

Nachdem im ersten Kapitel grundlegende Eigenschaften von Atomen, Molekülen, Festkörpern und Halbleitern behandelt wurden, soll im folgenden die Wechselwirkung von Licht mit Materie dargestellt werden. Spezielle Arten der Wechselwirkung sind die Absorption von Licht aber auch die Emission und die Lichtverstärkung, welche die Grundlagen des Lasers bilden.

2.1 Absorption

Licht wird beim Durchgang durch eine Materialschicht absorbiert. Zur Beschreibung der Absorption wird eine ebene Lichtwelle mit einer Intensität I_0 (in W/m^2) betrachtet, die auf eine Schicht der Dicke d einfällt (Abb. 2.1). Hinter der Schicht hat die Welle eine geringere Intensität als vorher. Die durchtretende Leistungsdichte $I = I(d)$ ist proportional zur eingestrahnten I_0 und hängt exponentiell von der Schichtdicke ab (Beersches Gesetz):

$$I = I_0 \exp(-\alpha d) . \quad (2.1)$$

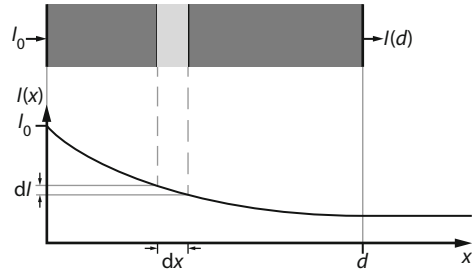
Die für jedes Material charakteristische Größe α (in m^{-1}) wird als Absorptionskonstante oder Absorptionskoeffizient bezeichnet. Beispiele für den Koeffizienten sind: $\alpha \approx 1$ bis 10 km^{-1} (Glasfaser) und $\alpha \approx 1 \text{ nm}^{-1}$ (Metalle).

Zur Ableitung des Gesetzes wird in der Schicht eine Koordinate x eingeführt. Es wird angenommen, dass die an einer Stelle x vorhandene Intensität $I(x)$ um einen Betrag dI vermindert wird, wenn die Lichtwelle sich von x nach $x + dx$ fortbewegt. Die absorbierte Intensität dI ist proportional zur vorhandenen Intensität $I(x)$ und zu dx . Der Proportionalitätsfaktor α ist der bereits eingeführte Absorptionskoeffizient:

$$dI = -\alpha I(x) dx . \quad (2.2)$$

Die Integration dieser Gleichung mit den Randbedingungen $I(0) = I_0$ und $I(d) = I$ ergibt das Beersche Absorptionsgesetz (2.1) (Aufgabe 2.1).

Abb. 2.1 Durchgang von Licht durch einen absorbierenden Stoff der Dicke d :
 $I = hf \cdot \Phi$ (siehe (1.5) und (1.7))



2.1.1 Atomistische Deutung der Absorption

Der Vorgang der Absorption kann atomistisch beschrieben werden. Atome oder Moleküle besitzen diskrete oder gequantelte Energiezustände E_1, E_2, E_3, \dots , die sich in einem Termschema übersichtlich darstellen lassen (Abb. 2.2). In Flüssigkeiten (z. B. Farbstofflösungen) und Festkörpern bilden sich aus den scharfen Zuständen Energiebänder. Im ungestörten Fall befinden sich alle Atome (oder Moleküle) im Zustand der niedrigsten Energie E_1 , dem Grundzustand. Trifft Licht mit der Frequenz f_{12} auf ein Atom, so kann es in einen höheren Energiezustand E_2 übergehen, falls die Bohrsche Bedingung

$$E_2 - E_1 = hf_{12} \quad (2.3)$$

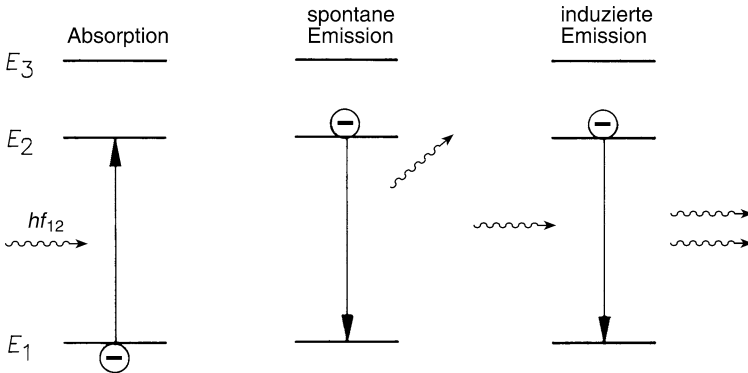


Abb. 2.2 Absorption: Ein Photon hf_{12} hebt ein Elektron aus einem unteren Energieniveau E_1 in ein höheres E_2 . Das Photon verschwindet dabei.

Spontane Emission: Ein Elektron, das sich anfangs in einem höheren oder angeregten Zustand befindet, geht in einen unteren Energiezustand über und emittiert dabei ein Photon.

Induzierte Emission: Ein Photon trifft auf ein angeregtes Elektron, das dadurch in ein tieferes Energieniveau übergeht. Gleichzeitig entsteht ein zweites gleichartiges Photon. Das einfallende Licht wird also verstärkt.

erfüllt ist, wobei $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s das Plancksche Wirkungsquantum bedeutet. Dem Licht wird dadurch ein Lichtquant mit der Energie hf_{12} entzogen. Die Intensität I wird also vermindert, es hat Absorption stattgefunden.

Der Absorptionskoeffizient lässt sich aus der Zahl der absorbierten Photonen oder der Übergänge von Zustand E_1 nach E_2 berechnen. Diese Zahl pro Zeit- und Volumeneinheit wird mit $dN_1/dt|_a$ bezeichnet. Der Index a symbolisiert, dass der Übergang durch Absorption stattfindet. $dN_1/dt|_a$ ist proportional zur Dichte der Atome N_1 (Zahl der Atome/Volumen) im Grundzustand und zur Stromdichte der Photonen ϕ (Zahl der Photonen/Zeit-Fläche):

$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a = -\sigma_{12} N_1 \phi . \quad (2.4)$$

Der Proportionalitätsfaktor σ_{12} ist der Wirkungsquerschnitt für Absorption. Er gibt die effektive Fläche an, mit welcher das Atom die Photonen absorbiert. Das negative Vorzeichen kommt daher, dass die Atomdichte N_1 abnimmt.

Die Zahl der Übergänge $dN_1/dt|_a$ ist auch gleich der Veränderung der Photonendichte (Zahl der Photonen/Volumen) $d\Phi/dt$. Man setzt $\Phi = \phi/c$ [(1.5) und (1.7)] und mit $c = dx/dt$ erhält man:

$$\left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dt}{dx} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dx} . \quad (2.5)$$

Die Stromdichte der Photonen ϕ ist proportional zur Leistungsdichte I (1.7). Durch Gleichsetzen von (2.4) und (2.5) ergibt sich für Abnahme von I durch Absorption:

$$\boxed{\left. \frac{dI}{dx} \right|_a = -\sigma_{12} N_1 I .} \quad (2.6)$$

Durch Vergleich mit (2.2) erhält man:

$$\alpha = \sigma_{12} N_1 . \quad (2.7)$$

Der Absorptionskoeffizient α wächst mit der Dichte der absorbierenden Atome oder Moleküle N_1 und damit z. B. auch mit der Konzentration einer Farbstofflösung.

Der Wirkungsquerschnitt σ_{12} kann durch den Einstein-Koeffizienten für Absorption B_{12} ausgedrückt werden, falls natürliche Linienbreite, siehe Abschn. 2.4, vorliegt:

$$\sigma_{12} = B_{12} h f_{12} / c . \quad (2.8)$$

2.2 Spontane Emission

Es erhebt sich nun die Frage, was mit den Atomen in angeregten Zuständen geschieht. Diese zerfallen nach einer gewissen Zeit wieder in den Grundzustand (Abb. 2.2). Die dabei freiwerdende Energie kann als Lichtquant abgestrahlt werden; allerdings nicht in Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle, sondern in eine beliebige Raumrichtung, so

Tab. 2.1 Lebensdauer von Laserniveaus und Wirkungsquerschnitte σ für induzierte Emission

Lasertyp	λ (nm)	τ_2 (ob. Niv.)	τ_1 (unt. Niv.)	σ (cm ²)
He-Ne	633	10...20 ns	12 ns	$3 \cdot 10^{-13}$
Ar ⁺	488	9 ns	0,4 ns	
Excimer (KrF)	248	1...10 ns	< 1 ps	10^{-16}
CO ₂	10.600	1...10 ms		10^{-16}
Niederdruck			100 ns	
Hochdruck			1 ns	
Farbstoff Rh6G	600	5 ns	≤ 10 ps	$2 \cdot 10^{-18}$
Rubin	694	3 ms	∞	$2 \cdot 10^{-20}$
Nd:YAG	1064	230 μ s	30 ns	$8 \cdot 10^{-19}$
Nd:Glas	1064	300 μ s	50...100 ns	$4 \cdot 10^{-20}$
Halbleiter GaAs	800	4 ns		10^{-16}

dass der einfallenden Welle tatsächlich Energie entzogen wird, wie es in obigen Rechnungen angenommen wurde.

Der Prozess der Rückkehr eines Atoms aus einem angeregten Zustand in einen tief-liegenden Zustand unter Aussendung eines Lichtquants wird als spontane Emission bezeichnet, falls er ohne äußere Einwirkung stattfindet. Die Abnahme der Atomdichte im oberen Zustand N_2 durch spontane Emission wird mit Hilfe der Lebensdauer für spontane Emission τ beschrieben:

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{sp}} = -\frac{N_2}{\tau}. \quad (2.9)$$

Die reziproke Lebensdauer $A = 1/\tau$ wird als Einstein-Koeffizient für spontane Emission bezeichnet, falls τ nur durch Abstrahlung von Licht bedingt ist. Typische Beispiele für Lebensdauern sind $\tau \approx 10^{-9}$ s für erlaubte Übergänge und $\tau \approx 10^{-3}$ s für verbotene Übergänge von metastabilen Niveaus. Nur Grundzustände sind wirklich stabil mit $\tau = \infty$.

Die Rückkehr eines Elektrons vom angeregten Zustand in den Grundzustand kann auch ohne Strahlung erfolgen. In diesem Fall ist $A = 0$; trotzdem besitzt das Elektron im angeregten Zustand eine endliche Lebensdauer τ' . Es gilt daher im allgemeinen Fall $\tau' \leq 1/A$. Die Energie des angeregten Elektrons wird im allgemeinen nicht nur zur Emission eines Photons verwendet, sondern kann auch in anderer Form, z. B. als Gitterschwingung (Erwärmung) oder durch Stoßvorgänge abgegeben werden.

Einige Beispiele für die Lebensdauer von Laserniveaus sind in Tab. 2.1 angegeben.

2.3 Lichtverstärkung durch induzierte Emission

Neben dem Prozess der spontanen Emission, der durch die Beobachtung von Fluoreszenz schon lange bekannt war, postulierte Einstein die induzierte oder stimulierte Emission. Danach kann die Rückkehr eines Atoms aus einem angeregten Zustand in einen tiefer lie-

genden Zustand nicht nur spontan erfolgen, sondern auch durch äußere Einwirkung einer Lichtwelle, welche die Bohrsche Frequenzbedingung erfüllt. Die induzierte Emission ist der Umkehrvorgang zur Absorption. Die Anzahl dieser Prozesse pro Zeit- und Volumeneinheit $dN_2/dt|_i$ ist durch zu (2.4) und (2.6) analoge Beziehungen gegeben:

$$\frac{dN_2}{dt}\Big|_i = \sigma_{21} N_2 \phi \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{dI}{dx}\Big|_i = \sigma_{21} N_2 I} . \quad (2.10)$$

Dabei bedeuten N_2 die Dichte der angeregten Atome, σ_{21} den Wirkungsquerschnitt für induzierte Emission, t die Zeit und x die Koordinate in Ausbreitungsrichtung. Der Index i zeigt an, dass die Gleichungen für den Prozess der induzierten Emission gelten. Die Leistungsdichte I einer eingestrahlten Lichtwelle nimmt zu, die Welle wird verstärkt. Damit entfällt das negative Vorzeichen in (2.10).

Während bei der spontanen Emission das Photon statistisch in verschiedene Richtungen emittiert wird, wird bei der induzierten Emission das entstehende Photon in Ausbreitungsrichtung des einfallenden Photons abgestrahlt. Im Wellenbild kann ausgesagt werden, dass die induzierte Welle kohärent zur einfallenden Lichtwelle ist, d. h. sie hat gleiche Frequenz und Phase.

Durch thermodynamische oder quantenmechanische Überlegungen kann gezeigt werden, dass die Wirkungsquerschnitte für Absorption und induzierte Emission gleich sind, falls die Niveaus gleiches statistisches Gewicht aufweisen:

$$\boxed{\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma} \quad (\text{und } B_{12} = B_{21} = B) . \quad (2.11)$$

Die Koeffizienten A und B sind nach Einstein verknüpft durch

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h f_{12}^3}{c^3} .$$

Besitzen die Niveaus mit E_1 und E_2 Unterzustände, so gilt:

$$\boxed{g_1 \sigma_{12} = g_2 \sigma_{21}} . \quad (2.12)$$

Dabei bedeuten g_1 und g_2 die jeweilige Anzahl der Unterzustände.

Die durch induzierte Emission entstehenden Lichtquanten führen im Gegensatz zur spontanen Emission zu einer Verstärkung der eingestrahlten Lichtwelle. Die induzierten Lichtquanten haben dieselbe Frequenz, Richtung und Phase wie die eingestrahlten.

2.3.1 Verstärkungsfaktor

Die Funktion des Lasers beruht auf der induzierten Emission. Daher wird im Folgenden die spontane Emission vernachlässigt.

Der Verstärkung durch induzierte Emission $dI|_i$ wirkt die Absorption $dI|_a$ entgegen. Insgesamt gilt für die Änderung der Intensität:

$$dI = dI|_a + dI|_i .$$

Für Niveaus mit den Entartungsgraden $g_1 = g_2$ gilt [(2.6) und (2.10)]:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= -\sigma N_1 I + \sigma N_2 I \quad \text{oder} \\ \frac{dI}{dx} &= \sigma (N_{L_2} - N_{T_1}) I . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Durch Integration über die Dicke d des Mediums erhält man das verallgemeinerte Beer'sche Gesetz

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \exp(\sigma(N_2 - N_1)d) \quad \text{oder} \\ G &= \frac{I}{I_0} = \exp(gd) . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Für den Fall $N_2 > N_1$ wächst die Intensität an, da der Exponent der e-Funktion positiv wird. Das Licht wird dann in der Materieschicht verstärkt. Diese Lichtverstärkung durch induzierte Emission (engl. Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, abgekürzt: Laser) ist der grundlegende Mechanismus, auf dem die Funktion des Lasers beruht. Eine Verstärkung tritt nur auf, wenn sich mehr Atome im oberen Niveau 2 befinden als im unteren 1. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so überwiegt die Absorption durch den Zustand 1. Eine weitere Bedingung lautet, dass die Frequenz des eingestrahlt Lichtes dem Frequenzabstand der beiden Niveaus gleich ist. Das Verhältnis von durchtretender Intensität I zur einfallenden Intensität I_0 wird als Verstärkung, Verstärkungsfaktor oder Gewinn G (engl. gain) bezeichnet. Die Größe

$$g = \sigma \cdot (N_2 - N_1) \quad (2.15)$$

stellt die differentielle Verstärkung (engl. gain coefficient) oder in Analogie zum Absorptionskoeffizienten [vgl. (2.7)] den Verstärkungskoeffizienten dar.

Für kleine Werte gd gilt näherungsweise für den Verstärkungsfaktor oder Gewinn

$$G = \exp(gd) \approx 1 + gd . \quad (2.16)$$

In einer He-Ne-Gasentladung eines Lasers von 1 m Länge erreicht man im kontinuierlichen Betrieb Verstärkungsfaktoren von etwa $G = 1,1$. Man sagt in diesem Fall, dass dies Verstärkung $gd = 10\%$ beträgt. Mit optisch gepumpten Nd:YAG-Kristallen lassen sich wesentlich höhere Verstärkungsfaktoren von etwa $G = 10$ erreichen. Bei einer Kristalllänge von $d = 5$ cm ergibt sich $g = (\ln G)/d = 0,46 \text{ cm}^{-1}$. Weitere Beispiele für Verstärkungsfaktoren werden bei der Beschreibung der verschiedenen Lasertypen gegeben.

2.3.2 Boltzmann-Verteilung, negative Temperatur

Das wichtigste Problem beim Bau eines Lasers ist, die Bedingung $N_2 > N_1$ zu erfüllen, also ein angeregtes Niveau 2 gegenüber einem tiefer liegenden Niveau 1 stärker zu besetzen. Man spricht in diesen Fällen von einer Überbesetzung oder einer Inversion. Im Normalzustand befinden sich fast alle Atome im Grundzustand. Durch thermische Stöße erfolgt jedoch eine gewisse Anregung höhergelegener Energiezustände mit den Energien E_1, E_2, E_3, \dots . Die Besetzungszahlen N_1, N_2, N_3, \dots sind durch die Boltzmann-Verteilung gegeben, falls sich das System im thermischen Gleichgewicht befindet. Aus Überlegungen der statistischen Wärmelehre erhält man:

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right)}. \quad (2.17)$$

Dabei ist T die absolute Temperatur in K und $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$ die Boltzmann-Konstante. Die Größen g_1 und g_2 stellen die Zahl der Unterniveaus der Zustände 1 und 2 dar. Bei Zimmertemperatur ist $T = 300 \text{ K}$ und $kT = 24,9 \text{ meV}$. Angeregte Zustände mit Energien von einigen eV, von denen Lichtemission stattfinden könnte, sind thermisch nur schwach angeregt. Erst für $T \rightarrow \infty$ erhält man nach (2.17) gleiche Besetzung $N_2 = N_1$. Dies bedeutet, dass in thermischen Lichtquellen eine Besetzungsinversion und damit eine Lasertätigkeit nicht erzielt werden kann. Formal erhält man eine Besetzungsinversion für negative Temperaturen.

2.4 Linienbreite

Bisher wurde davon ausgegangen, dass die Energieniveaus E_1 und E_2 scharf sind und Lichtabsorption oder Emission nur mit der Frequenz f_{12} erfolgt. Tatsächlich haben jedoch die Niveaus und die optischen Linien eine Unschärfe. Dies muss in den Gleichungen zur Absorption und Verstärkung von Licht berücksichtigt werden.

Dazu wird in folgendem eine Linienformfunktion $F(f)$ eingeführt, welche die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes $\sigma(f) = \sigma F(f)$ und damit des Absorptions- oder Verstärkungskoeffizienten von der Frequenz angibt (Abb. 2.3). Weiterhin gilt für die differentielle Verstärkung $g(f) = gF(f)$, wobei g den Maximalwert angibt.

Man unterscheidet zwischen einer homogenen und inhomogenen Linienverbreiterung. Die spontane Emission und z. B. der Einfluss von Stößen in Gasen und Gitterschwingungen in Festkörpern führen zu einer für alle Atome gleichartigen oder homogenen Verbreiterung. Daneben gibt es inhomogene Prozesse, bei denen einzelne Atome unterschiedliche Übergangsfrequenzen haben. Ein Beispiel dafür ist die Doppler-Verbreiterung, bei welcher die Frequenz von der Geschwindigkeit des Atoms abhängt. Auch der Stark-Effekt in Festkörpern wirkt auf die Atome unterschiedlich, wenn die felderzeugende Umgebung verschieden ist.

2.4.1 Natürliche Linienbreite

Die natürliche Linienbreite wird durch die Lebensdauer τ der beteiligten Niveaus bestimmt. Es handelt sich um eine homogene Verbreiterung. Nach der Unschärferelation von Heisenberg gilt:

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi\tau} . \quad (2.18)$$

Die Niveaus besitzen somit eine natürliche Breite ΔE . Aus der Bohrschen Bedingung $hf_{12} = E_2 - E_1$ folgt die Bandbreite Δf_n einer Linie

$$\Delta f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) , \quad (2.19)$$

wobei τ_1 und τ_2 die Lebensdauer des unteren und oberen Niveaus sind. Durch eine genauere Theorie erhält man die Linienformfunktion

$$F_n(f) = \frac{(\Delta f_n/2)^2}{(f - f_{12})^2 + (\Delta f_n/2)^2} . \quad (2.20)$$

Diese Linienform $F_n(f)$ wird als Lorentz-Profil bezeichnet (Abb. 2.3).

Mit Tab. 2.1 für die Lebensdauern $\tau_{1,2}$ können einige Linien von wichtigen Lasern berechnet werden. Die beobachteten Bandbreiten (Tab. 2.2) der optischen Übergänge sind wesentlich größer, da noch weitere Prozesse zur Linienverbreiterung beitragen.

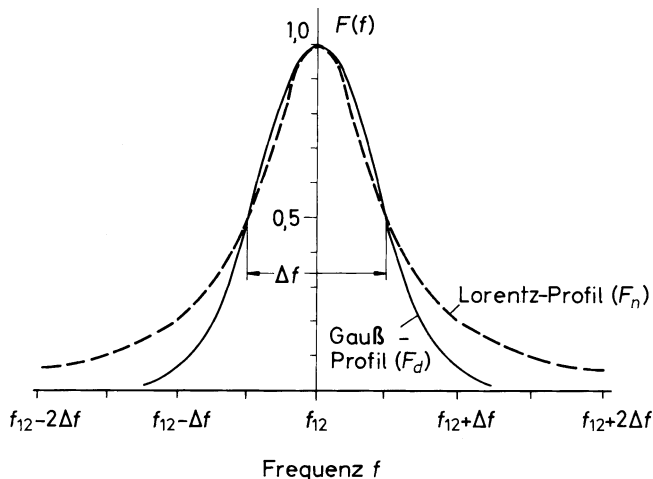


Abb. 2.3 Linienformfunktionen: Gauß- und Lorentz-Profil

Tab. 2.2 Beispiele für Linienbreiten von Laserübergängen

Lasertyp	Wellenlänge in nm	Linienbreite	Mechanismus
He-Ne Gastemperatur 300 K	632	1,5 GHz	Doppler, inhomogen
Argon-Ionen Gastemperatur 2000 K	488	4 GHz	Doppler, inhomogen
Excimer KrF	248	10 THz	Überlappende Schwingungsniv.
CO ₂	10 600		
10 mbar, 300 K		60 MHz	Doppler, inhomogen
1 bar		4 GHz	Stöße, homogen
10 bar		150 GHz	Überlappende Rotationsniv.
Farbstoff Rh6G	600	80 THz	Überlappende Schwingungsniv.
Rubinlaser	694	330 GHz	Gitterschwingungen, homogen
Nd:YAG	1064	120 GHz	Wie Rubinlaser
Nd:Glas	1064	7500 GHz	Starkeffekt durch statistische E-Felder, inhomogen
Halbleiter GaAs	800	10 THz	Energiebänder der Elektronen im period. Kristallfeld

2.4.2 Stoßverbreiterung

Elastische Stöße zwischen Gasteilchen führen ebenfalls zu einer homogenen Verbreiterung. Da die Zahl der Stöße mit dem Druck ansteigt, spricht man auch von einer Druckverbreiterung. Beim elastischen Stoß wird beim Emissionsprozess die Phase der emittierten Lichtwelle verändert. Es entstehen endliche Wellenzüge der Dauer τ_S , in denen die Phase konstant ist. Durch Fourieranalyse ergibt sich für das Frequenzspektrum ein Lorentz-Profil. Die Halbwertsbreite Δf_S ist durch die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen τ_S gegeben. Mit $\tau_1 = \tau_2 = \tau_S$ ergibt sich aus (2.19):

$$\Delta f_S = \frac{1}{\pi \tau_S} . \quad (2.21)$$

Aus den Gesetzen der Thermodynamik kann die Stoßzeit und damit Δf_S abgeschätzt werden

$$\Delta f_S = \sqrt{\frac{3}{4mkT}} \cdot d^2 p , \quad (2.22)$$

wobei m die Masse der Atome oder Moleküle und d deren Durchmesser bedeuten. $k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ist die Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur. Die Stoßverbreiterung Δf_S ist proportional zum Gasdruck p . Normalerweise ist die Stoßverbrei-

terung Δf_S wesentlich größer als die natürliche Linienbreite Δf_n . Für den He-Ne-Laser erhält man $\Delta f_n \approx 10 \text{ MHz}$ und $\Delta f_S = 100 \text{ MHz}$.

Die Stoßverbreiterung im Festkörper beruht auf der Wechselwirkung mit den Kristallschwingungen (Phononen) und führt auch zu einem Lorentz-Profil. Diese Verbreiterung kann man beispielsweise beim Nd:YAG-Laser beobachten (Tab. 2.2).

2.4.3 Doppler-Verbreiterung

Die inhomogene Doppler-Verbreiterung wird durch die Frequenzverschiebung gegeben, welche durch die Geschwindigkeit der Atome oder Moleküle verursacht wird (Doppler-Effekt). Bewegt sich ein strahlendes Atom mit der Geschwindigkeit von $v \ll c$ in Richtung eines Detektors, so wird folgende Frequenz f'_{12} beobachtet:

$$f'_{12} = f_{12} (1 \pm v/c) . \quad (2.23)$$

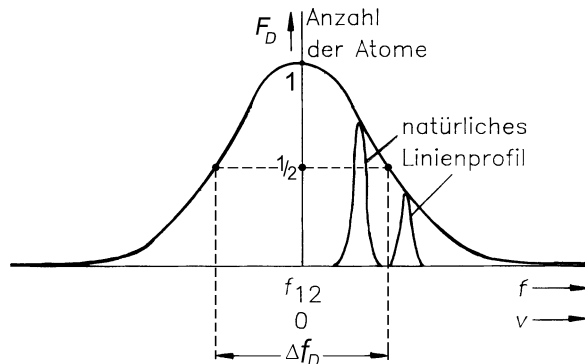
Dabei ist f_{12} die Frequenz des ruhenden Teilchens. Die beiden Vorzeichen geben an, ob sich das Teilchen auf den Detektor zu oder weg bewegt. In Gasen herrscht im thermischen Gleichgewicht eine Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung. Der Begriff inhomogen bedeutet hier, dass jedes Teilchen eine andere Geschwindigkeit und damit eine andere Frequenz der Strahlung hat (Abb. 2.4). Aus der Maxwell-Verteilung folgt die Linienformfunktion (Aufgabe 2.10). Sie besitzt ein Gauß-Profil und ist durch

$$F_D(f) = \exp\left(-\left(\frac{2(f - f_{12})}{\Delta f_D}\right)^2 \ln 2\right) \quad (2.24)$$

gegeben. Für die Halbwertsbreite erhält man

$$\Delta f_D = \frac{2f_{12}}{c} \sqrt{2kT \ln 2/m} . \quad (2.25)$$

Abb. 2.4 Dopplerverbreiterung



Δf_D beträgt z. B. 1,5 GHz für einen He-Ne-Laser und ist damit wesentlich größer als die natürliche Linienbreite Δf_n und die Stoßverbreiterung Δf_s .

Bei gleicher Halbwertsbreite fällt das Gauß-Profil steiler mit der Frequenz ab als die Lorentz-Kurve (Abb. 2.3).

2.4.4 Weitere Verbreiterungsmechanismen

Für *Glaslaser* ist die inhomogene Verbreiterung durch örtlich inhomogene Kristallfelder von Bedeutung (Tab. 2.2), die unterschiedlich auf eingebaute laseraktive Atome (z. B. Seltene Erden) wirken. Dies führt zu einer Frequenzverschiebung durch den statistischen Stark-Effekt. In *Halbleiterlasern* ist die Verbreiterung auf die Bandstruktur zurückzuführen, wobei die Breite durch die Energieverteilung der Elektronen und Löcher gegeben wird.

Normalerweise sind mehrere Mechanismen der Verbreiterung gleichzeitig vorhanden. Die natürliche Linienbreite ist dabei meist vernachlässigbar. Beim *Gaslaser* treten hauptsächlich die Stoß- und Doppler-Verbreiterung auf, wobei bei kleinem Druck die Doppler-Verbreiterung überwiegt. Bei *Festkörperlasern* findet man die homogene Verbreiterung durch Gitterschwingungen oder die nichthomogene durch den statistischen Stark-Effekt. Bei *Farbstoffen* tritt eine besonders breite homogene Linie auf, da engliegende Rotations-Vibrations-Niveaus durch Wechselwirkung zwischen Molekülen verbreitert werden.

2.5 Inversionserzeugung und -abbau

Verstärkung von Licht und damit eine Lasertätigkeit kann nur erfolgen, wenn in den Besetzungsdichten eine Inversion vorhanden ist ($N_2 > N_1$). Die verschiedenen Pumpmechanismen zur Erzeugung der Inversion werden hier nur kurz vorgestellt. Eine ausführliche Beschreibung wird bei der Darstellung der verschiedenen Lasertypen gegeben.

Bei *Gaslasern* werden zum Pumpen meist spezielle Mechanismen der Gasentladung herangezogen. Dabei wird die Energie an das obere Laserniveau durch Elektronen- oder Atomstöße übertragen. Besteht das Gas nur aus einer Spezies (z. B. Edelgas-Ionenlaser) erfolgt die Anregung direkt durch Elektronenstoß. Sind mehrere Spezies vorhanden (z. B. He-Ne- oder CO₂-Laser), so kann resonante Energieübertragung zwischen verschiedenen Atomen oder Molekülen ausgenutzt werden (Stoß 2. Art). Dabei ist es günstig, wenn das eine Teilchen einen langlebigen Zustand besitzt, von welchem das obere Laserniveau des anderen Atoms resonant angeregt wird. Andere Verfahren bei Gaslasern sind: Pumpen durch chemische Reaktionen (z. B. HF-Laser), durch gasdynamische Prozesse (z. B. spezielle CO₂-Laser) oder seltener durch Licht.

Festkörper- und *Farbstofflaser* werden optisch gepumpt. Die Pumplichtquelle muss eine hohe Strahlungsdichte in einem Spektralbereich haben, welcher zur Anregung des obe-

Abb. 2.5 Intensitätsabhängigkeit des Verstärkungsfaktors

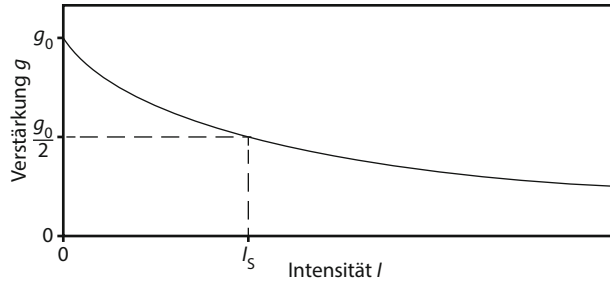
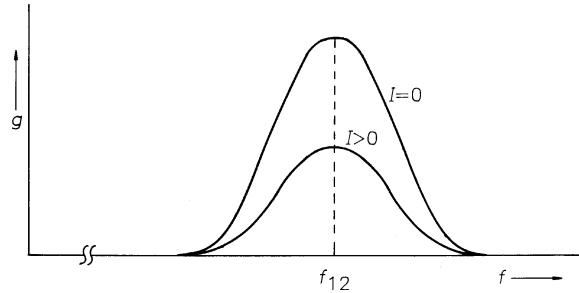


Abb. 2.6 Homogene Sättigung des Linienprofils. Durch Einstrahlung von Lichtern mit der Intensität I wird die Verstärkung homogen abgebaut



ren Laserniveaus führt. Dafür werden Blitzlampen, verschiedene kontinuierliche Lichtquellen sowie häufig Laser eingesetzt.

Halbleiterlaser werden durch elektrischen Strom gepumpt, wobei Elektronen ins obere Valenzband injiziert werden, welches das obere Laserniveau darstellt.

2.5.1 Sättigung der Verstärkung

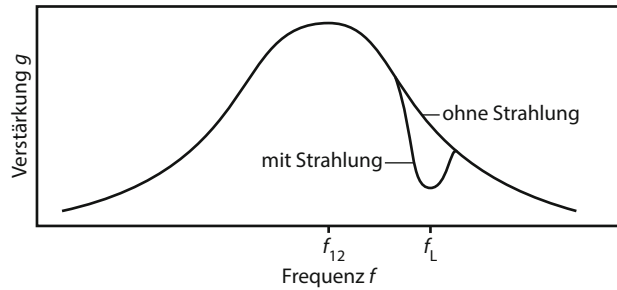
Im Fall einer Besetzungsinversion ($N_2 > N_1$) wird Licht, welches mit einer Frequenz innerhalb der Linienbreite in ein Medium gestrahlt wird, verstärkt. Der Verstärkungskoeffizient g ist in (2.15) für den Fall angegeben, dass die Lichtintensität klein ist. Strahlt man Licht höherer Leistungsdichte I ein, so werden die oberen Niveaus umso stärker entleert, je größer I ist. Dies führt zu einer Abnahme der Verstärkung, die im Fall homogener Sättigung gegeben ist durch (Abb. 2.5 und 2.6)

$$g = \frac{g_0}{1 + I/I_s} \quad (2.26)$$

Dabei ist g_0 die Verstärkung bei sehr kleiner Intensität ($I = 0$) und I_s bezeichnet man als Sättigungsintensität. Aus den Ratengleichungen (2.43, 2.44) kann I_s berechnet werden:

$$I_s = \frac{hf_{12}}{\sigma_{21}\tau} \quad (2.27)$$

Abb. 2.7 Sättigung bei einer inhomogenen Linie (spektrales hole-burning). Durch Einstrahlung von Licht mit einer Frequenz f_L wird die Verstärkung stark abgebaut



Dabei sind σ_{21} der Wirkungsquerschnitt für stimulierte Emission und τ die Lebensdauer des oberen Niveaus. Die Berechnung von (2.26) und (2.27) wird in Aufgabe 2.12 durchgeführt.

Ein Beispiel für das Auftreten *homogener* Sättigung ist bei natürlicher Linienbreite gegeben. Erhöht man die Intensität I , so beobachtet man eine gleichmäßige, homogene Sättigung des Linienprofils (Abb. 2.6). Auch Linien, welche durch Gitterschwingungen verbreitert sind, z. B. beim Nd:YAG-Laser, zeigen ein derartiges Verhalten.

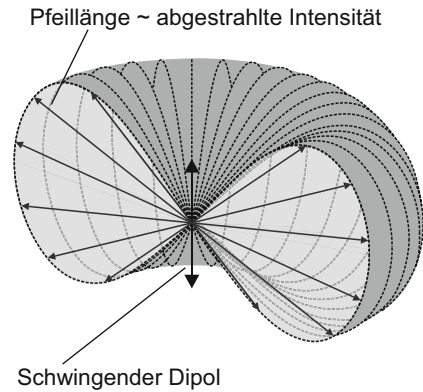
Anders ist das Verhalten der Sättigung bei *inhomogener* Verbreiterung von Linien, z. B. bei Dopplerverbreiterung. Jedes Atom (Molekül) in einem Gas ist durch eine bestimmte Geschwindigkeit v gekennzeichnet, die sich im Laufe der Zeit ändern kann. Aufgrund des Doppler-Effekts ergibt sich jeweils eine zugeordnete Übergangsfrequenz f . Wird nun Licht mit einer bestimmten Frequenz f_L eingestrahlt, so tritt nur eine Wechselwirkung mit Atomen passender Geschwindigkeit bzw. Frequenz auf, und es kommt zu einer selektiven Abnahme der Verstärkung im Bereich der Einstrahlungsfrequenz (hole burning, Abb. 2.7). Die Breite des Loches liegt im Bereich der natürlichen Linienbreite Δf_n oder der Stoßbreite Δf_S , falls diese größer ist. Das Loch wird nach dem Abschalten der Intensität wieder aufgefüllt. Das beschriebene Verhalten tritt bei Gaslasern, z. B. dem He-Ne- oder CO₂-Laser auf.

2.6 Lichtemission durch beschleunigte Elektronen

Licht entsteht durch Übergänge von Elektronen aus angeregten Zuständen mit der Energie E_2 in Atomen, Molekülen und Festkörpern in Zustände geringerer Energie E_1 . Wie in den vorangegangenen Abschnitten erläutert, wird die Differenzenergie in Form von Lichtquanten oder Photonen abgestrahlt. Quantenmechanisch bedeutet dies, dass sich während der Abstrahlung die Wellenfunktionen des Elektrons in den „stationären“ Zuständen überlagern, so dass sich eine räumliche Oszillation der Ladungsdichte mit der Frequenz $f_{12} = (E_2 - E_1)/h$ ergibt, die einem schwingenden elektrischen Dipol entspricht.

Die von einem solchen Dipol abgestrahlte Intensität ist in Abb. 2.8 dargestellt. Senkrecht zur Schwingungsrichtung ist die Abstrahlung maximal, in Schwingungsrichtung findet keine Abstrahlung statt. Bei der Abstrahlung durch ein einzelnes Atom gibt die

Abb. 2.8 Ausschnitt aus der rotationssymmetrischen Abstrahlcharakteristik eines schwingenden elektrischen Dipols



in Abb. 2.8 dargestellte Winkelverteilung die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Photon in eine bestimmte Richtung emittiert wird, wenn nacheinander viele Anregungs- und Emissionsprozesse stattfinden.

Die Winkelverteilung nach Abb. 2.8 setzt eine bestimmte Orientierung des emittierenden Dipols, z. B. eines Atoms, voraus. Sind viele Dipole oder Atome mit statistischer Orientierungsverteilung vorhanden oder ändert ein atomarer Dipol zwischen aufeinanderfolgenden Emissionsprozessen die Orientierung statistisch, so ergibt sich eine kugelsymmetrische Verteilung der emittierten Photonen.

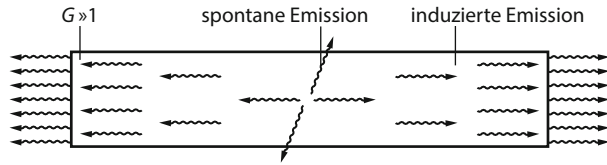
Die Oszillation einer Ladungsdichte stellt ein Beispiel für eine (nicht konstant) beschleunigte Bewegung dar. Auch Elektronen, die z. B. in einem Synchrotron auf einer Kreisbahn umlaufen, sind beschleunigte Ladungen, wobei die Beschleunigung eine Änderung der Richtung des Geschwindigkeitsvektors bedeutet, auch wenn der Betrag dieses Vektors konstant bleibt (Radialbeschleunigung). Die derart beschleunigten Elektronen in einem Synchrotron emittieren die „Synchrotronstrahlung“, die allerdings ein breites Spektrum besitzt, da keine oszillatorische Bewegung des Elektrons auf der Bahn vorliegt.

Elektronen können auch durch ein örtlich periodisches Magnetfeld (Undulator), das senkrecht zu ihrer Anfangs-Translationsgeschwindigkeit gerichtet ist, zu einer Oszillation bewegt werden. Dies führt dann zu einer Lichtemission bei einer entsprechenden Frequenz und kann zum Bau von Freie-Elektronen-Laser (FEL) ausgenutzt werden (siehe Kap. 11).

2.7 Aufbau von Lasern

In Lasern wird zunächst spontan emittiertes Licht durch induzierte Emission verstärkt. Damit die induzierten Emissionsprozesse überwiegen, und es damit zu den speziellen Eigenschaften der Laserstrahlung kommt, muss entweder der Verstärkungsfaktor des Materials bei einem Durchlauf groß genug sein (Superstrahler), oder aber es muss für einen mehrfachen Durchgang der Laserphotonen durch das verstärkende Material gesorgt werden. Dies führt zu der charakteristischen Laseranordnung aus aktivem Material und Spiegeln.

Abb. 2.9 Aufbau eines Superstrahlers



2.7.1 Superstrahlung

Ein Superstrahler kann als Vorstufe oder einfache Ausführungsform eines Lasers aufgefasst werden. Er besteht aus einem stabförmigen Material, in dem durch ein geeignetes Verfahren Überbesetzung erzeugt wird (Abb. 2.9). Zunächst finden spontane Emissionsprozesse in alle Richtungen statt. Die in Richtung der Stabachse emittierten Photonen laufen eine relativ große Wegstrecke durch das angeregte Medium und werden dabei verstärkt. Ist der Verstärkungsfaktor groß genug, so tritt in Vorwärtsrichtung intensives, gebündeltes Licht auf, das als Superstrahlung bezeichnet wird. Zum Beispiel arbeiten Stickstofflaser teilweise in dieser Betriebsart und sollten somit korrekter als N_2 -Superstrahler bezeichnet werden.

2.7.2 Laser: Schwellenbedingung

Die Verstärkung der meisten Materialien ist zu gering, um intensive Superstrahlung zu erreichen. Eine Erhöhung der Verstärkung kann z. B. durch Vergrößerung der Länge des laserfähigen Materials erreicht werden. Dem sind jedoch technische Grenzen gesetzt. Statt dessen wird das Material zwischen zwei parallele Spiegel gebracht (Abb. 2.10). Spontan in axialer Richtung emittiertes Licht wird in einer solchen Laseranordnung zunächst in dem Material verstärkt, wenn auch nur schwach. Nach Reflexion an den Spiegeln durchläuft das Licht das Material erneut und wird weiter verstärkt, so dass sich die Lichtintensität permanent erhöht, bis sich schließlich ein stationärer Gleichgewichtswert einstellt. Damit die Intensität zunächst anwächst, muss der Verstärkungsfaktor G so groß sein, dass die Verluste ausgeglichen werden können. Diese werden durch den Reflexionsgrad R der

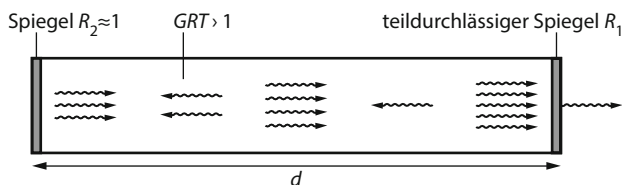


Abb. 2.10 Prinzipieller Aufbau eines Lasers: Ein spontan emittiertes Photon wird verstärkt. Die Photonlawine tritt teilweise als Laserstrahl durch den teildurchlässigen Spiegel aus

Spiegel und den Transmissionsfaktor T , welcher die sonstigen Verluste je Durchgang (z. B. Beugung, Streuung) angibt, beschrieben. Damit erhält man die so genannte Schwellenbedingung

$$\boxed{GRT \geq 1.} \quad (2.28)$$

Haben beide Spiegel unterschiedliche Reflexionsgrade R_1 und R_2 , ist statt R der geometrische Mittelwert

$$\boxed{R = \sqrt{R_1 R_2}} \quad (2.29)$$

einzusetzen.

Die Schwellenbedingung (2.28) lässt sich auch als Bedingung für die Differenz der Besetzungsdichte $N_2 - N_1$ an der Laserschwelle angeben. Man setzt für den Verstärkungsfaktor G die Gleichung (2.14) ein:

$$GRT = RT \exp \sigma (N_2 - N_1) d, \quad (2.30)$$

wobei σ den Wirkungsquerschnitt für stimulierte Emission und d die Länge des Lasermediums darstellen. Für die Schwelleninversion erhält man mit der Näherung $\ln 1/x \approx 1 - x$ für $x \approx 1$:

$$\boxed{N_2 - N_1 \geq \frac{\ln(1/RT)}{\sigma d} \approx \frac{1 - RT}{\sigma d}.} \quad (2.31)$$

Die Näherung im letzten Teil der Gleichung gilt für kleine Verluste, d. h. $RT \approx 1$. Bei Festkörperlasern (z. B. Nd:YAG) liegt der Schwellwert für die Besetzung der oberen Niveaus bei $N_2 \approx 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, bei Gaslasern sind kleinere, bei Halbleiter- und Farbstofflasern größere Werte möglich.

In allen Gleichungen wurde eine unterschiedliche Entartung der Niveaus nicht berücksichtigt. Dies kann durch Ersetzen von $N_2 - N_1$ durch $N_2 - (g_2/g_1) N_1$ korrigiert werden.

2.7.3 Stationärer Laserbetrieb

Der Laserstrahl wird durch einen teildurchlässigen Spiegel ($R_1 < 100\%$) aus dem Resonator ausgekoppelt. Der andere Spiegel soll möglichst mit $R_2 = 100\%$ reflektieren.

Im folgenden wird die Intensität der Laserstrahlung für den stationären Fall berechnet. Dieser Fall ergibt sich dadurch, dass die Anfangsverstärkung G auf die stationäre Verstärkung G_L absinkt, die im Falle homogener Linienverbreiterung nach (2.26) gegeben ist durch:

$$G_L = \exp(gd) = \exp \frac{g_0 d}{1 + I/I_S}. \quad (2.32)$$

Die Bedingung für den stationären Fall lautet:

$$G_L RT = 1 . \quad (2.33)$$

Die stationäre Intensität im Resonator ergibt sich daraus zu:

$$I = I_S \left(\frac{g_0 d}{\ln(1/RT)} - 1 \right) . \quad (2.34)$$

Für kleine Verstärkungen $1 + gd \approx 1$, und $RT \approx 1$ ergibt sich näherungsweise (mit $\ln 1/x \approx 1 - x$):

$$I \approx I_S \left(\frac{g_0 d}{1 - RT} - 1 \right) . \quad (2.35)$$

In der Gleichung bedeuten I_S die Sättigungintensität, g_0 den Verstärkungskoeffizienten bei kleinen Signalen, d die Länge des aktiven Mediums, T den Transmissionsfaktor und R den Reflexionsgrad nach (2.29).

Die Intensität der ausgekoppelten Laserstrahlung I_{out} ist durch

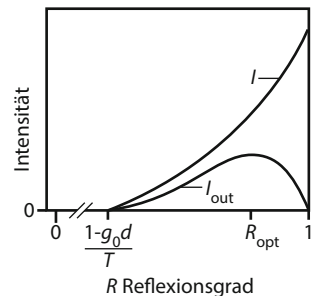
$$I_{\text{out}} = \frac{I}{2} (1 - R_1) \approx I (1 - R) \quad (2.36)$$

gegeben. Der Faktor $\frac{1}{2}$ gibt an, dass sich die Gesamtintensität I aus den Teilintensitäten von zwei Wellen zusammensetzt, die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung im Resonator besitzen. Für die Gültigkeit der Näherung im letzten Teil der Gleichung wurde $R_2 = 1$ und $R_1 \approx 1$ angenommen, so dass $R = \sqrt{R_1} \approx (1 + R_1)/2$ gilt.

Die Gleichungen (2.35) und (2.36) können benutzt werden, um die Ausgangsintensität eines Lasers abzuschätzen, wenn der Verstärkungskoeffizient g_0 und die Sättigungintensität I_S aus Messungen bekannt sind. Die Größen g_0 und I_S können auch aus den Besetzungszahlen und den Wirkungsquerschnitten bzw. den Einstein-Koeffizienten bestimmt werden.

In Abb. 2.11 ist die Abhängigkeit der Intensitäten I und I_{out} vom Reflexionsgrad $R = \sqrt{R_1}$ dargestellt. Es existiert ein optimaler Reflexionsgrad R_{opt} für den Spiegel zur Aus-

Abb. 2.11 Abhängigkeit der internen Intensität I in einem Laserresonator und der Ausgangsintensität I_{out} vom Reflexionsgrad $R = \sqrt{R_1}$. Dabei ist $R_2 = 1$ angenommen



kopplung maximaler Laserleistung. Für He-Ne-Laser liegt der optimale Reflexionsgrad R_1 zwischen 95 und 99 %, bei Festkörperlasern bei 20 bis 90 % und bei hochverstärkenden Excimerlasern bei etwa 5 %.

2.8 Zeitliches Emissionsverhalten, Ratengleichungen

Zur Beschreibung des zeitlichen Emissionsverhaltens von Lasern, z. B. im Pulsbetrieb, werden Raten- oder Bilanzgleichungen für die Besetzungsdichten der beteiligten Niveaus und die Photonendichte im Resonator verwendet. Man unterscheidet zwischen Drei- und Vierniveau-Lasern (Abb. 2.12). Eines der wenigen wichtigen Dreiniveau-Systeme ist der Rubinlaser. Bei Festkörperlasern ist das Niveau 3 in beiden Fällen ein breites Absorptionsband, welches die Energie schnell auf das obere Laserniveau 2 überträgt ($\tau_{32} \ll \tau_{21}$).

Der Nachteil der *Dreineiveau-Laser* liegt darin, dass das untere Laserniveau der Grundzustand ist. Damit muss sehr stark gepumpt werden, um eine Inversion zu erzielen.

Günstiger sind *Vierniveau-Systeme*, weil das untere Laserniveau weiter zerfallen kann, z. B. beim Nd-Laser. Die Bilanzgleichung für die Besetzungsdichte N_1 des Grundzustandes lautet:

$$\frac{dN_1}{dt} = - \left. \frac{dN_1}{dt} \right|_a + \underbrace{\frac{N_2}{\tau_{21}} + \left. \frac{dN_2}{dt} \right|_i}_{\text{vom oberen Niveau}} - \frac{N_1}{\tau_{10}}$$

- Absorption
+ spont. Emission
+ induz. E.
- spont. Zerfall

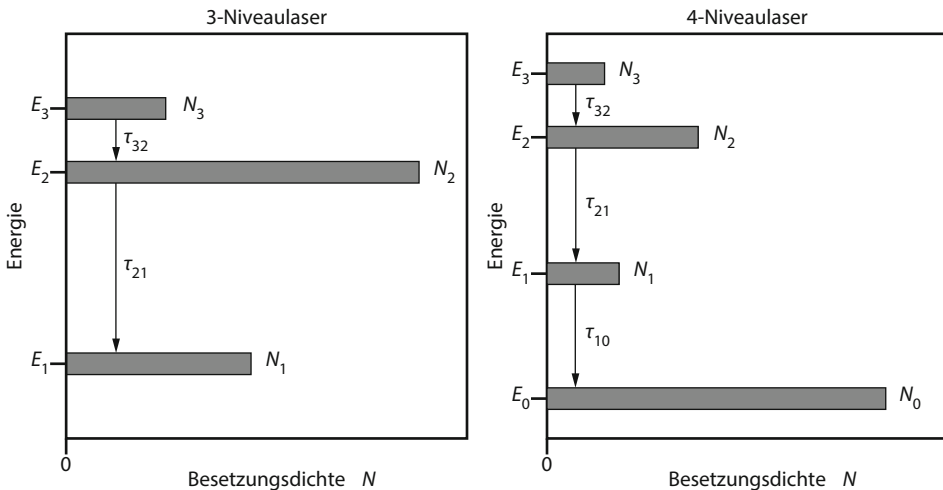


Abb. 2.12 Drei- und Vierniveau-Laser: Energieniveaus $E_0 \dots E_3$ und Besetzungsdichten $N_0 \dots N_3$

Nach Einführung der Photonendichte Φ [(1.5) und (1.7)]

$$\phi = \Phi c \quad (2.37)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.4) und (2.10)

$$\frac{dN_1}{dt} = \sigma \cdot c (N_2 - N_1) \Phi + \frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{N_1}{\tau_{10}} . \quad (2.38)$$

Dabei sind: ϕ = Stromdichte der Photonen (Zahl der Photonen/Zeit · Fläche), Φ = Photonendichte (Zahl der Photonen/Volumen), c = Lichtgeschwindigkeit, $N_{1,2}$ = Dichte der Atome im unteren (1) und oberen Zustand (2) (Atome/Volumen), σ = Wirkungsquerschnitt für induzierte Emission und Absorption (Fläche), τ = Lebensdauer für spontane Emission zwischen den jeweiligen Zuständen 0, 1, 2 (Zeit). Für das obere Laserniveau gilt unter der Annahme, dass das Pumpniveau sehr schnell zerfällt ($N_3 \approx 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} &= + \left| \frac{dN_1}{dt} \right|_a - \frac{N_2}{\tau_2} - \left| \frac{dN_2}{dt} \right|_i + W_p N_0 \\ &\quad + \text{Absorption} - \text{spontane E.} - \text{induz. E.} + \text{Pumprate} \\ &= -\sigma c (N_2 - N_1) \Phi - \frac{N_2}{\tau_2} + W_p N_0 . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dabei ist W_p die normierte Pumprate (Zahl der Photonen/Zeit). Das Produkt $W_p N_0$ gibt an, wie viele Teilchen pro Zeit- und Volumeneinheit in das obere Laserniveau angeregt werden. Die Größe $\tau_2 = (1/\tau_{21} + 1/\tau_{20})^{-1}$ ist die Lebensdauer des oberen Niveaus E_2 .

Die Summe der Besetzungsdichten N ist gleich der Dichte der Laseratome (z. B. $1,4 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ für Nd:YAG-Laser):

$$N = N_0 + N_1 + N_2 . \quad (2.40)$$

Die Gleichung für die Photonendichte Φ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= - \left| \frac{dN_1}{dt} \right|_a + \frac{\eta N_2}{\tau_{21}} + \left| \frac{dN_2}{dt} \right|_i - \frac{\Phi}{\tau_r} . \\ &\quad - \text{Absorption} + \text{spont. E.} + \text{induz. E.} - \text{Abstrahlung} \end{aligned}$$

Dabei ist η der Teil der spontanen Emission, welcher in axialer Richtung strahlt. Da das Licht in einem Laser vorwiegend durch induzierte Emission erzeugt wird, kann die spontane Emission vernachlässigt werden. Mit (2.4) und (2.10) erhält man:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sigma c (N_2 - N_1) \Phi - \frac{\Phi}{\tau_r} . \quad (2.41)$$

Die Abstrahlung (ausgekoppelter Laserstrahl) und sonstigen Resonatorverluste sind dabei charakterisiert durch die Lebensdauer eines Photons im Resonator

$$\tau_r = \frac{d}{c(1-RT)} . \quad (2.42)$$

Hierbei ist die Länge d des aktiven Mediums gleich der Resonatorlänge angenommen.

Bei einem ideal arbeitenden Vierniveau-Laser ist die Lebensdauer τ_{10} des unteren Niveaus sehr kurz, so dass $N_1 \approx 0$ und $N = N_0 + N_2$ ist. Die Änderung der Besetzungsdichte des oberen Laserniveaus ist gegeben durch die Pumprate abzüglich der spontanen Emission und abzüglich der stimulierten Emission:

$$\frac{dN_2}{dt} \approx W_p N_0 - \frac{N_2}{\tau_2} - N_2 \sigma c \Phi \quad (2.43)$$

Die Photonendichte Φ wird verringert durch den ausgekoppelten Laserstrahl (plus andere Verluste) und erhöht durch die stimulierte Emission:

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx -\frac{\Phi}{\tau_r} + N_2 \sigma c \Phi . \quad (2.44)$$

Diese Gleichungen stellen ein gekoppeltes nichtlineares System dar, das keine allgemeine einfache Lösung besitzt. Es soll daher zunächst die stationäre Lösung und dann eine Näherung für kleine dynamische Abweichungen angegeben werden. Genauere, zeitabhängige numerische Lösungen für Puls laser werden im Kap. 17 diskutiert.

2.8.1 Stationäre Lösung der Ratengleichungen

Im stationären Fall mit

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

ergibt sich aus (2.44), wobei der Index s stationär abkürzt:

$$N_{2s} = \frac{1}{\tau_r c \sigma} = \frac{1-RT}{\sigma d} . \quad (2.45)$$

Dies entspricht der Schwellwertbedingung (2.31) unter der Voraussetzung $N_1 \approx 0$. Die stationäre Photonendichte folgt mit $dN_2/dt = 0$ aus (2.43):

$$\Phi_s = \frac{W_p N_{0s} - N_{2s}/\tau_2}{N_{2s} \sigma c} .$$

Einsetzen von (2.45) ergibt

$$\Phi_s = \tau_r N_{0s} (W_p - W_E) \approx \tau_r N (W_p - W_E) . \quad (2.46)$$

Dabei ist die stationäre Teilchendichte im Grundzustand N_{0s} bei vielen Vierniveau-Lasern etwa gleich der Gesamtteilchendichte N , da nur relativ wenige Atome angeregt werden. Die Einsatzpumprate W_E (Zahl der Photonen/Zeit) ist in (2.46) gegeben durch

$$W_E = \frac{N_{2s}}{N_{0s}} \frac{1}{\tau_2} . \quad (2.47)$$

Dies bedeutet, dass folgender Wert

$$W_E N_{0s} = N_{2s} / \tau_2$$

von Atomen (pro Volumen und Zeit) in das obere Laserniveau gepumpt werden muss, um die Laserschwelle zu erreichen.

Nach (2.46) steigt die Photonendichte Φ_s oberhalb der Schwellpumprate W_E linear mit der Pumprate W_p an. Daraus folgt für die Ausgangsleistung P , die in einer Strahlquerschnittsfläche A emittiert wird:

$$I = P/A = (1 - R) h f c \Phi_s \sim W_p - W_E . \quad (2.48)$$

Eine derartige lineare Abhängigkeit wird z. B. bei Festkörperlaser beobachtet, bei denen W_p der Anregungsleistung bzw. Anregungsenergie der Pumplichtquelle proportional ist. Auch bei Halbleiterlasern ist (2.48) anwendbar, wobei dort W_p proportional zum Anregungsstrom ist.

Gleichung (2.48) entspricht der früher abgeleiteten Gleichung (2.35). In beiden Fällen steigt die Intensität I des Laserstrahls oberhalb einer Schwelle mit der Pumprate an, wenn angenommen wird, dass der Verstärkungskoeffizient g_0 proportional zu W_p ist.

2.8.2 Schwache Relaxationsschwingungen

Die Bilanzgleichungen (2.43) und (2.44) für die Besetzungszahl N_2 des oberen Laserniveaus und die Photonendichte Φ sollen nun für den Fall gelöst werden, dass Abweichungen von den stationären Werten auftreten:

$$N_2 = N_{2s} + n , \quad N_0 = N_{0s} - n , \quad (2.49)$$

$$\Phi = \Phi_s + \phi . \quad (2.50)$$

Solche Abweichungen treten z. B. auf, wenn im Laser eine kurzzeitige Störung auftritt. Es ist dann die Frage, wie schnell sich die Photonenzahl wieder auf den stationären Wert einstellt. Auch beim Einschalten von Lasern treten Ausgleichsvorgänge auf.

Tab. 2.3 Zeitkonstanten ω und δ der Besetzungszahlrelaxation bei $W_p/W_E = 2$

Lasertyp	$\delta \approx 1/\tau_2$ (s ⁻¹)	R	d (cm)	$1/\tau_r$ (s ⁻¹)	ω (Hz)	Schwingung
He-Ne	10^8	0,99	10	$3 \cdot 10^7$	$5 \cdot 10^7$	Nein
Nd:YAG	$4 \cdot 10^3$	0,5	10	$1,5 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^6$	Ja
GaAs	$2 \cdot 10^8$	0,3	0,02	10^{12}	$2 \cdot 10^{10}$	Ja

Zunächst werden die Abweichungen n und ϕ (im Folgenden nicht mit der Photonenflußdichte ϕ verwechseln) von den stationären Werten als klein angenommen. Dann folgt durch Einsetzen von (2.49) und (2.50) in (2.43) und (2.44) unter Berücksichtigung von (2.45) näherungsweise (Linearisierung):

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= - \left(W_p + \frac{1}{\tau_2} + \sigma c \Phi_s \right) n - N_{2s} c \sigma \phi \\ &= -W_p \left(1 + \frac{N_{0s}}{N_{2s}} \right) n - \phi / \tau_r . \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = c \sigma \Phi_s n . \quad (2.52)$$

Elimination von ϕ aus (2.51) ergibt:

$$\frac{d^2 n}{dt^2} + 2\delta \frac{dn}{dt} + \omega^2 n = 0 \quad (2.53)$$

mit der Dämpfungskonstanten

$$\delta = \frac{1}{2} W_p \left(1 + \frac{N_{0s}}{N_{2s}} \right) \approx \frac{1}{2\tau_2} \cdot \frac{W_p}{W_E} \quad (2.54)$$

und der Relaxationsfrequenz

$$\omega = \sqrt{c \sigma \Phi_s / \tau_r} = \sqrt{\frac{1}{\tau_2 \tau_r} \left(\frac{W_p}{W_E} - 1 \right)} . \quad (2.55)$$

In (2.54) ist $N_{0s} \gg N_{2s}$ angenommen wie für einen Vierniveau-Laser üblich. Gleichung (2.53) beschreibt gedämpfte Schwingungen. Der Charakter der Lösung ist von der relativen Größe von δ und ω abhängig. Die Größen δ und ω sollen daher für typische Gas-, Festkörper- und Diodenlaser abgeschätzt werden. Dabei wird $W_p/W_E = 2$ angenommen und τ_r nach (2.42) berechnet. τ_2 wird Tab. 2.1 entnommen, die Ergebnisse für δ und ω zeigt Tab. 2.3.

Für $\delta \geq \omega$, also für das Beispiel des Gaslasers, ergeben sich monoton abfallende Lösungen von (2.53). Für $\delta < \omega$, also für Nd:YAG-Festkörperlaser und Diodenlaser, ergeben sich gedämpfte Oszillationen für n :

$$n = n_{\max} \exp(-\delta t) \cos \sqrt{\omega^2 - \delta^2} t . \quad (2.56)$$

Der Wert von n_{\max} ist z. B. der Anfangswert einer kleinen Störung, die eine Relaxationsschwingung auslöst. Für die Photonendichte $\Phi = \Phi_s + \phi$ ergeben sich nach (2.52) ähnliche Oszillationen.

2.8.3 Starke Relaxationsschwingungen, Spikes von Lasern

Die Oszillationen der Photonendichte können auch nach (2.44) in verbesserter Näherung berechnet werden. Mit $N_2 = N_{2s} + n$ und der Schwellenwertbedingung (2.45) $N_{2s}\sigma c = 1/\tau_r$ ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{dt} \approx n\sigma c\Phi. \quad (2.57)$$

Gleichung (2.56) soll hier unter Vernachlässigung der Dämpfung verwendet werden:

$$n(\delta = 0) = n_{\max} \cos \omega t. \quad (2.58)$$

Einsetzen in (2.57) und Integration ergibt:

$$\Phi \approx \Phi_s \exp\left(\frac{c\sigma n_{\max}}{\omega} \sin \omega t\right). \quad (2.59)$$

Dabei ist Φ_s die stationäre Photonendichte nach (2.50) vor der Anregung der Relaxationsschwingung. Dieses Ergebnis zeigt, dass die Relaxationsschwingungen in der Photonendichte bei genauerer Rechnung nicht sinusförmig moduliert sind, sondern dass bei genügend großen Schwankungen n_{\max} der Besetzungszahl die Photonendichte Φ in Form von Spitzen oder Spikes oszilliert. Die Höhe eines Spikes ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_{\max} &= \Phi_s \exp\left(\frac{c\sigma}{\omega} n_{\max}\right) \\ &= \Phi_s \exp\left(\frac{p}{\omega \tau_r}\right) \quad \text{mit} \quad p = \frac{n_{\max}}{N_{2s}} \end{aligned}$$

und die Breite durch

$$t_s = 2\sqrt{\frac{2 \ln 2}{\omega c \sigma n_{\max}}} = 2\sqrt{\frac{2 \ln 2 \tau_r}{p\omega}}.$$

Als Beispiel ergibt sich mit $p = 1\%$ und den oben angegebenen Zahlenwerten $\tau_r \approx 7 \cdot 10^{-10}$ s und $\omega = 4 \cdot 10^6$ Hz eine maximale Photonendichte $\Phi_{\max} = 40\Phi_s$ und eine Spikebreite von $t_s = 3 \cdot 10^{-7}$ s. Die Spikebreite t_s ist wesentlich kleiner als die Spikefolgezeit $2\pi/\omega \approx 1,5 \cdot 10^{-6}$ s. Geringe Fluktuationen der Besetzungszahl führen also zu starken Änderungen der Photonendichte und damit der Ausgangsleistung.

2.8.4 Auftreten von Relaxationsschwingungen, Spikes

Die Bilanzgleichungen (2.43) und (2.44) werden benutzt, um die Relaxationsoszillationen beim Einschalten von kontinuierlichen Lasern und die Spikeemission von gepulsten Festkörperlasern zu erklären. Gleichung (2.59) stellt dafür eine grobe Näherung dar. Zur genauen Beschreibung sind jedoch numerische Lösungen der Bilanzgleichungen notwendig, die in Kap. 17 besprochen werden.

Die Bilanzgleichungen und deren Lösungen sind in diesem Abschnitt in starker Anlehnung an die Verhältnisse beim 4-Niveau-Festkörperlaser besprochen worden, z. B. für Nd:YAG-Laser. Ähnliche Bilanzgleichungen lassen sich jedoch auch für den Rubinlaser, einen 3-Niveau-Festkörperlaser, aufstellen. Auch der Rubinlaser zeigt im Pulsbetrieb ausgeprägte, teilweise chaotische Relaxationsschwingungen oder Spikes.

Auch Diodenlaser zeigen Relaxationsschwingungen, die z. B. bei der schnellen Modulation dieser Laser für die Nachrichtenübertragung zu vermeiden sind.

2.9 Aufgaben

2.1 Man beweise: Die Integration von $dI = -\alpha I(x)dx$ (2.2) ergibt $I = I_0 \exp(-\alpha d)$ (2.1).

2.2 In einem 5 cm langen Nd-Laserkristall tritt Strahlung mit einer Leistung von 1 W ein und mit 3 W aus. Wie groß sind

- (a) der Verstärkungsfaktor G und
- (b) die differentielle Verstärkung g ?

2.3 Ein Lasermedium besitzt eine differentielle Verstärkung von $0,05 \text{ cm}^{-1}$. Um welchen Faktor wird das Licht nach 12 cm verstärkt?

2.4 Ein 1 m langer He-Ne-Laser erreicht einen Verstärkungsfaktor von $G = 1,1$. Wie groß ist die differentielle Verstärkung?

2.5 Das obere Niveau eines He-Ne-Lasers hat eine Lebensdauer von 20 ns, das untere von 12 ns. Wie groß ist die natürliche Linienbreite? Vergleichen Sie den Wert mit der Stoß- und Dopplerverbreiterung aus der Literatur.

2.6 Berechnen Sie die Dopplerverbreiterung im He-Ne-Laser (bei 100°C) und vergleichen Sie das Ergebnis mit der gemessenen Linienbreite von 1,5 GHz.

2.7 Ein Farbstofflaser (Rh6G) besitzt eine Linienbreite von 80 THz. Die Mittenwellenlänge liegt bei $0,60 \mu\text{m}$. Berechnen Sie die maximale und minimale Wellenlänge des Laserstrahles.

2.8 Man berechne den optimalen Reflexionsgrad R_{opt} des Auskoppelspiegels, der bei einem Laser mit homogener Linienverbreiterung und schwacher Verstärkung zu maximaler Ausgangsleistung führt. Man berechne R_{opt} numerisch für einen kontinuierlichen Miniatur-YAG-Laser mit $g_0 d = 0,2$; $T = 0,98$; $I_S = 10 \text{ W/cm}^2$. Man gebe außerdem die Leistungsdichte im und außerhalb des Resonators sowie die Ausgangsleistung bei einer Strahlquerschnittsfläche von 1 mm^2 an.

2.9 Welchen minimalen Reflexionsgrad müssen die Spiegel eines 50 cm langen He-Ne-Lasers mindestens haben, damit die rote bzw. die grüne Linie anschwingt? Die differentielle Verstärkung beträgt $0,1 \text{ m}^{-1}$ bzw. $0,005 \text{ m}^{-1}$.

2.10 Es soll gezeigt werden, dass der durch den Dopplereffekt inhomogen verbreiterte Verstärkungskoeffizient dünner Gase durch eine Gauß-Funktion gegeben ist [(2.24) und (2.25)]. Die Verstärkungsfrequenzbreite eines Gasteilchens (Masse m , Resonanzfrequenz ν_{12}) werde als beliebig klein angenommen. Man gehe von der Maxwellverteilung der Gasteilchen aus, welche die Anzahl der Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeitskomponente u beschreibt:

$$p(u) \propto \exp\left(-\frac{mu^2}{2kT}\right).$$

2.11 Gegeben sei ein 2-Niveau-System (Gesamtbesetzungszahlen N_a, N_b), in dem die Energieniveaus g_a - und g_b -fach entartet sind. Man berechne das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte und Einsteinkoeffizienten für Absorption und induzierte Emission. Wie ist dieses Verhältnis für einen Übergang zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand des Wasserstoffatoms?

2.12

- (a) Man berechne für einen Vierniveau-Laser im stationären Zustand die Besetzungsdichte N_2 des oberen Laserniveaus unter der Annahme, dass das untere Laserniveau sehr schnell zerfällt ($N_1 = 0$). Es ist möglich, (2.43) zu benutzen.
- (b) Man beweise mit dem Ergebnis (2.26) und (2.27).

Weiterführende Literatur

1. Yariv A, Yeh P (2006) Photonics. Oxford University Press
2. Bäuerle D (2008) Laser: Grundlagen und Anwendungen in Photonik, Technik, Medizin und Kunst. Teubner, Stuttgart
3. Reider G (2005) Photonik. Springer, Berlin
4. Dolus R (2010) Photonik: Physikalisch-technische Grundlagen der Lichtquellen, der Optik und des Lasers. Oldenbourg, München



<http://www.springer.com/978-3-642-41437-4>

Laser

Bauformen, Strahlführung, Anwendungen

Eichler, H.J.; Eichler, J.

2015, XI, 491 S. 297 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-642-41437-4