} f(a) \sqcup f(\overline{a}) &= f(a \sqcup \overline{a}) && f \text{ Verbandshomomorphismus} \\ &= f(\mathsf{L}) \\ &= \mathsf{L} && \text{Voraussetzung} \end{aligned}$$

und auch die Gleichheit

$$\begin{aligned} f(a) \sqcap f(\overline{a}) &= f(a \sqcup \overline{a}) && f \text{ Verbandshomomorphismus} \\ &= f(\mathsf{O}) \\ &= \mathsf{O} && \text{Voraussetzung.} \end{aligned}$$

Nach Definition heißt dies aber, daß $f(\overline{a})$ das Komplement von $f(a)$ ist. Als Gleichung ist dies genau das, was wir wollen: $\overline{f(a)} = f(\overline{a})$. Die beiden anderen Eigenschaften gelten, weil f als Verbandshomomorphismus vorausgesetzt ist. $\square$

Will man Quotienten von Booleschen Verbänden bilden, so ist schließlich noch der Begriff einer Verbandskongruenz zum Begriff einer *Booleschen Verbandskongruenz* zu erweitern und dann die Komplementbildung von Äquivalenzklassen entsprechend festzulegen. Dies sei dem Leser als Übung überlassen.

Wir kommen nach diesen Bemerkungen zu Unterstrukturen, Homomorphismen und Kongruenzen nun zu einer der Hauptanwendungen für Boolesche Verbände. Durch die Booleschen Verbände stellt man nämlich die Verbindung zur Aussagenlogik her. Die Entsprechung ist in der nachfolgenden Tabelle angegeben:

Boolesche Verbände	Aussagenlogik
Trägermenge	Aussagenformen
$\sqcup$	$\vee$
$\sqcap$	$\wedge$
$\overline{}$	$\neg$
$\sqsubseteq$	$\Longrightarrow$
$=$	$\Longleftrightarrow$

Auch die Regeln der Aussagenlogik übertragen sich in die Verbandstheorie. Nachfolgend geben wir wichtige aussagenlogische Regeln als verbandstheoretische Gesetze an.

2.3.8 Satz In einem Booleschen Verband gelten die folgenden Gesetze:

1. $\overline{\overline{a}} = a$ *Involution*
2. $\overline{a \sqcup b} = \overline{a} \sqcap \overline{b}$ und $\overline{a \sqcap b} = \overline{a} \sqcup \overline{b}$ *de Morgan*
3. $a \sqsubseteq b \iff \overline{a} \sqcup b = \mathsf{L} \iff a \sqcap \overline{b} = \mathsf{O}$
4. $a \sqsubseteq b \sqcup c \iff a \sqcap \overline{b} \sqsubseteq c \iff \overline{b} \sqsubseteq \overline{a} \sqcup c$

Beweis: Es sei also $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Boolescher Verband.

1. Es sei $a \in V$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} \overline{a} \text{ Komplement von } a & \iff & \overline{a} \sqcup a = \mathsf{L} \text{ und } \overline{a} \sqcap a = \mathsf{O} & \text{Definition} \\ & \iff & a \text{ Komplement von } \overline{a} & \text{Definition} \\ & \iff & \overline{\overline{a}} = a & \text{Definition} \end{array}$$

   Da die erste Aussage dieser Kette nach Definition der Komplementoperation wahr ist, gilt dies auch für das letzte Glied. Dieses ist aber genau die gewünschte Gleichung.

2. Seien $a, b \in V$. Dann gelten die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll}
(a \sqcup b) \sqcup (\overline{a} \sqcap \overline{b}) & = & (a \sqcup b \sqcup \overline{a}) \sqcap (a \sqcup b \sqcup \overline{b}) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & \mathsf{L} \sqcap \mathsf{L} & \\
& = & \mathsf{L} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
(a \sqcup b) \sqcap (\overline{a} \sqcap \overline{b}) & = & (\overline{a} \sqcap \overline{b}) \sqcap (a \sqcup b) & \text{Kommutativges.} \\
& = & (\overline{a} \sqcap \overline{b} \sqcap a) \sqcup (\overline{a} \sqcap \overline{b} \sqcap b) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & \mathsf{O} \sqcup \mathsf{O} & \\
& = & \mathsf{O} &
\end{array}$$

Damit haben wir, daß $\overline{a} \sqcap \overline{b}$ das Komplement von $a \sqcup b$ ist, d.h. es gilt

$$\overline{a} \sqcap \overline{b} = \overline{a \sqcup b}\,.$$

Die zweite de Morgan'sche Gleichung erhalten wir aus den folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll}
(a \sqcap b) \sqcup (\overline{a} \sqcup \overline{b}) & = & (\overline{a} \sqcup \overline{b}) \sqcup (a \sqcap b) & \text{Kommutativges.} \\
& = & (\overline{a} \sqcup \overline{b} \sqcup a) \sqcap (\overline{a} \sqcup \overline{b} \sqcup b) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & \mathsf{L} \sqcap \mathsf{L} & \\
& = & \mathsf{L} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
(a \sqcap b) \sqcap (\overline{a} \sqcup \overline{b}) & = & (a \sqcap b \sqcap \overline{a}) \sqcup (a \sqcap b \sqcap \overline{b}) & \text{Distributivgesetz} \\
& = & \mathsf{O} \sqcup \mathsf{O} & \\
& = & \mathsf{O} &
\end{array}$$

3. Seien $a, b \in V$. Wir zeigen zuerst die linke Äquivalenz: Die Richtung „$\Longrightarrow$" folgt aus der Rechnung

$$\begin{array}{rcll}
a \sqsubseteq b & \Longrightarrow & \overline{a} \sqcup a \sqsubseteq \overline{a} \sqcup b & \text{Monotonie} \\
& \Longleftrightarrow & \mathsf{L} \sqsubseteq \overline{a} \sqcup b &
\end{array}$$

und die verbleibende Richtung „$\Longleftarrow$" beweist man durch

$$\begin{array}{rcll}
\overline{a} \sqcup b = \mathsf{L} & \Longrightarrow & a = a \sqcap \mathsf{L} & \\
& & \quad = a \sqcap (\overline{a} \sqcup b) & \\
& & \quad = (a \sqcap \overline{a}) \sqcup (a \sqcap b) & \\
& & \quad = a \sqcap b & \\
& \Longleftrightarrow & a \sqsubseteq b & \text{Definition Ordnung.}
\end{array}$$

Ein Beweis der rechten Äquivalenz verläuft wie folgt:

$$\begin{array}{rcll}
\overline{a} \sqcup b = \mathsf{L} & \Longleftrightarrow & \overline{\overline{a} \sqcup b} = \overline{\mathsf{L}} & \\
& \Longleftrightarrow & \overline{\overline{a}} \sqcap \overline{b} = \mathsf{O} & \text{nach (2)} \\
& \Longleftrightarrow & a \sqcap \overline{b} = \mathsf{O} & \text{nach (1)}
\end{array}$$

4. Dieser Beweis kann vollkommen analog zum Beweis von (3) erbracht werden. □

Für Ordnungen folgt aus der ersten und dritten Eigenschaft von Satz 2.3.8: $a \sqsubseteq b$ impliziert $\overline{b} \sqsubseteq \overline{a}$. Die Komplementabbildung $\overline{} : V \to V$ ist somit ein involutorischer Ordnungsisomorphismus von $(V, \sqsubseteq)$ nach $(V, \sqsupseteq)$, auch *dualer Isomorphismus* genannt. Dabei ist $\sqsupseteq$ die zu $\sqsubseteq$ konverse Ordnung, d.h. $a \sqsupseteq b$ ist äquivalent zu $b \sqsubseteq a$.

Endliche Boolesche Verbände können nicht von beliebiger Kardinalität sein, sondern haben immer eine Zweierpotenz als Kardinalität. Dies ist der Inhalt des nachfolgenden Hauptsatzes über endliche Boolesche Verbände, der aber noch mehr zeigt, nämlich, daß jeder endliche Boolesche Verband isomorph zu einem speziellen Potenzmengenverband ist.

2.3.9 Satz (Hauptsatz über endliche Boolesche Verbände) Es sei $(V, \sqcup, \sqcap, \overline{})$ ein endlicher Boolescher Verband. Dann ist die Abbildung

$$f : V \to 2^{\mathsf{At}(V)} \qquad\qquad f(x) \;=\; \{a \in \mathsf{At}(V) \mid a \sqsubseteq x\}$$

ein Boolescher Verbandsisomorphismus von $(V, \sqcup, \sqcap, \overline{})$ nach $(2^{\mathsf{At}(V)}, \cup, \cap, \overline{})$. Insbesondere gilt also die Kardinalitätsaussage $|V| = 2^{|\mathsf{At}(V)|}$.

Beweis: Da $2 \leq |V| < \infty$ gilt, ist nach Satz 1.5.3 $f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in V$ mit $x \neq \mathsf{O}$. Wir zeigen nun der Reihe nach die behaupteten Eigenschaften.

1. Die Abbildung f ist *injektiv*, d.h. es gilt für alle $x, y \in V$ die Implikation

   $$x \neq y \quad\Longrightarrow\quad f(x) \neq f(y).$$

   Beweis: Es sei also $x \neq y$. Dann gilt $x \not\sqsubseteq y$ oder $y \not\sqsubseteq x$, denn $x \sqsubseteq y$ und $y \sqsubseteq x$ würde $x = y$ implizieren.

   Es sei o.B.d.A. $x \not\sqsubseteq y$. Dann gilt $x \sqcap \overline{y} \neq \mathsf{O}$, da aus $x \sqcap \overline{y} = \mathsf{O}$ nach Satz 2.3.8.4 $x \sqsubseteq y$ folgen würde.

   Nach Satz 1.5.3 ist V atomar. Folglich gibt es $a \in \mathsf{At}(V)$ mit $a \sqsubseteq x \sqcap \overline{y}$. Wir haben somit insbesondere $a \sqsubseteq x$, und dies impliziert $a \in f(x)$. Aus $a \sqsubseteq x \sqcap \overline{y}$ folgt aber auch $a \sqsubseteq \overline{y}$. Diese Ungleichung zeigt nun $a \not\sqsubseteq y$. Wäre nämlich $a \sqsubseteq y$, so würde dies $a \sqsubseteq \overline{y} \sqcap y = \mathsf{O}$ implizieren, und somit ein Widerspruch zu der Annahme, daß a ein Atom ist. Wegen $a \not\sqsubseteq y$ gilt nun $a \notin f(y)$. Konsequenterweise sind die beiden Mengen $f(x)$ und $f(y)$ verschieden.

2. Die Abbildung f ist *surjektiv*. Die Gleichung $f(\mathsf{O}) = \emptyset$ ist klar. Es sei also $A \in 2^{\mathsf{At}(V)}$ nicht leer mit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Es gilt

   $$f\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i\Big) \;=\; \{a_1, \ldots, a_n\}.$$

   Beweis der Inklusion „$\subseteq$“: Es sei $b \in f(\bigsqcup_{i=1}^{n} a_i)$, also $b \in \mathsf{At}(V)$ und $b \sqsubseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i$. Nach Satz 2.2.9 gibt es ein $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$, mit $b \sqsubseteq a_{i_0}$. Wegen $b \in \mathsf{At}(V)$ und $a_{i_0} \in \mathsf{At}(V)$ gilt nun $b = a_{i_0}$, also auch $b \in \{a_1, \ldots, a_n\}$.

   Inklusion „$\supseteq$“: Es sei $a_{i_0} \in \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann gilt $a_{i_0} \in \mathsf{At}(V)$. Es bleibt noch die Abschätzung $a_{i_0} \sqsubseteq \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i$ zu verifizieren, welche aber offensichtlich gilt.

3. *Strukturerhaltung der Negation*, d.h. für alle $x \in V$ gilt

$$f(\overline{x}) \;=\; \overline{f(x)}\,.$$

Zum Beweis sei $b \in \mathsf{At}(V)$ beliebig angenommen. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} b \in f(\overline{x}) & \Longleftrightarrow & b \sqsubseteq \overline{x} & \text{Definition von } f \\ & \Longleftrightarrow & b \not\sqsubseteq x & (*) \\ & \Longleftrightarrow & b \notin f(x) & \text{Definition von } f \\ & \Longleftrightarrow & b \in \overline{f(x)} & \text{Mengentheorie} \end{array}$$

Es bleibt noch der Übergang $(*)$ zu verifizieren, d.h. die Äquivalenz von $b \sqsubseteq \overline{x}$ und $b \not\sqsubseteq x$. Wir spalten den Beweis in zwei Richtungen auf.

„$\Longrightarrow$“: Wäre $b \sqsubseteq x$, so folgt daraus sofort die Abschätzung $b \sqsubseteq \overline{x} \sqcap x = \mathsf{O}$, was ein Widerspruch zur Eigenschaft $b \in \mathsf{At}(V)$ ist.

„$\Longleftarrow$“: Es gilt offensichtlich $b \sqsubseteq \overline{x} \sqcup x$. Nach Satz 2.2.9 in Kombination mit der Annahme $b \not\sqsubseteq x$ folgt daraus $b \sqsubseteq \overline{x}$.

4. *Strukturerhaltung des Infimums*, d.h. für alle $x, y \in V$ gilt

$$f(x \sqcap y) \;=\; f(x) \cap f(y).$$

Zum Beweis sei wiederum $b \in \mathsf{At}(V)$ beliebig angenommen. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} b \in f(x \sqcap y) & \Longleftrightarrow & b \sqsubseteq x \sqcap y & \text{Definition von } f \\ & \Longleftrightarrow & b \sqsubseteq x \wedge b \sqsubseteq y & (*) \\ & \Longleftrightarrow & b \in f(x) \wedge b \in f(y) & \text{Definition von } f \\ & \Longleftrightarrow & b \in f(x) \cap f(y) & \text{Mengentheorie} \end{array}$$

Es verbleibt wiederum die Aufgabe, den Übergang $(*)$ zu verifizieren, d.h. zu zeigen, daß $b \sqsubseteq x \sqcap y$ und $b \sqsubseteq x \wedge b \sqsubseteq y$ äquivalent sind. Analog zu oben betrachten wir zwei Richtungen:

„$\Longrightarrow$“: Es gelten die Abschätzungen $b \sqsubseteq x \sqcap y \sqsubseteq x$ und $b \sqsubseteq x \sqcap y \sqsubseteq y$ im Fall von $b \sqsubseteq x \sqcap y$.

„$\Longleftarrow$“: Diese Richtung verifiziert man wie folgt:

$$\begin{array}{rcll} b \sqsubseteq x \wedge b \sqsubseteq y & \Longleftrightarrow & b \in \mathsf{Mi}\big(\{x, y\}\big) & \text{Definition Minorante} \\ & \Longrightarrow & b \sqsubseteq \bigsqcap\{x, y\} = x \sqcap y & \text{Infimumseigenschaft} \end{array}$$

5. *Strukturerhaltung des Supremums*, d.h. für alle $x, y \in V$ gilt

$$f(x \sqcup y) \;=\; f(x) \cup f(y).$$

Der Beweis folgt aus der nachstehenden Gleichheit:

$$
\begin{aligned}
f(x \sqcup y) &= f(\overline{\overline{x} \sqcap \overline{y}}) && \text{de Morgan, Involution} \\
&= \overline{f(\overline{x} \sqcap \overline{y})} && \text{nach (3)} \\
&= \overline{f(\overline{x}) \cap f(\overline{y})} && \text{nach (4)} \\
&= \overline{f(\overline{x})} \cup \overline{f(\overline{y})} && \text{Mengentheorie} \\
&= f(x) \cup f(y) && \text{nach (3) und Involution}
\end{aligned}
$$

Durch diese Reihe von Beweisen ist schließlich der gesamte Beweis des Hauptsatzes für endliche Boolesche Verbände erbracht. □

Statt die Strukturerhaltung der Negation kann man in dem eben erbrachten Beweis auch die des Supremums analog zu der des Infimums „direkt“ beweisen. Aus der so gezeigten Verbandsisomorphie und den offensichtlichen Gleichungen $f(\mathsf{O}) = \emptyset$ und $f(\mathsf{L}) = \mathsf{At}(V)$ folgt dann die Strukturerhaltung der Negation mit Hilfe von Satz 2.3.7.

Die Struktur eines endlichen Booleschen Verbands ist also nach diesem Hauptsatz immer im Prinzip eine Potenzmengenstruktur mit Vereinigung, Durchschnitt und Komplement als Operationen, der vollen und der leeren Menge als extremen Elementen, der Inklusion als Ordnung und einer Zweierpotenz als Mächtigkeit. Eine abgeschwächte Aussage gilt (natürlich ohne die Kardinalitätsgleichung) auch für beliebige atomare Boolesche Verbände, denn eine sorgfältige Analyse des Beweises des Hauptsatzes zeigt, daß eigentlich nur die Atomizität verwendet wurde: Jeder atomare Boolesche Verband ist isomorph zu einem Unterverband von $(2^{\mathsf{At}(V)}, \cup, \cap)$. Die Abgeschlossenheit von $\{f(x) \,|\, x \in V\}$ bezüglich Durchschnitt ist trivial, die bezüglich Vereinigung folgt aus Satz 2.2.9.

Aufgrund des Hauptsatzes kann man viele Eigenschaften endlicher Boolescher Verbände dadurch beweisen, daß man sie für Potenzmengenverbände verifiziert. Hier ist ein Beispiel für eine einfache Anwendung:

2.3.10 Satz In einem endlichen Booleschen Verband $(V, \sqcup, \sqcap, \overline{})$ mit 2^n Elementen gilt

$$n + 1 = \max\{|K| \mid K \subseteq V \text{ ist Kette}\}$$

und es gibt in V genau $n!$ Ketten der Kardinalität $n + 1$.

Beweis: Wir haben den Satz nur für den Potenzmengenverband $(2^A, \cup, \cap, \overline{})$ mit der Menge $A = \{1, \ldots, n\}$ von n natürlichen Zahlen zu zeigen. Offensichtlich ist durch

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \ldots \subset \{1, 2, \ldots, n-1\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$$

eine Kette $K \subset 2^A$ mit $|K| = n + 1$ gegeben. Größere Ketten kann es nicht geben und für jede Permutation der Menge A bekommt man eine Kette der Kardinalität $n + 1$. Also gibt es mindestens $n!$ Ketten der Kardinalität $n + 1$.

Jede Kette $K = \{M_0, \ldots, M_n\}$ in $(2^A, \cup, \cap, \overline{})$ mit $n + 1$ Elementen kann man in der speziellen Form $M_0 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n$ schreiben. Damit muß die Menge M_{i+1} aus der Menge M_i durch die Hinzunahme genau eines neuen Elements entstehen. Somit gibt es genau $n!$ Ketten der Kardinalität $n + 1$. □

Das nächste Beispiel ist von einer ähnlichen Schwierigkeit. Bei endlichen algebraischen Strukturen ist man oft daran interessiert, wie groß Unterstrukturen sind und für welche Größen sie existieren. Im Fall von Gruppen weiß man etwa, daß Größen $|U|$ von Untergruppen U von G immer die Kardinalität von G teilen (Satz von J.-L. Lagrange) und für jede größte Primzahlpotenz p^k, die $|G|$ teilt, Untergruppen der Kardinalitäten $p^i, 1 \leq i \leq k$ existieren (erster Satz von P.L. Sylow). Bei Booleschen Verbänden sind solche Fragen genau zu entscheiden. Es gilt nämlich das folgende Resultat:

2.3.11 Satz In einem endlichen Booleschen Verband V mit 2^n Elementen hat jeder Boolesche Unterverband die Größe 2^k, wobei $1 \leq k \leq n$, und für jedes k mit $1 \leq k \leq n$, existiert ein Boolescher Unterverband von V mit 2^k Elementen.

Beweis: Wir haben den Satz wiederum nur für den speziellen Potenzmengenverband $(2^A, \cup, \cap, \overline{})$ mit $A = \{1, \ldots, n\}$ zu zeigen. Es sei k mit $1 \leq k \leq n$ vorgegeben. Wir betrachten die folgende Partition von A in k Teilmengen:

$$\mathcal{M} := \{\{1\}, \ldots, \{k-1\}, \{k, k+1, \ldots, n\}\}$$

Wenn man $\mathcal{M}$ iterativ unter Vereinigungen abschließt und in diesen Abschluß – er sei mit $\mathcal{N}$ bezeichnet – noch $\emptyset$ einfügt, so bekommt man einen distributiven Unterverband $(\mathcal{N} \cup \{\emptyset\}, \cup, \cap)$ mit den k Atomen $\{1\}, \ldots, \{k-1\}, \{k, k+1, \ldots, n\}$. Man zeigt leicht, daß

$$N \in \mathcal{N} \implies A \setminus N \in \mathcal{N}$$

zutrifft. Folglich ist $(\mathcal{N} \cup \{\emptyset\}, \cup, \cap, \overline{})$ sogar ein Boolescher Unterverband von $(2^A, \cup, \cap, \overline{})$. Der erste Teil des Satzes gilt nach dem Hauptsatz. □

Die Komplementabgeschlossenheit eines Unterverbands schränkt die Anzahl der Unterverbände drastisch ein. Von den 731 Unterverbänden von $2^{\{1,2,3,4\}}$ sind nur 15 Boolesche Unterverbände. Bei $2^{\{1,2,3,4,5\}}$ verändert sich die Anzahl sogar von 12084 auf 52.

Und hier ist schließlich noch ein komplizierteres Beispiel, der bekannte Satz von E. Sperner aus dem Jahr 1928 (Band 27 der Mathematischen Zeitschrift). In ihm verwenden wir Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, welche durch $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ definiert sind und angeben, wie viele Teilmengen der Kardinalität k es in einer Menge der Kardinalität n gibt. Weiterhin verwenden wir $\lfloor n \rfloor$ als Bezeichnung für die größte natürliche Zahl k mit $k \leq n$. Dann gilt:

2.3.12 Satz (E. Sperner) In einem Booleschen Verband mit 2^n Elementen ist die Kardinalität jeder Antikette beschränkt durch $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Beweis: Nach dem Hauptsatz dürfen wir den Verband als Potenzmengenverband der Zahlen $\{1, \ldots, n\}$ annehmen und müssen zeigen, daß jede Teilmenge von $2^{\{1,\ldots,n\}}$, bei der keine verschiedenen Elemente in einer Inklusionsbeziehung stehen, maximal aus $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Mengen besteht.

Im ersten Teil beweisen wir die folgende Zerlegungseigenschaft durch Induktion nach n: Es gibt eine Partition von $2^{\{1,\ldots,n\}}$ in (disjunkte) Ketten $K_1, \ldots, K_m$, wobei die folgenden Eigenschaften gelten:

a) Jede der Ketten K_i der Form $A_1 \subset \ldots \subset A_r$ mit $r \geq 2$ Gliedern erfüllt $|A_i| + 1 = |A_{i+1}|$ für alle $i, 1 \leq i \leq r-1$, und auch $|A_1| + |A_r| = n$.

b) Jede der Ketten K_i der Form A_1 mit einem Glied erfüllt $|A_1| = \frac{n}{2}$. (Dies besagt, daß einelementige Ketten nur in der Partition vorkommen, wenn n eine gerade Zahl ist.)

Induktionsbeginn $n = 1$: Eine Kettenpartition von $2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$ ist gegeben durch $\emptyset \subset \{1\}$ und es gilt für diese Kette offensichtlich auch die Eigenschaft a).

Induktionsschluß (von $n-1$ nach n): Es sei $K_1, \ldots, K_m$ eine Partition von $2^{\{1,\ldots,n-1\}}$ in m Ketten, wobei die beiden Eigenschaften a) und b) gelten. Man konstruiert eine Kettenpartition $\mathcal{K}$ von $2^{\{1,\ldots,n\}}$ wie folgt:

1. Für jede Kette K_i die Form $A_1 \subset \ldots \subset A_r$ mit mindestens $r \geq 2$ Gliedern nimmt man die folgenden beiden Ketten in die Kettenpartition $\mathcal{K}$ von $2^{\{1,\ldots,n\}}$ auf:

$$A_1 \subset \ldots \subset A_r \subset A_r \cup \{n\} \qquad A_1 \cup \{n\} \subset \ldots \subset A_{r-1} \cup \{n\}$$

2. Für jede einelementige Kette K_i die Form A_1 nimmt man die folgende zweielementige Kette in die Kettenpartition $\mathcal{K}$ von $2^{\{1,\ldots,n\}}$ auf:

$$A_1 \subset A_1 \cup \{n\}$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung bekommt man dadurch offensichtlich eine Menge $\mathcal{K}$ von Ketten, die $2^{\{1,\ldots,n\}}$ partitionieren. Auch der erste Teil der Eigenschaft a) gilt, denn (Induktionshypothese!) alle Glieder einer Kette von $\mathcal{K}$ wachsen wiederum um genau ein Element an. Den zweiten Teil der Eigenschaft a) der Ketten von $\mathcal{K}$ zeigt man für die drei vorkommenden Kettenformen (mit $r > 2$ bei der zweiten Form) wie folgt:

$$\begin{array}{rcll}
|A_1| + |A_r \cup \{n\}| & = & |A_1| + |A_r| + 1 & \\
& = & n - 1 + 1 & \text{Induktionsvoraussetzung} \\[1em]
|A_1 \cup \{n\}| + |A_{r-1} \cup \{n\}| & = & |A_1| + |A_{r-1}| + 2 & \\
& = & |A_1| + |A_r| - 1 + 2 & \text{Induktionsvoraussetzung} \\
& = & |A_1| + |A_r| + 1 & \\
& = & n - 1 + 1 & \text{Induktionsvoraussetzung} \\[1em]
|A_1| + |A_1 \cup \{n\}| & = & |A_1| + |A_1| + 1 & \\
& = & \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} + 1 & \text{Induktionsvoraussetzung} \\
& = & n &
\end{array}$$

Trifft bei der zweiten Form $r = 2$ zu, d.h. $A_1 \cup \{n\}$ als neue Kette, so haben wir hier nach der Induktionshypothese $|A_1| + |A_2| = n - 1$, also $|A_1| + |A_1| + 1 = n - 1$, was $|A_1| = \frac{n-2}{2}$ bringt. Hieraus folgt $|A_1 \cup \{n\}| = |A_1| + 1 = \frac{n}{2}$, also genau die Eigenschaft b).

Nun sei $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ eine Kettenpartition von $2^{\{1,\ldots,n\}}$, die a) und b) erfüllt. Im zweiten Beweisteil zeigen wir: Jede Kette von $\mathcal{K}$ enthält genau eine Menge der Kardinalität

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Der Fall mit einem Glied A_1 ist, wegen $|A_1| = \frac{n}{2}$ (Eigenschaft b)) und dem daraus folgenden Geradesein von n, klar. Hat die Kette die Form $A_1 \subset \ldots \subset A_r$ mit $r \geq 2$, so haben wir (Eigenschaft a)) $|A_1| \leq \frac{n}{2} \leq |A_r|$, also auch $|A_1| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq |A_r|$. Weil die Kardinalitäten der Kettenglieder von $|A_1|$ bis $|A_r|$ in Einserschritten zunehmen, kommt also genau eine Menge der Kardinalität $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ vor.

Jetzt beenden wir den Gesamtbeweis wie folgt: Es gibt genau $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ der Kardinalität $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ und somit höchstens $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Ketten in der Kettenpartition $\mathcal{K}$ des zweiten Beweisteils. Jede Kette von $\mathcal{K}$ kann aber höchstens eine Menge einer Antikette $\mathcal{A}$ von $2^{\{1,\ldots,n\}}$ enthalten und damit kann die Antikette $\mathcal{A}$ maximal aus $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ Mengen bestehen. □

Natürlich gibt es im Potenzmengenverband $2^{\{1,\ldots,n\}}$ auch Antiketten der Größe $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, nämlich genau die Teilmengen dieser Kardinalität. In der zeichnerischen Darstellung des Hasse-Diagramms befinden sich diese auf einer oder zwei Ebenen genau in der Mitte, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist.

2.3.13 Beispiel (zum Satz von E. Sperner) Wir wollen nachfolgend die schrittweise Konstruktion einer Kettenpartition im Beweis des letzten Satzes verdeutlichen. Imgrundegenommen stellt sie einen Algorithmus dar und kann in einer modernen Programmiersprache mit vorimplementierten Listen oder Mengen trivial implementiert werden.

Im Beweis von Satz 2.3.12 haben wir bereits die spezielle Kettenpartition

$$\emptyset \subset \{1\}$$

von $2^{\{1\}} = \{\emptyset, \{1\}\}$ mit einer Kette angegeben. Daraus erhalten wir die Kettenpartition

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \qquad\qquad \{2\}$$

von $2^{\{1,2\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ mit zwei Ketten. Wenden wir das Verfahren des Beweises auf diese beiden Ketten an, so erhalten wir

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \qquad\qquad \{3\} \subset \{1,3\} \qquad\qquad \{2\} \subset \{2,3\}$$

als Partition von $2^{\{1,2,3\}} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ mit Hilfe von drei Ketten. Der Leser mache sich die Lage der Ketten durch das Zeichnen der jeweiligen Hasse-Diagramme und entsprechende Markierungen klar. □

Der Satz von E. Sperner war der Ausgangspunkt bei der Untersuchung von Kettenpartitionen. Eines der bekanntesten Resultate in dieser Richtung ist ein Satz von R. Dilworth aus dem Jahr 1950. Er besagt, daß man jede Ordnung in n Ketten partitionieren kann, wobei n die Mächtigkeit der größten Antiketten ist.

Kehren wir nach diesen Anwendungen wieder zum Thema des Hauptsatzes zurück. Bei Nichtatomizität ergibt sich ein zum Hauptsatz bzw. der erwähnten Variante sehr ähnliches Resultat. Dies ist der bekannte Satz von M.H. Stone, den wir aber mit den bisher bereitgestellten Mitteln noch nicht beweisen können. Wir geben deshalb nachfolgend nur das Resultat ohne Beweis an. Dazu brauchen wir noch einen Begriff.

2.3.14 Definition Eine Menge von Teilmengen eines Universums U heißt ein *Mengenkörper*, wenn sie abgeschlossen ist unter der Bildung von *binären* Vereinigungen $A \cup B$, *binären* Durchschnitten $A \cap B$ und *unären* Komplementen $\overline{A} := U \setminus A$. □

Ein Mengenkörper[5] ist also mit den entsprechenden Mengenoperationen ein Boolescher Unterverband in einem Booleschen Potenzmengenverband $(2^U, \cup, \cap, \overline{}, U, \emptyset)$. Im Gegensatz zur obigen Definition werden Unterverbände von $(2^U, \cup, \cap, \overline{}, U, \emptyset)$ im ursprünglichem Sinn (also ohne Komplement) *Mengenringe* genannt. Während Mengenkörper entscheidend bei der Darstellung von Booleschen Verbänden sind, ist der Anwendungsbereich der allgemeineren Mengenringe in Darstellungsfragen bei den allgemeineren distributiven Verbänden.

Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir nun zum angekündigten Resultat von M.H. Stone. Im Jahre 1936 zeigte er das folgende weitreichende Resultat über die Darstellung beliebiger Boolescher Verbände:

2.3.15 Satz (Darstellungssatz von M.H. Stone) Jeder Boolesche Verband V ist isomorph zu einem Mengenkörper $\mathcal{K}$ und für den Verbandsisomorphismus $f : V \to \mathcal{K}$ gilt ebenfalls die Zusatzeigenschaft $f(\overline{x}) = \overline{f(x)}$, d.h. er ist ein Boolescher Verbandsisomorphismus. □

Zum Abschluß dieses Abschnitts erwähnen wir noch ein Resultat, mit dem der Anschluß der Booleschen Algebra an die klassische Algebra geknüpft wird. Diese Resultat geht ebenfalls auf M.H. Stone zurück.

2.3.16 Satz

1. Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement 0, Einselement 1 und $r \cdot r = r$ für alle $r \in R$. Definiert man Operationen $\sqcup, \sqcap : R \times R \to R$ und $\overline{} : R \to R$ durch

$$r \sqcup s \;=\; r + s - r \cdot s \qquad r \sqcap s \;=\; r \cdot s \qquad \overline{r} \;=\; 1 - r,$$

so ist die algebraische Struktur $(R, \sqcup, \sqcap, \overline{})$ ein Boolescher Verband mit größtem Element 1 und kleinstem Element 0.

2. Es sei $(V, \sqcup, \sqcap, \overline{})$ ein Boolescher Verband mit größtem Element L und kleinstem Element O. Definiert man Operationen $+, \cdot : V \times V \to V$ durch

$$a + b \;=\; (a \sqcap \overline{b}) \sqcup (\overline{a} \sqcap b) \qquad a \cdot b \;=\; a \sqcap b,$$

so ist die algebraische Struktur $(V, +, \cdot)$ ein Ring mit Nullelement O, Einselement L, in dem zusätzlich $a \cdot a = a$ für alle $a \in V$ gilt.

Beweis: Der Beweis ergibt sich durch relativ einfaches Nachrechnen der behaupteten Eigenschaften. Beim ersten Teil hat man als Vorbereitung zu zeigen, daß der Ring kommutativ ist. □

[5]Wegen der Gleichung $B \setminus A = B \cap \overline{A}$ kann man in der Definition von Mengenkörpern auch binäre statt unäre Komplemente verwenden. Diese Festlegung findet sich manchmal ebenfalls in der Literatur.

Die in diesem Satze betrachteten Ringe mit $a \cdot a = a$ werden in der Literatur auch Boolesche Ringe genannt. Sie sind, in der etwas abgeschwächten Form der Booleschen Semiringe, etwa bei einer Verallgemeinerung von graphentheoretischen Wegealgorithmen bedeutend. Von M.H. Stone stammt schließlich auch noch eine topologische Charakterisierung Boolescher Verbände, auf die wir aber nicht eingehen können. Einzelheiten findet man in dem in der Einleitung zitiertem Buch von H. Hermes.

Boolesche Verbände stellen eine Algebraisierung der Aussagenlogik durch Mittel der Verbandstheorie dar. Genaugenommen handelt es sich um die Algebraisierung der klassischen Aussagenlogik, in der das sogenannte Gesetz vom „ausgeschlossenen Dritten" gilt. Die intuitionistische Aussagenlogik, in der dieses Gesetz nicht gilt, kann ebenfalls verbandstheoretisch algebraisiert werden. Man braucht dazu (relative und absolute) Pseudokomplemente, welche zu Heyting-Algebren, Brouwerschen Verbänden und ähnlichen Strukturen führen. Der interessierte Leser sei etwa auf das Buch von H. Hermes verwiesen.

2.4 Vollständige Verbände

Ist $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband, so existiert das Supremum $\bigsqcup N$ und das Infimum $\bigsqcap N$ für alle *endlichen* Teilmengen[6] N von V. Es gibt nun viele Beispiele, wo man auf die Endlichkeit verzichten kann, d.h. das Supremum $\bigsqcup N$ und das Infimum $\bigsqcap N$ für alle Teilmengen $N \subseteq V$ existieren. Dies führt zur wichtigen Klasse der vollständigen Verbände, die, in Kombination mit den Booleschen Verbänden, später bei den Relationen entscheidend sein wird. Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Abschwächung, den sogenannten Halbverbänden. Davon gibt es zwei Arten, die man wie folgt einführt.

2.4.1 Definition Ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ heißt *vollständiger oberer Halbverband*, falls $\bigsqcup N$ für alle $N \subseteq V$ mit $N \neq \emptyset$ existiert. Existiert dagegen $\bigsqcap N$ für alle $N \subseteq V$ mit $N \neq \emptyset$, so heißt $(V, \sqcup, \sqcap)$ *vollständiger unterer Halbverband*. □

Offensichtlich gelten in einem Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$, in dem die speziellen Suprema und Infima $\bigsqcup V, \bigsqcap V, \bigsqcup \emptyset$ und $\bigsqcap \emptyset$ existieren, die nachstehenden zwei Gleichheiten:

$$\bigsqcup V = \bigsqcap \emptyset = \mathsf{L} \qquad \bigsqcap V = \bigsqcup \emptyset = \mathsf{O}$$

(Dies folgt aus der Tatsache, daß eine Allquantifizierung mit der leeren Menge als Bereich des Quantors immer wahr ist.) Damit hat ein oberer vollständiger Halbverband immer ein größtes Element $\bigsqcup V$ und ein unterer vollständiger Halbverband immer ein kleinstes Element $\bigsqcap V$. Daß die Einschränkung $N \neq \emptyset$ in Definition 2.4.1 notwendig zur beabsichtigten Unterscheidung ist, wird durch nachfolgenden Satz demonstriert, der zwei sehr bekannte (und duale) Sätze der Verbandstheorie zusammenfaßt. Er scheint erstmals von E.F. Moore publiziert worden zu sein.

[6] Für eine unendliche Menge N brauchen weder $\bigsqcup N$ noch $\bigsqcap N$ zu existieren.

2.4.2 Satz (von der oberen bzw. unteren Grenze)

1. Satz von der oberen Grenze: Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein vollständiger unterer Halbverband. Existiert zu einer gegebenen Teilmenge $N \subseteq V$ eine obere Schranke, d.h. ist $\mathsf{Ma}(N) \neq \emptyset$, so gilt $\bigsqcup N = \bigsqcap \mathsf{Ma}(N)$.

2. Satz von der unteren Grenze: Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein vollständiger oberer Halbverband. Existiert zu einer gegebenen Teilmenge $N \subseteq V$ eine untere Schranke, d.h. ist $\mathsf{Mi}(N) \neq \emptyset$, so gilt $\bigsqcap N = \bigsqcup \mathsf{Mi}(N)$.

Beweis: Wir beweisen nur den Satz von der oberen Grenze, also die erste Aussage, da der Satz der unteren Grenze unmittelbar durch Dualisierung dieses Beweises gezeigt wird. Es sei $a \in V$ angenommen. Dann gilt:

$$a = \bigsqcap \mathsf{Ma}(N) \iff \underbrace{a \in \mathsf{Mi}(\mathsf{Ma}(N))}_{a \text{ untere Schranke von } \mathsf{Ma}(N)} \quad \wedge \quad \underbrace{a \in \mathsf{Ma}(\mathsf{Mi}(\mathsf{Ma}(N)))}_{\substack{a \text{ größer oder gleich allen anderen un-} \\ \text{teren Schranken von } \mathsf{Ma}(N)}}$$

Nach Satz 1.2.10 bekommen wir daraus die folgende Äquivalenz:

$$a = \bigsqcap \mathsf{Ma}(N) \iff \underbrace{a \in \mathsf{Ma}(N)}_{a \text{ obere Schranke von } N} \quad \wedge \quad \underbrace{a \in \mathsf{Mi}(\mathsf{Ma}(N))}_{\substack{a \text{ kleiner oder gleich allen an-} \\ \text{deren oberen Schranken von } N}}$$

Dies zeigt, daß $\bigsqcap \mathsf{Ma}(N)$ das Supremum von N ist, also $\bigsqcup N = \bigsqcap \mathsf{Ma}(N)$ gilt, und dies beendet den Beweis. □

Existiert in einem vollständigen oberen (bzw. vollständigen unteren) Halbverband ein größtes Element $\bigsqcap \emptyset$ (bzw. ein kleinstes Element $\bigsqcup \emptyset$), so existieren $\bigsqcup N$ und $\bigsqcap N$ *für alle Teilmengen* N von V, auch die leere Teilmenge. Solche Verbände zeichnet man durch eine spezielle Namensgebung aus:

2.4.3 Definition Ein Verband $(V, \sqcup, \sqcap)$ heißt *vollständig*, falls für jede Teilmenge $N \subseteq V$ sowohl $\bigsqcup N$ als auch $\bigsqcap N$ existieren. □

Vollständige Verbände haben zahlreiche Anwendungen in der Praxis und kommen auch zahlreich vor. Offensichtlich gilt etwa die folgende Eigenschaft, welche für das praktische Rechnen mit dem Computer sehr wichtig ist (da dieser im Regelfall eine endliche Beschreibung der Daten voraussetzt):

2.4.4 Satz Jeder endliche Verband V ist vollständig.

Beweis: Für eine endliche und nichtleere Teilmenge N des Verbands V der Form $N = \{a_1, \ldots, a_n\}$ gilt $\bigsqcup N = a_1 \sqcup \ldots \sqcup a_n$ und $\bigsqcap N = a_1 \sqcap \ldots \sqcap a_n$. Die Existenz des Supremums und des Infimums von N folgt nun aus der Totalität der binären Abbildungen $\sqcup$ und $\sqcap$.

Der Fall $N = \emptyset$ wird durch das kleinste Element $\bigsqcap V$ und das größte Element $\bigsqcup V$ abgedeckt. $\Box$

Weiterhin haben wir: Ordnungen $(M, \sqsubseteq)$, in denen für alle Teilmengen $N \subseteq M$ sowohl $\bigsqcup N$ als auch $\bigsqcap N$ existieren, induzieren mit der Konstruktion von Satz 1.3.2 einen vollständigen Verband.

2.4.5 Beispiele (für vollständige/nicht–vollständige Verbände) Wir geben nachfolgend zwei Beispiele für vollständige Verbände an, aber auch zwei Beispiele für nichtvollständige Verbände.

1. Der Wahrheitswerteverband $(\mathbb{B}, \vee, \wedge)$ ist vollständig, da endlich, und der Potenzmengenverband $(2^X, \cup, \cap)$ ist vollständig, auch, falls X unendlich ist.

2. Die relationale Struktur $(\mathbb{R}, \leq)$ ist eine totale Ordnung und induziert einen Verband $(\mathbb{R}, \min, \max)$. Dieser Verband ist nicht vollständig. Es gibt nämlich weder kleinste noch größte Elemente.

   Man beachte, daß das bekannte Vollständigkeitsaxiom der Analysis für die reellen Zahlen nicht ihre Vollständigkeit als Verband fordert. Es fordert nur, daß jede nach oben beschränkte nichtleere Menge von reellen Zahlen ein Supremum besitzt oder, gleichwertig dazu, daß jede nach unten beschränkte nichtleere Menge von reellen Zahlen ein Infimum besitzt.

3. Die Ordnung $(\mathbb{N}, \leq)$ bildet eine Kette mit kleinstem Element 0, aber keinem größten Element. $(\mathbb{N}, \leq)$ induziert einen vollständigen unteren Halbverband aber keinen vollständigen oberen Halbverband. $\Box$

Wie im Fall der Booleschen Verbände kommen auch bei den vollständigen Verbänden zwei zusätzliche Operationen $\bigsqcup, \bigsqcap : 2^V \to V$ zur Bestimmung allgemeiner Suprema und Infima in das Spiel, die man bei den Unterstrukturen und den strukturerhaltenden Abbildungen manchmal zu berücksichtigen hat. Wir definieren nachfolgend nur den entsprechenden neuen Unterstrukturbegriff, da die analoge Einschränkung der bisher betrachteten Homomorphismen und Isomorphismen von den allgemeinen auf die vollständigen Verbände im Rest des Buchs nicht gebraucht werden.

2.4.6 Definition Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein vollständiger Verband. Ein Unterverband U von V heißt ein *vollständiger Unterverband* von V, falls für alle Teilmengen $N \subseteq U$ die Eigenschaften $\bigsqcup N \in U$ und $\bigsqcap N \in U$ gelten. $\Box$

Ein vollständiger Unterverband U ist also ein Unterverband eines vollständigen Verbands V, der, für sich selbst betrachtet, einen vollständigen Verband bildet und bei dem zusätzlich alle Suprema und Infima von Teilmengen bezüglich der durch U induzierten Teilordnung $(U, \sqsubseteq_{|U})$ mit denen bezüglich der Originalordnung $(V, \sqsubseteq)$ übereinstimmen.

So eine Übereinstimmung muß, wie man sich leicht klar macht, in der Allgemeinheit nicht immer vorliegen. Hier ist so ein Gegenbeispiel für einen Unterverband der ein vollständiger Verband ist, aber keinen vollständigen Unterverband darstellt.

2.4.7 Beispiel (für einen nicht vollständigen Unterverband) Wir betrachten die natürlichen Zahlen und erweitern sie zweimal um jeweils ein größtes Element. Dies führt somit zur folgenden Kette:

$$0 < 1 < 2 < \ldots < \top_1 < \top_2$$

Der durch diese Ordnung induzierte Verband ist vollständig. Man macht sich dies schnell durch die Überprüfung aller unendlichen Teilmengen der Menge $\mathbb{N} \cup \{\top_1, \top_2\}$ klar.

Nun betrachten wir die Teilmenge $\mathbb{N} \cup \{\top_2\}$. Auch sie induziert einen vollständigen Verband. Dieser ist ein Unterverband von $\mathbb{N} \cup \{\top_1, \top_2\}$. Er ist jedoch kein vollständiger Unterverband. Für die Teilmenge $\mathbb{N}$ ist das Supremum in $\mathbb{N} \cup \{\top_2\}$ nämlich das Element $\top_2$, während $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N} \cup \{\top 1, \top_2\}$ offensichtlich $\top_1$ als Supremum bestitzt. □

Man hat also in der Wortwahl genau zu unterscheiden zwischen einem Unterverband, der vollständig ist (und dessen Suprema und Infima ggf. mit denen des Originals wenig oder nichts zu tun haben), und einem vollständigen Unterverband. Die Kurzform „vollständiger Unterverband" für die erste Klasse von Unterverbänden kommt leider in der Literatur vor, ist aber ungenau und irreführend.

Wenn man die Vollständigkeit eines Verbands V zu zeigen hat, verwendet man in der Regel Satz 2.4.2. Statt die Existenz von $\bigsqcup N$ und $\bigsqcap N$ für alle $N \subseteq V$ zu beweisen, genügt es beispielsweise nur $\bigsqcap N$ für alle $N \subseteq V$ zu verifizieren. Damit ist nämlich N ein vollständiger unterer Halbverband mit größtem Element $\mathsf{L} := \bigsqcap \emptyset$. Der Satz von der oberen Grenze zeigt nun die Existenz von $\bigsqcup N := \bigsqcap \mathsf{Ma}(N)$ für alle $N \subseteq V$, denn L ist trivialerweise eine obere Schranke für jede dieser Teilmengen.

Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, daß die Distributivgesetze bzw. die Gesetze von de Morgan auf endliche Suprema bzw. Infima erweitert werden können. Wir haben das schon beim Beweis von Satz 2.2.9 verwendet. Als Verallgemeinerung gelten nun die in dem folgenden Satz angegebenen vier Gleichungen.

2.4.8 Satz In einem vollständigen und Booleschen Verband gelten die beiden verallgemeinerten Distributivgesetze

1. $a \sqcap \bigsqcup N \;=\; \bigsqcup \{a \sqcap b \,|\, b \in N\}$
2. $a \sqcup \bigsqcap N \;=\; \bigsqcap \{a \sqcup b \,|\, b \in N\}$

und, analog dazu, die beiden verallgemeinerten Gesetze von de Morgan

3. $\overline{\bigsqcup N} \;=\; \bigsqcap \{\overline{a} \,|\, a \in N\}$
4. $\overline{\bigsqcap N} \;=\; \bigsqcup \{\overline{a} \,|\, a \in N\}$.

Beweis: Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ der vollständige und Boolesche Verband und es seien ein Element $a \in V$ und eine Teilmenge N von V gegeben.

a) Wir behandeln vom ersten Teil nur die Gleichung (1), denn die zweite Gleichung folgt dual dazu. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Der erste Fall $N = \emptyset$ ist klar. Hier ist die zu zeigende Gleichung (1) äquivalent zur Gleichung $a \sqcap \mathsf{O} = \mathsf{O}$, welche gilt. Es sei nun $N \neq \emptyset$. Wir beweisen die Gleichheit durch zwei Abschätzungen:

Beweis der Abschätzung „$\sqsubseteq$": Es sei $u := \bigsqcup\{a \sqcap b \mid b \in N\}$. Dann gilt $u \sqcup \overline{a} \in \mathsf{Ma}(N)$, da für alle $b \in N$ die Beziehung

$$\begin{array}{rcll} b & \sqsubseteq & b \sqcup \overline{a} & \\ & = & \mathsf{L} \sqcap (b \sqcup \overline{a}) & \\ & = & (a \sqcup \overline{a}) \sqcap (b \sqcup \overline{a}) & \\ & = & (a \sqcap b) \sqcup \overline{a} & \text{Distributivgesetz} \\ & \sqsubseteq & u \sqcup \overline{a} & \text{da } a \sqcap b \sqsubseteq u \end{array}$$

zutrifft. Aus $u \sqcup \overline{a} \in \mathsf{Ma}(N)$ folgt die Abschätzung $\bigsqcup N \sqsubseteq u \sqcup \overline{a}$ und Satz 2.3.8.4 bringt schließlich $a \sqcap \bigsqcup N \sqsubseteq u = \bigsqcup\{a \sqcap b \mid b \in N\}$.

Beweis der Abschätzung „$\sqsupseteq$": Für $b \in N$ gilt $b \sqsubseteq \bigsqcup N$, also auch $a \sqcap b \sqsubseteq a \sqcap \bigsqcup N$. Diese Ungleichung zeigt $a \sqcap \bigsqcup N \in \mathsf{Ma}(\{a \sqcap b \mid b \in N\})$, und der Rest ist die Definition des Supremums.

b) Von den beiden Gleichungen des zweiten Teils beweisen wir nur (3) und orientieren uns dabei direkt am Beweis des früheren Satzes 2.3.8.2. Es gilt

$$\begin{array}{rll} & (\bigsqcup N) \sqcup \bigsqcap\{\overline{a} \mid a \in N\} & \\ = & \bigsqcap\{(\bigsqcup N) \sqcup b \mid b \in \{\overline{a} \mid a \in N\}\} & \text{nach (2)} \\ = & \bigsqcap\{(\bigsqcup N) \sqcup \overline{b} \mid b \in N\} & \\ = & \bigsqcap\{\bigsqcup\{a \sqcup \overline{b} \mid a \in N\} \mid b \in N\} & \text{Eigenschaft Supremum} \\ = & \bigsqcap\{\mathsf{L} \mid b \in N\} & \text{weil } a = b \text{ vorkommt} \\ = & \mathsf{L} & \end{array}$$

und auch

$$\begin{array}{rll} & (\bigsqcup N) \sqcap \bigsqcap\{\overline{a} \mid a \in N\} & \\ = & \bigsqcap\{\overline{a} \mid a \in N\} \sqcap (\bigsqcup N) & \text{Kommutativität} \\ = & \bigsqcup\{\bigsqcap\{\overline{a} \mid a \in N\} \sqcap b \mid b \in N\} & \text{nach (1)} \\ = & \bigsqcup\{\bigsqcap\{\overline{a} \sqcap b \mid a \in N\} \mid b \in N\} & \text{Eigenschaft Infimum} \\ = & \bigsqcup\{\mathsf{O} \mid b \in N\} & \text{weil } a = b \text{ vorkommt} \\ = & \mathsf{O}. & \end{array}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $\overline{\bigsqcup N} = \bigsqcap\{\overline{a} \mid a \in N\}$ nach der Definition des Komplements. □

Ein Verband, in dem die Gleichungen (1) und (2) von Satz 2.4.8 gelten, heißt *volldistributiv*. Vollständige Boolesche Verbände sind somit volldistributiv. Auf die Voraussetzungen „Boolesch“, also die Komplementbildung, kann dabei nicht verzichtet werden. Es gibt vollständige nicht-komplementäre Verbände, in denen die endlichen, aber nicht die verallgemeinerten Distributivgesetze gelten. Das folgende Beispiel wird in dem Buche „Theorie der Verbände“ von H. Gericke gegeben, das 1967 als BI Hochschultaschenbuch 38/38a erschienen ist.

2.4.9 Beispiel (für einen nicht volldistributiven Verband) Die natürlichen Zahlen bilden mit der üblichen Ordnung einen distributiven Verband. Der Verband der Wahrheitswerte ist ebenfalls distributiv. Somit ist der Produktverband $V := \mathbb{N} \times \mathbb{B}$ ein distributiver Verband.

Der eben angegebene Verband V bleibt distributiv, wenn man zu ihm ein neues Element $\top$ als größtes Element hinzunimmt. Dazu hat man beim Beweis eines Distributvgesetzes (die Verbandseigenschaft ist offensichtlich; man vergleiche mit den Bemerkungen zum Lifting in Abschnitt 1.6), etwa der Gleichung

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

für alle $a, b, c \in V \cup \{\top\}$, nur einige Fälle zu unterscheiden: Der Fall, daß keines der Elemente a, b, c gleich dem Element $\top$ ist, ist klar. Falls $a = \top$ gilt, dann haben wir

$$\top \sqcup (b \sqcap c) = \top = \top \sqcap \top = (\top \sqcup b) \sqcap (\top \sqcup c).$$

Analog behandelt man auch die restlichen Fälle $a \neq \top$, $b = \top$ und $a \neq \top$, $b \neq \top$ und $c = \top$.

Der erweiterte Verband $V \cup \{\top\}$ ist, wie man sich durch einige offensichtliche Fallunterscheidungen klar macht, auch vollständig. Am besten ist es, sich dazu das Hasse-Diagramm zu veranschaulichen. Es besteht (vergl. nachfolgende Skizze) aus zwei „fast“ parallelen Ketten

$$\langle 0, \mathit{ff} \rangle \sqsubset \langle 1, \mathit{ff} \rangle \sqsubset \ldots \sqsubset \top \qquad\qquad \langle 0, \mathit{tt} \rangle \sqsubset \langle 1, \mathit{tt} \rangle \sqsubset \ldots \sqsubset \top$$

und allen Verbindungen zwischen ihnen der Form $\langle n, \mathit{ff} \rangle \sqsubset \langle n, \mathit{tt} \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

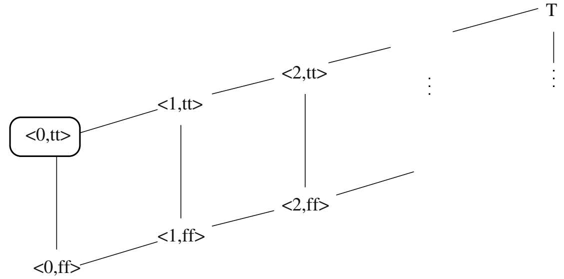


Abbildung 2.4: Hasse-Diagramm eines nicht volldistributiven Verbands

Am Ende dieses Abschnitts werden wir noch einen allgemeinen Satz angeben, aus dem ebenfalls die Vollständigkeit des erweiterten Verbands $V \cup \{\top\}$ folgt.

Der erweiterte Verband $V \cup \{\top\}$ ist jedoch nicht volldistributiv. Dazu betrachtet man die Menge N, definiert durch die Paare $\langle n, \mathit{ff} \rangle$ mit $n \in \mathbb{N}$, also die Elemente der „unteren" Kette $\langle 0, \mathit{ff} \rangle \sqsubset \langle 1, \mathit{ff} \rangle \sqsubset \ldots$, und das Element a, definiert als Paar $\langle 0, \mathit{tt} \rangle$, also als kleinstes Element der „oberen" Kette $\langle 0, \mathit{tt} \rangle \sqsubset \langle 1, \mathit{tt} \rangle \sqsubset \ldots \sqsubset \top$. In der obigen Skizze ist dieses Element umrandet.

Es ist offensichtlich das Element $\top$ das Supremum der unteren Kette und somit gilt die Gleichheit

$$a \sqcap \bigsqcup N \;=\; a \sqcap \top \;=\; a.$$

Auf der anderen Seite gilt aber auch die Gleichung

$$\bigsqcup \{a \sqcap b \,|\, b \in N\} \;=\; \langle 0, \mathit{ff} \rangle,$$

weil die Eigenschaft $a \sqcap b = \langle 0, \mathit{ff} \rangle$ für alle $b \in N$ zutrifft. Also haben wir ein Gegenbeispiel für die bei Volldistributivität geltende Eigenschaft. $\Box$

Im Hinblick auf die Vollständigkeit beschäftigten sich Verbandstheoretiker schon früh mit Fragen der Einbettbarkeit. Kann etwa jeder Verband W als Teilverband in einen vollständigen Verband V eingebettet werden, d.h. gibt es einen Unterverband V' von V, der verbandsisomorph zu W ist, und geht das eventuell sogar schon für geordnete Mengen, die keine Verbände sind? Die Antwort ist positiv und wird beispielsweise gegeben durch die Schnittvervollständigung, welche die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen mittels Dedekind-Schnitte verallgemeinert. Zu Vervollständigungen von Ordnungen und Verbänden kommen wir später.

Wir wissen bisher, daß alle endlichen Verbände vollständig sind. Es gibt aber auch vollständige Verbände, die nicht endlich sind. Eben haben wir mit $V \cup \{\top\}$ ein Beispiel hierfür angegeben.

Die Vollständigkeit von Verbänden steht in einer sehr engen Beziehung zu Noetherschen Ordnungen (benannt nach E. Noether), welche außergewöhnlich wichtig in Mathematik und Informatik sind. Wir beginnen die Diskussion mit der formalen Festlegung, was es heißt, eine Noethersche Ordnung zu sein.

2.4.10 Definition Eine Ordnung $(M, \sqsubseteq)$ heißt *Noethersch geordnet* oder *Noethersche Ordnung*, falls jede Teilmenge $N \neq \emptyset$ von M ein minimales Element besitzt. $\Box$

Auch eine Beschreibung von Noetherschen Ordnungen durch die sogenannte *absteigende Kettenbedingung* (im Englischen zu DCC abgekürzt) wird sehr oft in der Literatur verwendet, da sie für viele Menschen anschaulicher ist. Wir formulieren den Zusammenhang in dem nachfolgenden Satz. Dabei verwenden wir für abzählbar-unendliche Ketten die früher eingeführte einfach zugänglichere Notation.

2.4.11 Satz Eine Ordnung $(M, \sqsubseteq)$ ist genau dann Noethersch geordnet, wenn für jede Kette der Form $\ldots \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_0$ gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_{n+k} = a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Gäbe es in M eine Kette der Form

$$\ldots \sqsubset a_2 \sqsubset a_1 \sqsubset a_0,$$

bei der also $a_{n+1} \sqsubset a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zutrifft, so besitzt offensichtlich die Teilmenge $N := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kein minimales Element. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

„$\Longleftarrow$“: Auch diese Richtung beweist man durch Widerspruch. Es sei N eine nichtleere Teilmenge von M ohne minimale Elemente. Man wählt $a_0 \in N$. Da a_0 nicht minimal ist, gibt es ein $a_1 \in N$ mit $a_1 \sqsubset a_0$. Auch a_1 ist nicht minimal. Also gibt es ein $a_2 \in N$ mit $a_2 \sqsubset a_1$, was $a_2 \sqsubset a_1 \sqsubset a_0$ impliziert. Auf diese Weise gelangt man, formal natürlich durch vollständige Induktion, zu einer Kette $\ldots \sqsubset a_2 \sqsubset a_1 \sqsubset a_0$, bei der $a_{n+1} \sqsubset a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zutrifft. Das ist ein Widerspruch. □

Man nennt die in diesem Satz auftretenden Ketten $\ldots \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_0$ abzählbar-absteigend und die Ketten $\ldots \sqsubset a_2 \sqsubset a_1 \sqsubset a_0$ echt abzählbar-absteigend. Die Bedingung, daß es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{n+k} = a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, heißt „die Kette wird stationär“. Diesem Sprachgebrauch folgend ist eine Ordnung also genau dann Noethersch, wenn alle abzählbar-absteigenden Ketten stationär werden oder alle echt abzählbar-absteigenden Ketten endlich sind.

Ist die duale Ordnung $(M, \sqsupseteq)$ von $(M, \sqsubseteq)$ Noethersch, so nennt man die Originalordnung $(M, \sqsubseteq)$ manchmal auch *Artinsch* (nach dem östereichischen Mathematiker E. Artin). Wesentlich gebräuchlicher ist hier aber der Ausdruck „M erfüllt die *aufsteigende Kettenbedingung*“ (im Englischen ACC). Sie besagt, daß es für jede Kette der Form $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \ldots$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{n+k} = a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$. In einer Kurzversion liest sich dies wie folgt: Eine Ordnung ist genau dann Artinsch, wenn alle abzählbar-aufsteigenden Ketten stationär werden oder alle echt abzählbar-aufsteigenden Ketten endlich sind.

Man beachte, daß wir in „Folgendarstellungen“ $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq \ldots$ bzw. $\ldots \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_0$ von Ketten auch Wiederholungen zulassen, es sich eigentlich um einen etwas anderen Kettenbegriff als den ursprünglich eingeführten mengentheoretischen Kettenbegriff handelt. Wir sprechen deshalb in diesem Zusammenhang immer von abzählbar-aufsteigenden oder abzählbar-absteigenden Ketten.

Es sollte an dieser Stelle noch bemerkt werden, daß es eigentlich sinnvoller wäre, Ordnungen als Artinsch zu bezeichnen, wenn sie die absteigende Kettenbedingung erfüllen, und als Noethersch, wenn sie die aufsteigende Kettenbedingung erfüllen. Der Ursprung beider Begriffe liegt nämlich in der klassischen Ringtheorie und da sind die Artinschen Ringe (benannt nach E. Artin) genau die, bei denen jede absteigende Kette von Idealen stationär wird, und die Noetherschen Ringe (benannt nach E. Noether) sind genau die, bei denen jede aufsteigende Kette von Idealen stationär wird.

Obwohl die beiden Begriffe Noethersch und Artinsch bisher nur mit der Nichtexistenz von gewissen abzählbaren Ketten im Sinn von Folgen in Verbindung gebracht wurden, kann man durch sie auch die Nichtexistenz von allgemeinen Ketten im ursprünglichen mengentheoretischen Sinn behandeln. Dies geschieht im nachfolgenden Satz. Der Beweis dieses Satzes zeigt auch, wie vorteilhaft es ist, beide Beschreibungsmöglichkeiten (also die Definition und Satz 2.4.11) zur Verfügung zu haben.

2.4.12 Satz Gegeben sei eine Ordnung $(M, \sqsubseteq)$. Es ist $(M, \sqsubseteq)$ genau dann Noethersch und Artinsch, wenn jede Kette $K \subseteq M$ endlich ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$“: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß K eine unendliche Kette in M sei.

Zuerst zeigen wir, daß jede nichtleere Teilmenge N von K ein kleinstes Element besitzt. Die Existenz eines minimalen Elements $a \in N$ folgt aus der Eigenschaft der Ordnung $(M, \sqsubseteq)$, Noethersch zu sein. Ist nun $b \in N$ ein beliebiges Element, so gilt $b \sqsubseteq a$ oder $a \sqsubseteq b$ wegen $N \subseteq K$ und der Ketteneigenschaft von K. Die Minimalität von a in N zeigt $a = b$ falls $b \sqsubseteq a$ zutrifft. Somit gilt für alle $b \in N$ entweder $a = b$ oder $a \sqsubseteq b$ und hierdurch ist a als kleinstes Element von N nachgewiesen.

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir nun eine abzählbar-aufsteigende Kette $a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq \ldots$ konstruieren, die nicht stationär wird. Man nimmt $a_0 \in K$ als kleinstes Kettenelement, a_1 als kleinstes Element der Teilkette $K \setminus \{a_0\}$, dann a_2 als kleinstes Element der Teilkette $K \setminus \{a_0, a_1\}$ und so weiter. Damit gilt offensichtlich:

$$a_0 \sqsubset a_1 \sqsubset a_2 \sqsubset \ldots$$

Möglich ist dieser Prozeß, weil die Kette K als unendlich angenommen wurde. Somit haben wir nach der Version von Satz 2.4.11 für Artinsch geordnete Mengen den gewünschten Widerspruch zur Voraussetzung „$(M, \sqsubseteq)$ ist Artinsch“.

„$\Longleftarrow$“: Ist jede Kette in $(M, \sqsubseteq)$ endlich, so muß jede abzählbar-absteigende Kette stationär werden. Gleiches gilt auch für jede abzählbar-aufsteigende Kette. Satz 2.4.11 bzw. seine Version für Artinsch geordnete Mengen bringt somit die Behauptung. $\square$

Analog zu der im Beweis gezeigten Hilfseigenschaft gilt natürlich auch: Jede nichtleere Teilmenge einer Kette $K \subseteq M$ einer Artinschen Ordnung $(M, \sqsubseteq)$ (und damit insbesondere die Kette K selbst) besitzt ein größtes Element.

In Satz 2.4.12 sind beide Eigenschaften notwendig. Gilt nur eine, so kann es durchaus unendliche Ketten geben. Ein Beispiel hierzu sind die natürlichen Zahlen mit der kanonischen Ordnung.

Bei Noetherschen Ordnungen gilt ein wichtiges Induktionsprinzip. Es wird in dem nachfolgenden Satz formuliert. In der Praxis wird es häufig auch bei Noetherschen Quasiordnungen eingesetzt, bei denen alles bisher Gesagte mit Ausnahme der Antisymmetrie gilt. Ein Beispiel für eine Noethersche Induktion mit einer Quasiordnung ist die Induktion nach der Länge von Sequenzen. Bezeichnet man mit M^* die Sequenzen mit Elementen aus M und mit $|s|$ die Länge von $s \in M^*$, so wird durch $s_1 \preccurlyeq s_2$ falls $|s_1| \leq |s_2|$ nämlich nur eine Noethersche Quasiordnung $(M^*, \preccurlyeq)$ festgelegt und keine Noethersche Ordnung.

2.4.13 Satz (Noethersche Induktion) Es sei P ein Prädikat auf einer Noetherschen Ordnung $(M, \sqsubseteq)$. Gilt $P(a)$ für alle minimalen Elemente a von M und folgt für alle nicht-minimalen Elemente a von M aus $P(b)$ für alle $b \in M$ mit $b \sqsubset a$ auch $P(a)$, so gilt $P(a)$ für alle Elemente a von M.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein Element, für das die Eigenschaft P nicht gilt. Wir definieren eine nichtleere Menge $S \subseteq M$ durch

$$S \quad := \quad \{x \in M \mid P(x) \text{ gilt nicht}\}.$$

Dann hat S ein minimales Element a. Ist a minimal in M, so gilt nach der ersten Voraussetzung $P(a)$, was $a \in S$ widerspricht. Ist a nicht minimal in M, so gilt $b \notin S$ für alle $b \in M$ mit $b \sqsubset a$, d.h. $P(b)$ für alle $b \in M$ mit $b \sqsubset a$. Die zweite Voraussetzung zeigt nun $P(a)$, was ebenfalls $a \in S$ widerspricht. □

Man nennt in Satz 2.4.13 die erste Voraussetzung den Induktionsbeginn und die zweite Voraussetzung den Induktionsschluß. Nach diesen fundamentalen Eigenschaften sind hier nun einige Beispiele für die eben eingeführten Begriffe.

2.4.14 Beispiele (zu Noethersch und Artinsch) Nachfolgend findet man Beispiele für Noethersche und Artinsche Ordnungen und auch entsprechende Gegenbeispiele.

1. Jede endliche Ordnung ist offensichtlich sowohl Noethersch als auch Artinsch geordnet.

2. Die natürlichen Zahlen sind bezüglich ihrer kanonischen Ordnung $0 < 1 < \ldots$ Noethersch aber nicht Artinsch geordnet.

3. Die reellen Zahlen sind bezüglich ihrer kanonischen Ordnung weder Noethersch noch Artinsch geordnet. Auch die ganzen Zahlen sind bezüglich ihrer kanonischen Ordnung

$$\ldots - 2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$$

   weder Noethersch noch Artinsch geordnet. Sie können aber z.B. Noethersch geordnet werden, indem man Sie durch

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

   aufzählt und die Ordnung durch diese Aufzählung festlegt. □

Bei einer nicht streng formalen mathematischen Vorgehensweise wird eine Menge M oft als endlich bezeichnet, wenn sie entweder leer ist oder es $n > 0$ Objekte $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so daß M die explizite Darstellung $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ besitzt. Ohne die Verwendung von natürlichen Zahlen und expliziten Darstellungen kann man beispielsweise die Endlichkeit von M, einem Ansatz von B. Bolzano folgend, dadurch charakterisieren, daß es keine bijektive Abbildung von M in eine echte Teilmenge von M gibt. Mit den oben eingeführten Begriffen kann man die Endlichkeit von M ebenfalls ohne die Verwendung von natürlichen

Zahlen und expliziten Darstellungen beschreiben. Es ist M nämlich (im nicht streng formalen Sinn) genau dann endlich, wenn die Ordnung $(2^M, \subseteq)$ Noethersch ist. Zum Beweis dieser Aussage bedient man sich im Fall $M \neq \emptyset$ z.B. des Kontrapositionsprinzips der Logik, also indirekter Beweise, und der Charakterisierung von Noethersch geordneten Mengen durch das Stationärwerden von allen abzählbar-absteigenden Ketten. Nachfolgend ist so ein Beweis skizziert.

Es sei M eine Menge. Gilt $M = \emptyset$, so auch $2^M = \{\emptyset\}$ und in $(\{\emptyset\}, \subseteq)$ gibt es nur die abzählbar-absteigende Kette $\emptyset \supseteq \emptyset \supseteq \ldots$, die stationär wird. Nun sei M nicht leer. Ist M unendlich, so kann man durch Induktion in $(2^M, \subseteq)$ eine abzählbar-absteigende Kette $M \supseteq M \setminus \{a_0\} \supseteq M \setminus \{a_0, a_1\} \supseteq M \setminus \{a_0, a_1, a_2\} \supseteq \ldots$ konstruieren, bei der alle Objekte a_n, mit $n \in \mathbb{N}$, paarweise verschieden sind. Folglich wird die Kette nicht stationär. Gibt es umgekehrt in $(2^M, \subseteq)$ eine abzählbar-absteigende Kette $N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$, die nicht stationär wird, so muß N_0 eine unendliche Menge sein. Wegen $N_0 \subseteq M$ ist dadurch auch M unendlich.

Wir beenden nun die allgemeinen Betrachtungen zu Noetherschen Ordnungen und wenden wir uns nun wieder den Verbänden zu. Wichtig ist die folgende Aussage. Sie zeigt, daß aufgrund der Kettenbedingungen beliebige Suprema und Infima auf endliche Suprema und Infima zurückgeführt werden können.

2.4.15 Satz Es seien $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband und $N \subseteq V$ eine nichtleere Teilmenge.

1. Ist die Verbandsordnung $(V, \sqsubseteq)$ eine Noethersche Ordnung, so gibt es eine endliche Teilmenge F von N, so daß $\bigsqcap F$ das Infimum von N ist.
2. Ist die Verbandsordnung $(V, \sqsubseteq)$ eine Artinsche Ordnung, so gibt gibt es eine endliche Teilmenge F von N, so daß $\bigsqcup F$ das Supremum von N ist.

Beweis: Nachfolgend verwenden wir die Eigenschaft, daß sich bei der Vergrößerung einer Menge das Infimum verkleinert.

1. In V ist offensichtlich für jede endliche und nichtleere Teilmenge das Infimum definiert. Somit ist auch die folgende Teilmenge von V definiert:

   $$M \quad := \quad \{\bigsqcap X \mid X \subseteq N, X \text{ endlich und nichtleer}\}$$

   Natürlich ist M nichtleer, denn die Menge enthält z.B. die Infima der einelementigen Teilmengen von N.

   Wegen der Voraussetzung „die Ordnung auf V ist Noethersch“ gibt es also ein minimales Element $a \in M$ und dieses sei das Infimum von F, wobei $F \subseteq N$ endlich und nichtleer ist. Dieses F erfüllt die Behauptung, wie wir nun zeigen.

   Es sei $b \in N$ beliebig. Dann ist $F \cup \{b\}$ endlich und nichtleer, also $\bigsqcap(F \cup \{b\}) \in M$. Weiterhin haben wir

   $$\begin{array}{rcll} a & = & \bigsqcap F & \text{nach Annahme} \\ & \sqsupseteq & \bigsqcap(F \cup \{b\}) & \text{Eigenschaft Infimum} \end{array}$$

und dies impliziert $a = \bigsqcap(F \cup \{b\})$, denn es gilt $\bigsqcap(F \cup \{b\}) \in M$ und a ist minimal in M. Aus $a = \bigsqcap(F \cup \{b\})$ folgt nun $a \sqsubseteq b$. Weil dies für alle $b \in N$ zutrifft, ist damit a, also $\bigsqcap F$, eine untere Schranke von N.

Es ist $a = \bigsqcap F$ aber auch größer oder gleich jeder unteren Schranke von N. Zum Beweis sei $b \in V$ eine weitere untere Schranke von N. Dann haben wir:

$$\begin{array}{rcll} a & = & \bigsqcap F & \text{nach Annahme} \\ & \sqsupseteq & b & b \text{ auch untere Schranke von } F \end{array}$$

2. Diese Aussage folgt sofort aus der ersten Aussage, indem man zum dualen Verband übergeht. □

Aufgrund dieser Aussagen können wir nun hinreichende Bedingungen für die Vollständigkeit eines Verbands angeben, die sich nicht mehr auf Suprema und Infima von Teilmengen beziehen, sondern auf Kettenbedingungen. Letztere sind in der Regel einfacher zu überprüfen.

2.4.16 Satz Es sei $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein Verband.

1. Ist die Verbandsordnung $(V, \sqsubseteq)$ eine Noethersche Ordnung und hat V ein größtes Element, so ist V vollständig.
2. Ist die Verbandsordnung $(V, \sqsubseteq)$ eine Artinsche Ordnung, und hat V ein kleinstes Element, so ist V vollständig.

Beweis: Wir gehen der Reihe nach vor.

1. Nach Satz 2.4.15 besitzen alle nichtleeren Teilmengen von V ein Infimum. Es liegt also ein unterer Halbverband vor. Die Vollständigkeit folgt nun aus der Existenz des größten Elements und dem Satz von der oberen Grenze.
2. Auch diese Aussage folgt, wie in Satz 2.4.15, unmittelbar aus der ersten Aussage, indem man zum dualen Verband übergeht. □

Der erste Teil dieses Satzes zeigt, daß der Verband $V \cup \{\top\}$ von Beispiel 2.4.9 vollständig ist. Er besitzt nämlich $\top$ als größtes Element und alle absteigenden Ketten werden offensichtlich stationär. Es gilt allgemein: Ist die Verbandsordnung $(V, \sqsubseteq)$ eine Noethersche und Artinsche Ordnung, so ist $(V, \sqcup, \sqcap)$ ein vollständiger Verband. Dies folgt aus der Existenz von $\bigsqcap V = \mathsf{O}$ im ersten Fall bzw. aus der Existenz von $\bigsqcup V = \mathsf{L}$ im zweiten Fall.

Springer

http://www.springer.com/978-3-658-00618-1

Ordnungen, Verbände und Relationen mit
Anwendungen
Berghammer, R.
2012, XIV, 392 S. 82 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-00618-1