# 1 Einführung in die Maßtheorie

Das Lebesgue-Maß $\lambda$ einer im $\mathbb{R}^d$ definierten reellen Funktion wird in der Analysis als Einschränkung einer Mengenfunktion $\mu_L^*$ (des sog. äußeren Lebesgue-Maßes) auf eine Mengenfamilie erklärt, über der $\mu_L^*$ (und damit $\lambda$) additiv ist. Dieses Vorgehen läßt sich auf allgemeinere Räume übertragen und spiegelt den historischen Zugang zur Maßtheorie wider, in der die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie verankert ist. Die nachfolgend genannten Konzepte dienen somit auch der formalen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

## 1.1 Ringe und Algebren

**Definition 1.1.1** (Mengenringe und Algebren) *Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine nicht leere Familie $\mathcal{R}$ von Teilmengen von $X$ heißt* ***Mengenring****, falls mit je zwei Teilmengen $A$ und $B$ auch deren Differenz $A \setminus B$ und Vereinigung $A \cup B$ zu $\mathcal{R}$ gehören. Ein Mengenring enthält stets die leere Menge als Differenz $A \setminus A$ (für $A \in \mathcal{R}$). Im Falle $X \in \mathcal{R}$ wird $\mathcal{R}$ als* ***Mengenalgebra*** *bezeichnet. Ist nicht nur jede endliche, sondern auch jede abzählbare Vereinigung von Elementen von $\mathcal{R}$ in $\mathcal{R}$ enthalten, so spricht man von einem* ***σ-Ring*** *bzw. – im Falle $X \in \mathcal{R}$ – von einer* ***σ-Algebra***[1].

Ein System von Teilmengen einer Menge $X$, das mit je zwei Elementen auch deren Durchschnitt enthält, nennt man naheliegenderweise **durchschnittsstabil**.

**Definition 1.1.2** (Zerlegbare Systeme) *Ein durchschnittsstabiles Mengensystem $\mathcal{Q}$ mit $\emptyset \in \mathcal{Q}$, in dem die Differenz zweier Elemente stets als endliche disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{Q}$ darstellbar ist, heißt* ***zerlegbares System*** *oder* ***Halbring****.*

[1] Wenn im Folgenden die Rede von einem Ring oder einer Algebra ist, so soll darunter stets ein Mengenring bzw. eine Mengenalgebra zu verstehen sein

D. Baum, *Grundlagen der Warteschlangentheorie*, Springer-Lehrbuch Masterclass,
DOI 10.1007/978-3-642-39632-8_1, 

Offenbar ist jeder Mengenring $\mathcal{R}$ zerlegbar, denn zum einen kann mit zwei Elementen $A, B$ der Durchschnitt in der Form $A \cap B = (A \cup B) \setminus \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big)$ geschrieben werden (da die Differenz zweier Elemente per definitionem zum Ring gehört), zum anderen ist für eine beliebige Menge $M \in \mathcal{R}$ (also z. B. $A \cap B$ für $A, B \in \mathcal{R}$) die Differenz $A \setminus B$ schreibbar als $A \setminus B = (A \setminus M) \cup (M \setminus B)$.

**Definition 1.1.3** (Erzeugendensysteme) *Ein System $\mathcal{N}$ von Teilmengen von X heißt ein den Ring $\mathcal{R}$* ***erzeugendes Mengensystem****, falls $\mathcal{R}$ die kleinste $\mathcal{N}$ enthaltende Mengenfamilie mit den Eigenschaften eines Ringes ist. Man schreibt in diesem Falle $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{N})$.* $\boldsymbol{\mathcal{R}(\mathcal{N})}$ *heißt* ***der von $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ erzeugte Ring****. Gleiches gilt für den Fall, daß $\mathcal{N}$ alle abzählbaren Vereinigungen seiner Elemente enthält, also für σ-Ringe bzw. σ-Algebren, wobei wir die Notationen* $\boldsymbol{\sigma(\mathcal{N})}$ *oder* $\boldsymbol{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{N})}$ *für* ***die von $\boldsymbol{\mathcal{N}}$ erzeugte σ-Algebra*** *benutzen.*

**Definition 1.1.4** ($\sigma$-Operator) *Es bezeichne $\mathfrak{A}(X)$ die Gesamtheit aller $\sigma$-Algebren und $\mathfrak{N}(X)$ die Gesamtheit aller Systeme von Teilmengen von X. Der Operator $\sigma : \mathfrak{N}(X) \to \mathfrak{A}(X)$, der jedem Teilmengensystem $\mathcal{N} \in \mathfrak{N}(X)$ ($\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$[2]) die von $\mathcal{N}$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{N})$ zuordnet, wird als* ***σ-Operator über*** $\boldsymbol{\mathfrak{N}(X)}$ *bezeichnet.*

Der Durchschnitt beliebig vieler Ringe ist offenbar wieder ein Ring. Demgemäß läßt sich ein von einem Teilmengensystem $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$ erzeugter $\sigma$-Ring (eine $\sigma$-Algebra) auch als Durchschnitt aller $\mathcal{N}$ enthaltenden $\sigma$-Ringe ($\sigma$-Algebren) definieren. Der $\sigma$-Operator besitzt folgende leicht nachweisbare Eigenschaften:

- $\sigma(\mathcal{N}) = \bigcap_{\mathcal{A}_\sigma \in \mathfrak{A}_\mathcal{N}} \mathcal{A}_\sigma$ für $\mathfrak{A}_\mathcal{N} = \left\{\mathcal{A}_\sigma \in \mathfrak{A}(X) : \mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}_\sigma\right\}$
- $\mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{N})$
- $\sigma(\mathcal{N}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ für $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$
- $\sigma\big(\sigma(\mathcal{N})\big) = \sigma(\mathcal{N})$.

**Beispiele** 1. Die nur aus der leeren und der ganzen Menge $X$ bestehende Familie ist die triviale Mengenalgebra.
2. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge $X$ formt die umfassendste $\sigma$-Algebra in $X$.
3. Die Menge aller linksseitig halboffenen Intervalle der reellen Achse[3] formt wegen

$$(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = \big(\max\{a_1, a_2\}, \min\{b_1, b_2\}\big],$$

$$(a_1, b_1] \setminus (a_2, b_2] = \begin{cases} (a_1, a_2], & \text{falls } a_1 \le a_2 \le b_1 \le b_2, \\ (b_2, b_1], & \text{falls } a_2 \le a_1 \le b_2 \le b_1, \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

ein zerlegbares System.

[2] Für einen Raum $X$ bezeichnet $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge, d. h. die Menge aller Teilmengen von $X$.
[3] $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$; entsprechende Notation $(a, b)$, $[a, b)$, $[a, b]$ für offene, rechtsseitig halboffene oder geschlossene Intervalle.

4. $\{\emptyset, M, M^c, X\}$ ist die kleinste Mengenalgebra, die $M \subset X$ enthält.
5. Die Familie $\mathcal{A} = \left\{\bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j] : m \in \mathbb{N}_0,\ a_j, b_j \in \bar{\mathbb{R}},\ a_j < b_j\right\}$ aller endlichen Vereinigungen linksseitig offener Intervalle auf der reellen Achse bildet zusammen mit der leeren Menge eine Mengenalgebra. Es ist die kleinste Algebra, die alle halboffenen Intervalle dieser Form enthält.

Seien $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$, $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N})$ der von $\mathcal{N}$ erzeugte $\sigma$-Ring, $A \subset X$ und $\odot$ eine beliebige Mengenoperation; wir benutzen folgende Notation: $\{N \odot A : N \in \mathcal{N}\} = \mathcal{N} \odot A$.

**Lemma 1.1.1** *Für eine Familie $\mathcal{N} \subset \mathfrak{P}(X)$ sowie eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ gilt*

$$\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N} \cap A).$$

*Beweis* Es ist leicht zu sehen, daß $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A$ einen $\sigma$-Ring bildet, und da offenbar $\big(\mathcal{N} \cap A\big) \subset \big(\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A\big)$ ist, folgt $\big(\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N}) \cap A\big) \supseteq \big(\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{N} \cap A)\big)$. □

**Lemma 1.1.2** *$\mathcal{R}_\sigma^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ seien $\sigma$-Ringe mit $\mathcal{R}_\sigma^{(1)} \subset \mathcal{R}_\sigma^{(2)}$, $A \subseteq X$ beliebig; dann ist*

$$\mathcal{F} = \left\{(R^{(1)} \cup R^{(2)}) \setminus A : R^{(1)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(1)}, R^{(2)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(2)}\right\}$$

*ein $\sigma$-Ring.*

*Beweis* Offenbar ist $\emptyset \in \mathcal{F}$. Für Elemente $E_i = (R_i^{(1)} \cup R_i^{(2)}) \setminus A$ aus $\mathcal{F}$ $(i = 1, 2)$ gilt

1. $E_1 \cup E_2 = (R_1^{(1)} \cup R_2^{(1)}) \cup \big((R_1^{(2)} \setminus A) \cup (R_2^{(2)} \setminus A)\big) = (\tilde{R}^{(1)} \cup \tilde{R}^{(2)}) \setminus A$ mit $\tilde{R}^{(i)} = R_1^{(i)} \cup R_2^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, also $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$.

2. $R_i^{(1)} \cup R_i^{(2)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(2)}$ wegen $\mathcal{R}_\sigma^{(1)} \subset \mathcal{R}_\sigma^{(2)}$; daher folgt $(R_i^{(1)} \cup R_i^{(2)}) \setminus A = \hat{R}_i^{(2)} \setminus A$, also $E_1 \setminus E_2 = (\emptyset \cup \hat{R}_i^{(2)}) \setminus A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F}$ ist ein Ring.

3. Für Elemente $E_n = (R_n^{(1)} \cup R_n^{(2)}) \setminus A$ für $n \in \mathbb{N}$ aus $\mathcal{F}$ folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{F}$, da $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(R_n^{(1)} \cup R_n^{(2)}) = \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n^{(1)}\big) \cup \big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n^{(2)}\big) = \bar{R}^{(1)} \cup \bar{R}^{(2)}$ mit $\bar{R}^{(j)} \in \mathcal{R}_\sigma^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ $\Longrightarrow \mathcal{F}$ ist ein $\sigma$-Ring. □

Die Aussagen dieser beiden Lemmata werden später benötigt. Wir wenden uns speziell den $\sigma$-Algebren zu: Da mit je zwei Teilmengen immer auch Differenz und Vereinigung Elemente einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ sind, liegt mit jeder Teilmenge $M$ stets auch das Komplement $M^c = X \setminus M$ in $\mathcal{A}_\sigma$. Umgekehrt kann jede Differenz $A \setminus B$ als Komplement einer Vereinigung geschrieben werden: $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$; daher wird eine $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ auch durch folgende Eigenschaften beschrieben:

- $X \in \mathcal{A}_\sigma$, $\emptyset \in \mathcal{A}_\sigma$
- $M \in \mathcal{A}_\sigma \Longrightarrow M^c = (X \setminus M) \in \mathcal{A}_\sigma$
- $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_\sigma \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathcal{A}_\sigma$.

Man ersieht zudem aus $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n^c\right)^c$, daß $\mathcal{A}_\sigma$ gegenüber abzählbaren Durchschnitten abgeschlossen ist.

Die von der Familie $\mathcal{O}_X$ aller offenen Teilmengen eines topologischen Raumes $[X, \mathcal{O}_X]$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{O}_X)$ bezeichnet man als **Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$** von $X$. Aufgrund der Charakteristika der $\sigma$-Algebren und der Definition abgeschlossener Mengen als Komplemente offener Mengen ist $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$ auch als die vom System $\mathcal{C}_X$ aller abgeschlossenen Mengen erzeugte $\sigma$-Algebra aufzufassen: $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{C}_X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$. Die Elemente der Familie $\mathcal{B}(X)$ werden als **Borel-Mengen** bezeichnet.

Bei der Betrachtung abzählbar vieler (meßbarer) Teilmengen $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eines Raumes $X$ liegt es nahe, nach der Existenz von Grenz- oder Limesmengen zu fragen. Eine solche ist anschaulich für monotone Folgen gegeben, wenn nämlich aus der Zugehörigkeit eines Punktes $x$ zu unendlich vielen der Mengen $E_n$ folgt, daß $x$ höchstens in endlich vielen *nicht* enthalten sein kann.

**Definition 1.1.5** (Mengenlimites) *Es sei $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge. Als **Limes superior** der Folge, geschrieben $\limsup_{n\to\infty} E_n$ oder $\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n$, wird die Gesamtheit aller Punkte bezeichnet, die zu unendlich vielen der Mengen $E_n$ gehören. Die Gesamtheit aller Punkte, die in allen Mengen $E_n$ mit Ausnahme von jeweils endlich vielen enthalten sind, heißt **Limes inferior** der Folge $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und wird mit $\liminf_{n\to\infty} E_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n$ bezeichnet. Im Falle, daß Limes superior und Limes inferior übereinstimmen, spricht man vom **Limes** der Folge $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und schreibt dafür $\lim_{n\to\infty} E_n$.*

**Lemma 1.1.3** *Oberer und unterer Limes sind darstellbar als*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n.$$

*Beweis* 1. Aus $x \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} E_{n_\nu}$ folgt offenbar $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$. Sei umgekehrt $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} V_j$ mit $V_j = \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$; dann existiert zu $V_1$ ein erster Index $n_1$ mit $x \in E_{n_1} \subset V_1$, und zu $V_{n_1+1}$ ein erster Index $n_2$ mit $x \in E_{n_2} \subset V_{n_1+1}$, und so fort. Daher gibt es unendlich viele Mengen aus $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, in denen $x$ enthalten ist.

2. Ein Punkt $x$ gehöre zu allen Mengen $E_n$ bis auf die Mengen $E_{n_1}, \ldots, E_{n_m} \Longrightarrow x \in \bigcap_{n=n_m+1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n$. Umgekehrt folgt aus $x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} E_n$, daß es (mindestens) ein $k$ gibt mit $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n$, d. h. $x$ liegt in allen $E_n$ für $n \geq k$, also in allen Mengen mit Ausnahme von höchstens $k$. □

**Korollar 1.1.4** *Ist $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, so sind auch oberer und unterer Limes von $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}_\sigma$ enthalten.*

*Beweis* Dies folgt mit Lemma 1.1.3 unmittelbar aus der Tatsache, daß eine $\sigma$-Algebra bzgl. abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten abgeschlossen ist. □

Der Limes einer Mengenfolge $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existiert offensichtlich dann, wenn die Folge monoton ist, d. h. wenn entweder $E_n \subseteq E_{n+1}$ oder $E_n \supseteq E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

**Definition 1.1.6** (Monotonie) *$\mathcal{M} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt **monotone Mengenfamilie**, wenn der Limes jeder monotonen Folge $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{M}$ selbst in $\mathcal{M}$ enthalten ist.*

Triviales Beispiel einer monotonen Familie ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ des Raumes $X$. Aus Korollar 1.1.4 folgt außerdem, daß jeder $\sigma$-Ring (jede $\sigma$-Algebra) eine monotone Familie bildet. Der Durchschnitt monotoner Familien ist selbst monoton; daher gibt es in Gestalt des Durchschnittes aller eine Mengenfamilie $\mathcal{F}$ enthaltenden monotonen Familien stets eine kleinste $\mathcal{F}$ enthaltende monotone Familie, die als **die minimale monotone** oder **die von $\mathcal{F}$ erzeugte monotone Mengenfamilie $\mathcal{M}(\mathcal{F})$** bezeichnet wird. Das nächste Lemma zeigt, daß $\sigma$-Ringe (bzw. $\sigma$-Algebren) durch die Monotonie-Eigenschaft gekennzeichnet sind.

**Lemma 1.1.5** *Ein Ring $\mathcal{R}$ (bzw. eine Algebra $\mathcal{A}$) ist d. u. n. d. ein $\sigma$-Ring (bzw. eine $\sigma$-Algebra), wenn $\mathcal{R}$ (bzw. $\mathcal{A}$) eine monotone Mengenfamilie bildet.*

*Beweis* 1. Die Monotonie von $\sigma$-Ringen ($\sigma$-Algebren) folgt aus Korollar 1.1.4.

2. Für jede beliebige in einem monotonen Ring $\mathcal{R}$ (einer monotonen Algebra $\mathcal{A}$) enthaltene Mengenfolge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bilden die Mengen $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ eine monoton nicht abnehmende Folge, deren Limes $\lim_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ aufgrund der Monotonie in $\mathcal{R}$ (bzw. in $\mathcal{A}$) enthalten ist. □

**Lemma 1.1.6** *Die von einem beliebigen Mengenring $\mathcal{R}$ erzeugte monotone Familie $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ ist ein $\sigma$-Ring mit $\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$. Analoges gilt für Algebren.*

*Beweis* Zu $A \subset X$ bezeichne $\mathcal{E}_A$ die Familie aller Mengen $E$, mit denen Differenz und Vereinigung bezüglich $A$ in $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ liegen:

$$\mathcal{E}_A = \{E : (E \setminus A) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), (A \setminus E) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}), (A \cup E) \in \mathcal{M}(\mathcal{R})\}.$$

Offensichtlich besteht die Relation $B \in \mathcal{E}_A \iff A \in \mathcal{E}_B \ \forall\, A, B \subset X$. Ist zudem $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\mathcal{E}_A$ enthaltene monotone Mengenfolge, so hat man

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E_n \setminus A &= \lim_{n\to\infty} (E_n \setminus A) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}),\\
A \setminus \lim_{n\to\infty} E_n &= \lim_{n\to\infty} (A \setminus E_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}),\\
A \cup \left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) &= \lim_{n\to\infty} (A \cup E_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{R}),
\end{aligned}$$

d. h. die Familie $\mathcal{E}_A$ ist monoton. Es sei nun $A = R$ ein Ringelement; dann gehören alle übrigen Ringelemente offenbar auch zu $\mathcal{E}_R$, und aufgrund der Monotonie von $\mathcal{E}_R$ und der

Minimaleigenschaft von $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ gilt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{E}_R$. Ist demnach $M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, so ist $M \in \mathcal{E}_R$ und somit $R \in \mathcal{E}_M$. Das gilt für alle $R \in \mathcal{R}$, d. h. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}_M$ für jedes $M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Wieder wegen der Monotonie von $\mathcal{E}_M$ und der Minimaleigenschaft von $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ hat man daher $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{E}_M \; \forall \, M \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$. Das bedeutet für $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{R})$, daß stets $M_1 \setminus M_2$ und $M_1 \cup M_2$ wieder in $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ liegen, $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ also einen Ring – und nach Lemma 1.1.5 einen $\sigma$-Ring – bildet. Demnach gilt $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{R})$; da umgekehrt $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$ eine monotone Familie ist, folgt $\mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$, d. h. es besteht Gleichheit. Analoges gilt für Algebren. □

**Korollar 1.1.7** *Enthält eine monotone Mengenfamilie $\mathcal{M}$ einen Ring $\mathcal{R}$, so enthält sie auch den von diesem Ring erzeugten $\sigma$-Ring $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R})$.*

*Beweis* Aufgrund der Minimaleigenschaften der von $\mathcal{R}$ erzeugten monotonen Familie und des von $\mathcal{R}$ erzeugten $\sigma$-Ringes liefert das obige Lemma

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}. \qquad \square$$

## 1.2 Mengenfunktionen und Maße

**Definition 1.2.1** (Mengenfunktionen) *Es sei $X$ eine Menge. Eine **erweitert-reellwertige Mengenfunktion** über $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$*[4]*. Eine solche Mengenfunktion heißt*

- ***vollständig additiv** oder **$\sigma$-additiv**, falls für jede abzählbare Familie $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wechselseitig disjunkter Teilmengen aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty E_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$,*
- ***endlich additiv**, falls für wechselseitig disjunkte Mengen $E_1, \ldots, E_k$ aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^k E_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^k E_n) = \sum_{n=1}^k \mu(E_n)$,*
- ***abzählbar subadditiv**, falls für jede beliebige abzählbare Familie $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$,*
- ***endlich subadditiv**, falls für endlich viele beliebige Mengen $A_1, \ldots, A_k$ aus $\mathcal{E}$ mit $\bigcup_{n=1}^k A_n \in \mathcal{E}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^k A_n) \le \sum_{n=1}^k \mu(A_n)$.*

Man beachte, daß in der Definition der Subadditivität nicht die wechselseitige Disjunktheit der Mengen gefordert wird. Dies deshalb, weil nahezu ausschließlich Mengenfunktionen $\mu$ mit der Isotonie-Eigenschaft $\mu(A) \le \mu(B)$ für $A \subseteq B$ betrachtet werden.

Ist $\mu : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ eine erweitert reellwertige Mengenfunktion über einem Mengenring $\mathcal{R}$, so nennt man $\mu$ **von unten stetig**, falls für jede monoton zunehmende[5] Folge $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

[4] Wir schreiben auch $\bar{\mathbb{R}}$ für die kompaktifizierte reelle Achse $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Erweitert-reellwertige Funktionen werden als **numerische Funktionen** bezeichnet.

[5] *Monoton zunehmend* bzw. *monoton abnehmend* bedeutet $B_n \subset B_{n+1} \; \forall \, n$ bzw. $B_n \supset B_{n+1} \; \forall \, n$; soll Gleichheit in den Implikationen nicht ausgeschlossen werden, so sind die Begriffe *monoton nicht abnehmend* bzw. *monoton nicht zunehmend* angebrachter.

der Limesmenge $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$, und **von oben stetig**, falls $\mu(B_n) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ ist und die Gleichheit $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ für jede monoton abnehmende Folge $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der Limesmenge $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B \in \mathcal{R}$ zutrifft. Schließlich bezeichnet man eine solche Mengenfunktion über $\mathcal{R}$ als **leer-stetig** oder **$\varnothing$-stetig**, falls $\mu(A) \geq 0\ \forall\, A \in \mathcal{R}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ ist und für jede monoton abnehmende Folge $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $\varphi(B_n) < \infty\ \forall\, n$ sowie $\lim_{n\to\infty} B_n = \varnothing$ gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = 0$.

Eine über einem Mengenring $\mathcal{R}$ definierte nicht negative, erweitert-reellwertige und endlich additive Mengenfunktion mit $\varphi(\varnothing) = 0$ nennt man einen **Inhalt**[6] bzw., wenn zudem $\varphi(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{R}$ ist, einen **endlichen Inhalt**. Das entspricht der elementargeometrischen Interpretation des Begriffes, denn der Inhalt der Vereinigung endlich vieler disjunkter geometrischer Gebilde sollte die Summe, der Inhalt einer Differenz die Differenz der Einzelinhalte sein, und einem leeren Gebilde sollte der Inhalt Null entsprechen. Die bei elementargeometrischen Konstruktionen einleuchtende Forderung nach endlicher Additivität reicht jedoch bereits bei einfachen Konstruktionen zur Festlegung eines Inhaltes nicht immer aus (etwa, wenn der Inhalt einer offenen Kreisscheibe durch die Summe der Inhalte abzählbar vieler disjunkter offener einbeschriebener Dreiecke approximiert werden soll). Die Mengen, denen ein *Inhaltsmaß* zuzusprechen ist, sollten daher aus einem $\sigma$-Ring stammen, und die Mengenfunktion sollte $\sigma$-additiv sein. Erwartet man schließlich, daß ein entsprechender Funktionswert auch dem ganzen Raum zuzuordnen ist, so ist eine $\sigma$-Algebra zugrundezulegen.

**Definition 1.2.2** (Maß) *$\mu : \mathcal{A}_\sigma \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ sei eine erweitert-reellwertige Mengenfunktion über einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$. $\mu$ heißt ein **Maß** über $\mathcal{A}_\sigma$, falls*

- *$\mu$ $\sigma$-additiv ist,*
- *$\mu(A) \geq 0\ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma$,*
- *$\mu(\varnothing) = 0$.*

*Das Paar $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ bezeichnet man als einen **meßbaren Raum**, die Elemente von $\mathcal{A}_\sigma$ als **meßbare Mengen**. Unter Einschluß eines Maßes $\mu$ über $\mathcal{A}_\sigma$ heißt das Tripel $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein **Maßraum**.*

Eine durch Zugrundelegen eines zerlegbaren Systems (Abschn. 1.1) anstelle eines Ringes erklärte Variante des Inhaltsbegriffes spielt bei sog. Maßerweiterungen (s. Abschn. 1.3) eine Rolle. Diese Variante bezeichnet man als **elementares Maß** [68]; das ist also eine über einem zerlegbaren System (einem Halbring) erklärte nicht negative, erweitert-reellwertige und endlich additive Mengenfunktion $\varphi$ mit $\varphi(\varnothing) = 0$. Schließlich bezeichnet man eine

[6] In vielen Fällen wird $X \in \mathcal{R}$ vorausgesetzt, d. h. der Inhaltsbegriff ist mit der Forderung verknüpft, daß der Definitionsbereich eine Algebra bildet (vergl. z. B. [165]).

über einem zerlegbaren System[7] definierte nicht negative, erweitert-reellwertige und $\sigma$-additive Mengenfunktion als ein **Prämaß**. Um den Überblick zu erleichtern, verwenden wir einheitlich die Notationen $\mathcal{R}$ für einen Mengenring, $\mathcal{R}_\sigma$ für einen $\sigma$-Ring, $\mathcal{Z}$ für ein zerlegbares Mengensystem, $\mathcal{A}$ für eine Algebra und $\mathcal{A}_\sigma$ für eine $\sigma$-Algebra (vergl. Definitionen 1.1.1 und 1.1.2 in Abschn. 1.1).

**Zusammenfassung** Es seien $\mathcal{R}$ ein Mengenring, $\mathcal{Z}$ ein zerlegbares Mengensystem, $\mathcal{A}_\sigma$ eine $\sigma$-Algebra.

- Eine nicht negative, endlich additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\varnothing) = 0$ heißt **Inhalt** (s. Fußnote 7).
- Eine nicht negative, endlich additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{Z} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\varnothing) = 0$ heißt **elementares Maß**.
- Eine nicht negative, $\sigma$-additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{Z} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(\varnothing) = 0$ heißt **Prämaß** (s. Fußnote 7).
- Eine nicht negative, $\sigma$-additive Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\mu(\varnothing) = 0$ heißt **Maß**.

Prämaße können auch als $\varnothing$-stetige endliche Inhalte ausgezeichnet werden, wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 1.2.1** *Jeder $\varnothing$-stetige endliche Inhalt über einem Mengenring $\mathcal{R}$ ist ein Prämaß. Jedes Prämaß ist $\varnothing$-stetig.*

*Beweis* Wir schreiben $B_n \downarrow B$ bzw. $B_n \uparrow B$ für eine monoton abnehmende bzw. eine monoton zunehmende Mengenfolge mit $\lim_{n\to\infty} B_n = B$ (vergl. Fußnote 7).

1. Es sei $\varphi$ leer-stetiger endlicher Inhalt. Jede beliebige monoton zunehmende Folge $B_n \uparrow B$ definiert vermöge $\bar{B}_n = B \setminus B_n$ eine monoton abnehmende Folge $\bar{B}_n \downarrow \varnothing$. Aus der Leer-Stetigkeit von $\varphi$ sowie aus $\varphi(B) < \infty$ und $\varphi(B_n) < \infty \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ (Endlichkeit) ist daher auf

$$0 = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\bar{B}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(B \setminus B_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\varphi(B) - \varphi(B_n)\right) = \varphi(B) - \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n)$$

zu schließen. Es sei nun $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige abzählbare Familie wechselseitig disjunkter Teilmengen aus $\mathcal{R}$ mit $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{R}$. Definiert man die Folgenelemente $B_n$ durch $B_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} E_\nu$, so gilt $B_n \uparrow B$, und daher nach dem eben Bewiesenen $\varphi(B) = \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n)$, wobei aufgrund der endlichen Additivität von $\varphi$ (Inhaltseigenschaft) $\varphi(B_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(E_\nu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Folglich ist $\varphi(B) = \varphi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(E_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(E_\nu)$, d. h. $\varphi$ ist $\sigma$-additiv.

2. $\varphi$ sei ein Prämaß. Für jede monoton zunehmende Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ gilt dann $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$; das ist so einzusehen: Man setze $A_0 = \varnothing$ und $E_n := A_n \setminus$

[7] Zuweilen wird auch hier eine Algebra zugrundegelegt [165].

$A_{n-1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$; dann folgt $\bigcup_{n\geq 1} E_n = \lim_{n\to\infty} A_n = A$ mit $A_n = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$, und die $\sigma$-Additivität von $\varphi$ bedeutet $\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(E_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(E_\nu)\right) = \lim_{n\to\infty}\big(\varphi(A_n)\big)$.

Nun bezeichne $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton abnehmende Folge mit $\varphi(B_n) < \infty\ \forall\, n$ sowie $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Wir setzen $A_n := B_0 \smallsetminus B_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$, so daß $A_0 = \varnothing$ ist und $A_n \uparrow A$ für $A = B_0 \smallsetminus B$ folgt. Nach dem eben Bewiesenen ist dann $\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$, also $\lim_{n\to\infty} \varphi(B_0 \smallsetminus B_n) = \varphi(B_0 \smallsetminus B)$. Das bedeutet $\varphi(B_0) - \lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(B_0) - \varphi(B)$, $\lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(B)$. Ist insbesondere $B = \varnothing$, so kennzeichnet dies die $\varnothing$-Stetigkeit. □

**Definition 1.2.3** *Ein Maß $\mu$ heißt **(total) endlich** oder **beschränkt**, falls $\mu(X) < \infty$ ist, und **$\sigma$-endlich**, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $X$ gibt, so daß $\mu(E_n) < \infty$ für jedes $E_n$ gilt. Ein Maßraum mit $\sigma$-endlichem Maß wird als **$\sigma$-endlicher Maßraum** bezeichnet.*

**Bemerkung 1.2.1** *Ist $\mu$ ein $\sigma$-endliches Maß, so kann man stets davon ausgehen, daß es eine solche überdeckende Mengenfamilie $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < \infty \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt, welche eine monoton nicht abnehmende Folge bildet. Es ist nämlich $\mu(\bigcup_{n=1}^{\ell} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\ell} \mu(E_n)$ (vergl. unten Lemma 1.2.3), so daß es genügt, $E'_\ell = \bigcup_{n=1}^{\ell} E_n\ \forall\, \ell \in \mathbb{N}$ zu setzen; die Folge $\{E'_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ hat die genannte Eigenschaft.* □

**Lemma 1.2.2** (Maßeigenschaften I) *Es sei $\mu$ ein Maß über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$. Für $A, B \in \mathcal{A}_\sigma$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}_\sigma$ und $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{A}_\sigma$ gelten die Aussagen*

(M1) $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ *(Isotonie-Eigenschaft)*

(M2) $A \subset B$, $\mu(B) < \infty \Longrightarrow \mu(B \smallsetminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(M3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *monoton zunehmend* $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n)$

(M4) $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *monoton abnehmend,* $\mu(B_{n_0}) < \infty$ *für mindestens ein* $n_0 \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n)$.

*Beweis* 1. Im Falle $A \subset B$ ist $A \cup (B \smallsetminus A) = B$, daher folgt aus der Additivität die Isotonie von $\mu$.

2. $\mu(B) < \infty$ impliziert $\mu(A) < \infty$, falls $A \subset B$ ist, daher gilt $\mu(B) - \mu(A) \in \mathbb{R}$ und $\mu(B \smallsetminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Zunächst ist festzustellen, daß $\lim_{n\to\infty} A_n$ und $\lim_{n\to\infty} B_n$ zu $\mathcal{A}_\sigma$ gehören (s. Korollar 1.1.4). Es seien die wechselseitig disjunkten Mengen $D_n$ definiert durch

$$D_1 = A_1, \quad D_{n+1} = A_{n+1} \smallsetminus A_n,\ n \geq 1.$$

Aufgrund von $A_n \subseteq A_{n+1}$ folgt damit $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, also

$$\mu\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(D_n),$$

was wegen $\sum_{n=1}^{k} \mu(D_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{k} D_n) = \mu(A_k)$ die behauptete Gleichheit impliziert: $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

4. Es sei $\mu(B_{n_0}) < \infty$. Wegen $\lim_{n\to\infty} B_n \subset B_{n_0}$ und $\lim_{n\to\infty}(B_{n_0} \setminus B_n) = B_{n_0} \setminus \lim_{n\to\infty} B_n$ folgt aus der bereits bewiesenen zweiten Eigenschaft $\mu(B_{n_0} \setminus \lim_{n\to\infty} B_n) = \mu(B_{n_0}) - \mu(\lim_{n\to\infty} B_n)$. Andererseits hat man, da die Folge $\{A_n\}_{n\geq n_0}$ mit $A_n = B_{n_0} \setminus B_n$ offenbar monoton nicht abnehmend ist, nach dem vorher Bewiesenen

$$\mu\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

so daß $\mu(B_{n_0} \setminus \lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_{n_0} \setminus B_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_{n_0}) - \mu(B_n)\big) = \mu(B_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ wird. Diese beiden Darstellungen von $\mu(B_{n_0} \setminus \lim_{n\to\infty} B_n)$ zeigen

$$\mu\big(\lim_{n\to\infty} B_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n). \qquad \square$$

**Lemma 1.2.3** (Maßeigenschaften II) *Es sei $\mu$ ein Maß über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, und es sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Mengenfolge in $\mathcal{A}_\sigma$; dann bestehen folgende Ungleichungen:*

(M5) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
(M6) $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$
(M7) $\mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$, *falls* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$.

*Beweis* Die Mengen $D_1 = A_1$, $D_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right)$ für $n \geq 2$ sind offenbar wechselseitig disjunkt und erfüllen $D_n \subset A_n$ sowie $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Folglich hat man $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

1. Mit $M_j = \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n$ ist $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j\right)$, worin die $M_j$ eine monoton nicht abnehmende Folge in $\mathcal{A}_\sigma$ bilden, so daß $\bigcup_{j=1}^{m} M_j = M_m$ folgt: $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \mu(\lim_{m\to\infty} M_m)$. Nach Lemma 1.2.2 erhält man also $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(M_m) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right)$. Hierin ist $\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq A_m$ für die nicht notwendig monotone Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, also gilt (M6):

$$\mu\big(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n\big) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \mu(A_m). \tag{1.1}$$

2. Aus $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} A_n = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right)^c\right)^c$ und $\left(\bigcap_{n=j}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n^c$ folgt

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} A_n^c\right)^c = \big(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c\big)^c.$$

Das gilt für jede Einbettung in eine Menge $X$, so daß mit $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ auf $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c) = \mu\big((\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)^c\big) = \mu(X \setminus \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$ zu schließen ist. Eigenschaft (M6) garantiert

$\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n^c) \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n^c) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n^c)$, daher liefert $\mu(X) < \infty$ nach Lemma 1.2.2

$$\mu(X) - \mu\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) \le \mu(X) - \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n),$$

also $\mu\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) \ge \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$, d. h. (M7). □

**Folgerung** Existiert $\lim_{n\to\infty} A_n$ und ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$, so implizieren die Eigenschaften (M6) und (M7) die Ungleichungen

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n) \le \mu\big(\lim_{n\to\infty} A_n\big) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n),$$

so daß in diesem Falle $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ stets garantiert ist.

**Definition 1.2.4** *Eine erweitert-reellwertige Funktion $f$ über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ wird als* ***fast überall endlich*** *(f. ü. endlich) oder auch* ***μ-endlich*** *bezeichnet, wenn die Menge $\{x : f(x) = \pm\infty\}$ vom Maße Null ist. Mengen $N$ vom Maße $\mu(N) = 0$ heißen* ***Nullmengen bzgl. μ*** *oder kurz* ***μ-Nullmengen****. Generell spricht man von einer* ***μ-fast überall*** *bestehenden Eigenschaft (bzgl. des Raumes $X$), falls diese Eigenschaft überall in $X$ – ausgenommen in Mengen vom Maße Null – besteht*[8].

**Definition 1.2.5** *$\mu$ heißt* ***vollständiges Maß****, falls jede Teilmenge einer Nullmenge bzgl. $\mu$ meßbar (also selbst Nullmenge) ist.*

Jedes Maß erlaubt die Bildung eines zugehörigen vollständigen Maßes, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 1.2.4** *Es sei $\mu$ ein Maß über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$. Mit $\mathcal{V}$ werde die $\mathcal{A}_\sigma$ umfassende Familie aller Teilmengen aus $X$ von der Form $A \cup U$ bezeichnet, worin $A \in \mathcal{A}_\sigma$ und $U$ Teilmenge einer $\mu$-Nullmenge ist. Dann ist $\mathcal{V}$ eine $\sigma$-Algebra, und die Mengenfunktion $\nu$, definiert durch $\nu(A \cup U) \overset{!}{=} \mu(A)$, ist ein vollständiges Maß über $\mathcal{V}$, das man als* ***Vervollständigung*** *von $\mu$ bezeichnet.*

*Beweis* Es ist zunächst zu prüfen, ob $\nu$ wohldefiniert ist, d. h., ob im Falle $A_1 \cup U_1 = A_2 \cup U_2$ auch zwangsläufig $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ folgt. Dazu beachte man, daß die $U_i$ in Nullmengen liegen, d. h. $U_i \subset N_i$ mit $\mu(N_i) = 0$ für $i = 1, 2$, woraus sich $A_1 \subset A_1 \cup U_1 = A_2 \cup U_2 \subset A_2 \cup N_2$ und analog $A_2 \subset A_1 \cup N_1$ ergibt, d. h. $\mu(A_1) \le \mu(A_2)$ und umgekehrt, also $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

1. $\mathcal{V}$ ist $\sigma$-Algebra: Die Zugehörigkeit von $X$ und $\varnothing$ zu $\mathcal{V}$ ist offensichtlich. Sei $V = A \cup U$ ein beliebiges Element von $\mathcal{V}$ mit $U \subset N$ und $\mu(N) = 0$; dann folgt $A^c \setminus N = A^c \cap N^c \subset A^c \cap U^c = (A \cup U)^c \subset A^c$. Aufgrund dieser Schachtelung ist die Menge $B =$

[8] Der Hinweis auf das Maß $\mu$ entfällt, wenn der Bezug klar ist.

$(A \cup U)^c \setminus (A^c \setminus N)$ in $A^c$ enthalten und erfüllt $(A^c \setminus N) \cup B = (A \cup U)^c$ und $A^c \setminus B \supset A^c \setminus N$, woraus auf $B \subset N$ zu schließen ist. $A, N \in \mathcal{A}_\sigma$ impliziert $A^c \setminus N \in \mathcal{A}_\sigma$, so daß das Komplement $(A \cup U)^c$ eine Darstellung der Form $A' \cup B$ mit $B \subset N$ hat, somit also zu $\mathcal{V}$ gehört. Zu zeigen bleibt die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Vereinigungen $\bigcup_{n=1}^\infty (A_n \cup U_n) = (\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \cup (\bigcup_{n=1}^\infty U_n)$. In einer solchen ist $\bigcup_{n=1}^\infty U_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ mit $U_n \subset N_n$ und $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty N_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(N_n) = 0$, also hat auch $\bigcup_{n=1}^\infty (A_n \cup U_n)$ eine Darstellung der Form $\tilde{A} \cup \tilde{U}$ mit $\tilde{A} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\tilde{U} = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ als Teilmenge einer Nullmenge.

2. Die Maßeigenschaften von $\nu$ ergeben sich aus denen der Mengenfunktion $\mu$, daher ist lediglich die Vollständigkeit von $\nu$ nachzuweisen. Jede $\nu$-Nullmenge ist von der Form $A \cup U$ mit $\mu(A) = 0$, $U \subset N$ und $\mu(N) = 0$; wegen $\mu(A \cup U) \le \mu(A \cup N) \le \mu(A) + \mu(N) = 0$ ist eine solche Menge stets auch $\mu$-Nullmenge. Eine Teilmenge $M \subset A \cup U$ kann dargestellt werden als $M = \varnothing \cup M$, was im Falle $\mu(M) = 0$ auch $M \in \mathcal{V}$ impliziert. □

Vollständige Maße spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle. Verallgemeinerungen des Maßbegriffes finden in anderen Gebieten, etwa der Physik, Anwendung. Dazu gehören Mengenfunktionen, die alle Eigenschaften eines Maßes mit Ausnahme der dort geforderten Beschränkung auf nicht negative Werte besitzen.

**Definition 1.2.6** (Signierte Maße) *Eine über einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ definierte erweitert-reellwertige und $\sigma$-additive Mengenfunktion $\nu : \mathcal{A}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\nu(\varnothing) = 0$ heißt* ***signiertes Maß*** *über $\mathcal{A}_\sigma$, falls $\nu$ höchstens einen der Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annimmt.*

Jede reelle Linearkombination $\nu = \sum_{n=1}^k a_n \mu_n$ von Maßen $\mu_n$ über derselben $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, unter denen höchstens eines nicht total endlich ist, bildet offenbar ein signiertes Maß, definiert durch $\nu(A) = \sum_{n=1}^k a_n \mu_n(A)$ für jedes $A$.

**Definition 1.2.7** *Es sei $\nu$ ein signiertes Maß über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$. Eine Teilmenge $M \in \mathcal{A}_\sigma$ wird als* ***positiv bzgl. $\nu$*** *bezeichnet, wenn $\nu(M \cap A) \ge 0 \ \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist, und als* ***negativ bzgl. $\nu$****, wenn $\nu(M \cap A) \le 0 \ \forall A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist.*

Die Bedeutung dieser Klassifikation liegt darin, daß zu jedem signierten Maß $\nu$ Zerlegungen der Form $\nu = \mu^+ - \mu^-$ existieren, worin $\mu^+$ und $\mu^-$ Maße über derselben $\sigma$-Algebra sind. Sind nämlich $M^+$ und $M^-$ meßbare Mengen mit $X = M^+ \cup M^-$, $\nu(A \cap M^+) \ge 0$, $\nu(A \cap M^-) \le 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$, so ist $N = A \cap M^+ \cap M^-$ eine $\nu$-Nullmenge, und die drei disjunkten Mengen $(A \cap M^+) \setminus N$, $N$, $(A \cap M^-) \setminus N$ führen zu der Darstellung $\nu(A) = \nu(A \cap M^+) + \nu(A \cap M^-) =_{def.} \mu^+(A) - \mu^-(A)$. Die Mengen, die eine solche Darstellung erlauben, sind allerdings i. a. nicht eindeutig bestimmt, wie das Beispiel $U^+ = M^+ \setminus M^-$ und $U^- = M^-$ zeigt, für das ebenfalls $\nu(A) = \nu(A \cap U^+) + \nu(A \cap U^-)$ gilt. Dabei hat man $U^+ \cap U^- = \varnothing$ und $U^+ \cup U^- = X$, d. h. selbst im Falle einer Partition des Raumes ist die Eindeutigkeit der definierenden Mengen i. a. nicht gesichert. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß dann jedenfalls die Zerlegungsmaße $\mu^+$, $\mu^-$ eindeutig festgelegt sind.

**Satz 1.2.5** (Jordan-Hahn-Zerlegung) *Zu jedem signierten Maß $\nu$ über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ gibt es eine Partition des Raumes X in meßbare Mengen P und N derart, daß P positiv bzgl. $\nu$ und N negativ bzgl. $\nu$ ist*[9]. *Die Mengenfunktionen $\mu^+$ und $\mu^-$, definiert durch*

$$\mu^+(A) = \nu(A \cap P), \quad \mu^-(A) = -\nu(A \cap N) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma, \tag{1.2}$$

*sind Maße über $\mathcal{A}_\sigma$ mit der Eigenschaft $\nu = \mu^+ - \mu^-$. Diese Maße sind – unabhängig von der Wahl einer solchen Partition – eindeutig bestimmt. Mindestens eines der Maße ist total endlich*[10].

*Beweis* 1. Da $\nu$ als signiertes Maß höchstens einen der Werte $+\infty$ oder $-\infty$ annimmt, kann o. E. d. A. $\sup_{A\in\mathcal{A}} \nu(A) =: c < +\infty$ vorausgesetzt werden (anderenfalls ergibt sich eine analoge Beweisführung). Sei nun $\mathcal{E} = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen aus $\mathcal{A}_\sigma$ mit $\nu(E_n) > c - \frac{1}{2^n}$ ($\mathcal{E}$ enthält offenbar zumindest ein Element). Wir setzen

$$P = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$$

und zeigen, daß $\nu(A) \geq 0$ für jedes $A \subset P$ ist ($P \in \mathcal{A}_\sigma$ folgt aus Korollar 1.1.4). Eine Teilmenge $A \subset P$ ist offenbar in jeder Vereinigung $\bigcup_{n=j}^{\infty} E_n$ und somit für jedes $j \in \mathbb{N}$ in mindestens einem $E_m$ mit $m \geq j$ enthalten, woraus $\nu(A) = \nu(E_m) - \nu(E_m \setminus A) > c - \frac{1}{2^m} - \sup_{A\in\mathcal{A}} \nu(A) = -\frac{1}{2^m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ folgt. Demnach liefert $m \to \infty$ die Aussage $\nu(A) \geq 0$.

Nun sei $N = X \setminus P$ (also $N \in \mathcal{A}_\sigma$ als Komplement eines Elementes der $\sigma$-Algebra). Es ist dann

$$N = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=j}^{\infty} (X \setminus E_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, (X \setminus E_n),$$

und aus $B \subset N$ folgt $B \subset (X \setminus E_n)$ für alle $n \geq j_0$ und mindestens ein $j_0$. Die Ungleichung $\sup_{A\in\mathcal{A}} \nu(A) < \infty$ impliziert $\nu(X) < \infty$ und $\nu(E_n) < \infty$, so daß aus $E_n \subset X$ folgt $\nu(X \setminus E_n) = \nu(X) - \nu(E_n) < c - (c - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Demnach hat man $\nu(B) \leq \frac{1}{n}\ \forall\, n \geq j_0$, so daß mit beliebig großem $n$ auch $\nu(B) \leq 0$ folgt. Die im Satz definierten Mengenfunktionen $\mu^+$ und $\mu^-$ sind also Maße, und die Mengen $P$ und $N$ bilden eine Partition von $X$, d. h. $X = P \cup N$ mit $P \cap N = \emptyset$. Das Maß $\mu^+$ ist dabei wegen $\sup_{A\in\mathcal{A}} \nu(A) < \infty$ total endlich. Eine analoge Schlußweise auf der Basis von $\inf_{A\in\mathcal{A}} \nu(A) > -\infty$ würde $\mu^-(X) < \infty$ garantieren.

2. Es seien $P_i, N_i$ $(i = 1,2)$ zwei Hahn-Zerlegungen mit $X = P_i \cup N_i$, $P_i \cap N_i = \emptyset$, $\nu(A \cap P_i) \geq 0$, $\nu(A \cap N_i) \leq 0$. Für jede meßbare Menge $A \in \mathcal{A}_\sigma$ sei $A_i^+ = A \cap P_i$ und $A_i^- = A \cap N_i$ $(i = 1,2)$. Wegen $A_i^+ \setminus A_j^+ \subset P_i \cap N_j$ ist $\nu(A_i^+ \setminus A_j^+) = 0$, was

$$\nu(A_i^+) = \nu(A_i^+ \setminus A_j^+) + \nu(A_i^+ \cap A_j^+) = \nu(A_i^+ \cap A_j^+) = \nu(A_j^+)$$

[9] Eine solche Partition ist i. a. nicht eindeutig; sie wird als *Hahn-Zerlegung* bezeichnet.

[10] Die Zerlegung des signierten Maßes $\nu$ nennt man eine *Jordan-Zerlegung*.

impliziert. Analog erhält man $\nu(A_i^-) = \nu(A_j^-)$, d. h. die Definition der Maße $\mu^+$ und $\mu^-$ gemäß (1.2) ist von der gewählten Partition von $X$ (der speziellen Hahn-Zerlegung) unabhängig. Damit ist alles bewiesen. □

Obwohl es also i. a. mehrere Möglichkeiten für eine Darstellung $\nu = \nu^+ - \nu^-$ gibt, ist die auf einer beliebigen *Hahn-Zerlegung* des Raumes $X$ basierende *Jordan-Zerlegung* (1.2) eindeutig.

**Definition 1.2.8** *Die durch die Jordan-Hahn-Zerlegung bestimmten Maße $\mu^+$ und $\mu^-$ bezeichnet man als* ***obere*** *bzw.* ***untere Variation von $\nu$****. Das Maß $|\nu| = \mu^+ + \mu^-$ heißt* ***absolute Variation des signierten Maßes $\nu = \mu^+ - \mu^-$****. Ein signiertes Maß heißt* ***total endliches signiertes Maß*** *bzw.* ***$\sigma$-endliches signiertes Maß****, wenn die jeweilige Eigenschaft seiner absoluten Variation $|\nu|$ zukommt.*

Jedes Maß ist offenbar auch signiertes Maß. Bei gegebener $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$ ist die Menge aller total endlichen Maße über $\mathcal{A}_\sigma$ in der Menge $\mathcal{V}$ aller total endlichen signierten Maße über $\mathcal{A}_\sigma$ enthalten, und $\mathcal{V}$ bildet einen Banach-Raum mit der Norm $\|\nu\| = |\nu|(X)$ für $\nu \in \mathcal{V}$. Diese Norm $\|\nu\|$ bezeichnet man auch als **Totalvariation** von $\nu$. Man beachte, daß i. a. $|\nu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) \neq |\nu(A)| = |\mu^+(A) - \mu^-(A)|$ ist.

In der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen hängt der Variationsbegriff eng mit dem weiter einschränkenden Begriff der absoluten Stetigkeit zusammen. Zur Erinnerung: Es bezeichne $\mathcal{U}_{[a,b]}$ die Menge aller Partitionen $\Pi$ des Intervalls $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_{j-1}, x_j)$ für $j = 1, \ldots, m_\Pi - 1$ bzw. $[x_{m_\Pi - 1}, x_{m_\Pi}]$, wobei jeweils

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m_\Pi} = b$$

sei; dann heißt eine über $[a, b]$ definierte Funktion $f$ heißt **von endlicher** oder **beschränkter Variation**, wenn die obere Grenze $Var_{[a,b]}(f)$ aller Summen

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{m_\Pi} \left| f(x_j) - f(x_{j-1}) \right|, \quad \Pi \in \mathcal{U}_Q,$$

einen endlichen Wert annimmt: $Var_{[a,b]}(f) = \sup_{\Pi \in \mathcal{U}_Q} S_\Pi(f) \le K < \infty$. $Var_{[a,b]}(f)$ wird als **totale Variation** der Funktion $f$ bezeichnet. Eine über $[a, b]$ definierte endliche Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **absolut stetig**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für je endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $[a_i, b_i] \subset [a, b]$ $(i \in \{1, \ldots, m\})$ mit $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta$ stets gilt

$$\left| \sum_{i=1}^m \left( f(b_i) - f(a_i) \right) \right| < \varepsilon$$

(diese Bedingung kann – wie leicht zu zeigen – auch durch die schärfere Bedingung $\sum_{i=1}^m |(f(b_i) - f(a_i))| < \varepsilon$ ersetzt werden). Jede absolut stetige Funktion ist von beschränkter Variation.

Im Falle des $\mathbb{R}^n$ können leicht ähnliche Begriffe für Mengenfunktionen über der Borel-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eingeführt werden. Dazu sei $\mathcal{U}_Q$ wieder die Menge aller Partitionen $\Pi$ von $Q = [a, b]$ durch Intervalle $\{x_{j-1}, x_j]$ mit $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m_\Pi} = b$ $(j = 1, \ldots, m_\Pi)$.

**Definition 1.2.9** *Eine reellwertige Mengenfunktion $\phi$ über $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt von* ***endlicher*** *oder* ***beschränkter Variation***[11] *über Q, falls die obere Grenze $Var_Q(\phi)$ aller Summen $S_\Pi(\phi) = \sum_{j=0}^{m_\Pi} |\phi(\{x_j, x_{j+1}])|$ einen endlichen Wert annimmt:*

$$Var_Q(\phi) = \sup_{\Pi \in \mathcal{U}_Q} S_\Pi(\phi) \leq K < \infty.$$

*$Var_Q(\phi)$ wird als* ***totale Schwankung*** *der Mengenfunktion $\phi$ bezeichnet (s. Fußnote).*

**Definition 1.2.10** *Es sei $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein Maßraum. Eine reellwertige Mengenfunktion $\phi$ heißt* ***absolut stetig bzgl. μ****, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß für alle $\mu$-meßbaren Mengen $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $\mu(A) < \delta(\varepsilon)$ der Absolutbetrag $|\phi(A)| < \varepsilon$ bleibt.*

Es seien nun $\nu_1, \nu_2$ signierte Maße über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ in einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$. Existiert im Sinne obiger Definition zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß aus $|\nu_2|(A) < \delta(\varepsilon)$ stets $|\nu_1(A)| < \varepsilon$ folgt, so impliziert offenbar $|\nu_2|(A) = 0$ auch stets $\nu_1(A) = 0$. Gilt umgekehrt für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ die Aussage

$$\big(|\nu_2|(A) = 0\big) \implies \big(\nu_1(A) = 0\big),$$

so genügt zu gegebenem $\varepsilon > 0$ zumindest die Forderung $|\nu_2|(A) = 0$, um $|\nu_1(A)| < \varepsilon$ zu garantieren (man vergl. dazu den folgenden Satz 1.2.7 unter Beachtung von $|\nu_1(A)| \leq |\nu_1|(A)\ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma$). Die Definition der absoluten Stetigkeit für signierte Maße wird daher folgendermaßen gefaßt.

**Definition 1.2.11** *Sind $\nu_1, \nu_2$ signierte Maße über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ in einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$, so heißt* ***$\nu_1$ bzgl. $\nu_2$ absolut stetig****, in Zeichen $\nu_1 \ll \nu_2$, falls aus $|\nu_2|(A) = 0$ stets $\nu_1(A) = 0$ folgt. Entsprechend heißt ein* ***Maß $\mu_1$ absolut stetig bzgl. des Maßes $\mu_2$*** *oder kurz* ***$\mu_2$-stetig****, falls $\mu_1(N) = 0$ für jede $\mu_2$-Nullmenge $N$ ist, d. h.*

$$\big(\mu_1 \ll \mu_2\big) \iff \big((\mu_2(N) = 0) \implies (\mu_1(N) = 0)\big).$$

**Lemma 1.2.6** *Es seien $\nu_1$ und $\nu_2$ signierte Maße, $\nu_1 = \mu_1^+ - \mu_1^-$ eine Jordan-Hahn-Zerlegung von $\nu_1$, die die absolute Variation $|\nu_1|$ definiert. $\nu_1$ ist d. u. n. d. bzgl. $\nu_2$ absolut stetig, wenn $\mu_1^+ \ll \nu_2$ und $\mu_1^- \ll \nu_2$ ist, oder wenn $|\nu_1| \ll \nu_2$ ist.*

[11] Nicht zu verwechseln mit dem Begriff der (absoluten) Variation signierter Maße.

*Beweis* 1. Es sei $\nu_1 \ll \nu_2$. Gilt dann $|\nu_2|(A) = 0$ für eine meßbare Menge $A$, so folgt offenbar $|\nu_2|(A \cap P) = |\nu_2|(A \cap N) = 0$, also nach Voraussetzung $\mu_1^+(A) = \nu_1(A \cap P) = 0$ und $\mu_1^-(A) = \nu_1(A \cap N) = 0$, d. h. $\mu^+ \ll \nu_2$ und $\mu^- \ll \nu_2$.

2. Aus $\mu^+ \ll \nu_2$ und $\mu^- \ll \nu_2$ folgt trivialerweise $|\nu_1| \ll \nu_2$.

3. Ist $|\nu_1| = \mu_1^+ + \mu_1^- \ll \nu_2$, so bedeutet $|\nu_2|(A) = 0$ auch $\mu_1^+(A) + \mu_1^-(A) = 0$, wegen $0 \leq |\nu_1(A)| = |\mu_1^+(A) - \mu_1^-(A)| \leq \mu_1^+(A) + \mu_1^-(A)$ also $\nu_1(A) = 0$, womit $\nu_1 \ll \nu_2$ bewiesen ist.

Die Aussagen $\nu_1 \ll \nu_2$, $(\mu^+ \ll \nu_2 \wedge \mu^- \ll \nu_2)$ und $|\nu_1| \ll \nu_2$ sind also äquivalent. □

Mit dem nächsten Satz stellen wir die Analogie zur absoluten Stetigkeit endlicher reeller Funktionen her.

**Satz 1.2.7** *Ein signiertes Maß $\nu_1$ sei absolut stetig bzgl. des signierten Maßes $\nu_2$, und für jede meßbare Menge $A$ folge aus $|\nu_2|(A) < \infty$ stets $|\nu_1|(A) < \infty$; dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle meßbaren Mengen $M$ mit $|\nu_2|(M) < \delta(\varepsilon)$ die Abschätzung $|\nu_1|(M) < \varepsilon$ gilt.*

*Beweis* Angenommen, die Aussage sei falsch; dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jedem $\delta > 0$ stets eine meßbare Menge $M_\delta$ mit $|\nu_2|(M_\delta) < \delta$ und $|\nu_1|(M_\delta) \geq \varepsilon$ existiert. Man wähle $\delta = \frac{1}{2^n}$ und setze $M_\delta =: M_n$; dann gibt es eine Folge $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer Mengen mit $|\nu_2|(M_n) < \frac{1}{2^n}$, jedoch $|\nu_1|(M_n) \geq \varepsilon$. Der Limes superior $L = \overline{\lim}_{n\to\infty} M_n$ dieser Folge erfüllt (s. Lemma 1.1.3)

$$|\nu_2|(L) = |\nu_2|\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n\right) \leq |\nu_2|\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n\right) \leq \sum_{n=j}^{\infty} |\nu_2|(M_n) < \frac{1}{2^{j-1}} \ \forall\, j \geq 1,$$

mit der Konsequenz $|\nu_2|(L) = 0$. Laut Voraussetzung folgt aus $|\nu_2|\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n\right) < \infty$ auch $|\nu_1|\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} M_n\right) < \infty$, so daß gemäß Lemma 1.2.3 gilt

$$|\nu_1|(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, M_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, |\nu_1|(M_n) = \varepsilon > 0.$$

Damit entsteht ein Widerspruch zu $\nu_1 \ll \nu_2$, der absoluten Stetigkeit von $\nu_1$ bzgl. $\nu_2$, nach der $|\nu_2|(L) = 0$ stets $|\nu_1|(L) = 0$ implizieren muß. Die Annahme ist also nicht haltbar. □

Zum Verhältnis von Maßen untereinander nennen wir abschließend einen auf Lebesgue zurückgehenden Zerlegungssatz, welcher in der Wahrscheinlichkeitstheorie ein wichtige Rolle spielt. Zunächst wird der Begriff der Singularität eines Maßes $\mu_1$ bezüglich eines über derselben $\sigma$-Algebra definierten Maßes $\mu_2$ erklärt.

**Definition 1.2.12** (Singularität) *Es seien $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ein meßbarer Raum und $\mu_1, \mu_2$ Maße über $\mathcal{A}_\sigma$. $\mu_1$ heißt **singulär bzgl. $\mu_2$** oder kurz **$\mu_2$-singulär**, falls es eine $\mu_1$-Nullmenge $N$ in $\mathcal{A}_\sigma$ gibt, deren Komplement $N^c$ eine $\mu_2$-Nullmenge ist. Für diesen Sachverhalt benutzt man die Schreibweise $\mu_1 \perp \mu_2$.*

Es ist klar, daß die Relation „$\perp$“ symmetrisch ist, so daß $\mu_1 \perp \mu_2$ auch mit den Worten „$\mu_1$ und $\mu_2$ sind zueinander singulär“ beschrieben werden kann. Zwei signierte Maße $\nu_1, \nu_2$ heißen zueinander singulär, wenn dies für ihre absoluten Variationen $|\nu_i| = \mu_i^+ + \mu_i^-$ gilt.

**Lemma 1.2.8** *Die über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$ definierten Maße $\mu_1$ und $\mu_2$ sind genau dann zueinander singulär, wenn es $\mu_i$-Nullmengen $N_i \in \mathcal{A}_\sigma$ gibt, so daß für $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$ gilt*

$$\mu_j(A) = \mu_j(A \cap N_i) \ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma.$$

*Ist zudem $\mu_j$ absolut stetig bzgl. $\mu_i$, in Zeichen $\mu_j \ll \mu_i$, so folgt $\mu_j \equiv 0$.*

*Beweis* 1. Sind $\mu_1$ und $\mu_2$ zueinander singulär, so gibt es Nullmengen $N_i$ unter $\mu_i$, deren jeweiliges Komplement Nullmenge unter $\mu_j$ ist ($i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$). Die Additivität von $\mu_j$ bedeutet $\mu_j(A) = \mu_j(A \cap N_i) + \mu_j(A \cap N_i{}^c)$, worin wegen $A \cap N_i{}^c \subset N_i{}^c \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\mu_j(N_i{}^c) = 0$ der Wert $\mu_j(A \cap N_i{}^c)$ gleich Null ist.

2. Es sei $\mu_i(N_i) = 0$, und für $j \neq i$ gelte $\mu_j(A) = \mu_j(A \cap N_i)\ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma$; dann ist Letzteres auch für $A = N_i^c = X \setminus N_i$ richtig, d. h. $\mu_j(N_i^c) = 0$ für $j \neq i$ und $i, j \in \{1, 2\}$.

3. Nach Definition der absoluten Stetigkeit (s. 1.2.10) folgt aus $\mu_j \ll \mu_i$ für jede $\mu_i$-Nullmenge $N_i$, daß auch $\mu_j(N_i) = 0$ ist, während $\mu_j \perp \mu_i$ zu der dadurch ausgezeichneten Nullmenge $N_i$ die Beziehung $\mu_j(N_i{}^c) = 0$ und damit

$$\mu_j(X) = \mu_j(N_i) + \mu_j(N_i{}^c) = 0, \qquad \mu_j \equiv 0$$

impliziert. □

Der folgende Satz wurde von H. Lebesgue für $\sigma$-endliche Maße $\mu_i$ bewiesen (vergl. [10]). Wir nennen ihn hier jedoch der einfacheren Beweisbarkeit halber nur für total endliche Maße.

**Satz 1.2.9** (Lebesgue'scher Zerlegungssatz) *Zwischen je zwei total endlichen Maßen $\mu_1$ und $\mu_2$ über derselben $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(X)$ besteht folgende wechselseitige Beziehung: Jedes der Maße $\mu_i$ läßt sich in eindeutiger Weise in die Summe zweier Maße $\nu_i^{(1)}$ und $\nu_i^{(2)}$ über $\mathcal{A}_\sigma$ mit den Eigenschaften*

$$\nu_1^{(1)} \ll \mu_2,\ \nu_1^{(2)} \perp \mu_2, \qquad \nu_2^{(1)} \ll \mu_1,\ \nu_2^{(2)} \perp \mu_1$$

*zerlegen. In $\mu_i = \nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)}$ wird $\nu_i^{(1)}$ als **regulärer Teil von $\mu_i$ bezüglich $\mu_j$** und $\nu_i^{(2)}$ als **singulärer Teil von $\mu_i$ bezüglich $\mu_j$** bezeichnet ($i, j = 1, 2$, $i \neq j$). $\nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)}$ nennt man die **Lebesgue'sche Zerlegung** von $\mu_i$.*

*Beweis* 1. Es bezeichne $\mathcal{N}_j = \{N_j \in \mathcal{A}_\sigma : \mu_j(N_j) = 0\}$ die Menge aller Nullmengen von $\mu_j$ ($j = 1, 2$), und für $i \neq j$ sei $s_i = \sup\{\mu_i(N_j) : N_j \in \mathcal{N}_j\}$. Aufgrund der Endlichkeit beider Maße sind die Suprema $s_1$ und $s_2$ endliche positive reelle Zahlen. In jeder der Familien $\mathcal{N}_j$ gibt es offensichtlich eine nicht abnehmende Folge $\{N_j^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}\mu_i(N_j^k) = \mu_i(\lim_{k\to\infty} N_j^k) = \mu_i\big(\bigcup_{k=1}^\infty N_j^k\big) = s_i$. Mit $M_j = \bigcup_{k=1}^\infty N_j^k$ definieren wir die Maße $\nu_i^{(1)}$ und $\nu_i^{(2)}$ vermöge

$$\nu_i^{(1)}(A) = \mu_i(A \cap {M_j}^c), \quad \nu_i^{(2)}(A) = \mu_i(A \cap M_j) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}-\sigma,$$

die offenbar bereits eine Zerlegung der Form

$$\mu_i = \nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)} \quad \text{für } i = 1,2$$

bilden. Da $M_j$ Nullmenge unter $\mu_j$ ist und $\nu_i^{(2)}({M_j}^c) = \mu_i({M_j}^c \cap M_j) = 0$ ist, folgt $\nu_i^{(2)} \perp \mu_j$ $(i \neq j)$. Weiterhin hat man für eine beliebige Nullmenge $N_j$ unter $\mu_j$ wegen $\mu_i(M_j) = s_i$

$$s_i = \mu_i([N_j \cap {M_j}^c] \cup M_j) = \mu_i(N_j \cap {M_j}^c) + \mu_i(M_j) = \mu_i(N_j \cap {M_j}^c) + s_i,$$

also $\mu_i(N_j \cap M_j^c) = \nu_i^{(1)}(N_j) = 0$, was zusätzlich $\nu_i^{(1)} \ll \mu_j$ $(i \neq j)$ impliziert.

2. Angenommen, es gibt neben der oben erwähnten Darstellung $\mu_i = \nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)}$ die Zerlegung $\mu_i = \hat\nu_i^{(1)} + \hat\nu_i^{(2)}$ mit $\hat\nu_i^{(1)} \ll \mu_j$ und $\hat\nu_i^{(2)} \perp \mu_j$. Für jede $\mu_j$-Nullmenge $N_j$ und jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ ist dann $\hat\nu_i^{(1)}(A \cap N_j) \le \hat\nu_i^{(1)}(N_j) = 0$ (ebenso wie $\nu_i^{(1)}(A \cap N_j) \le \nu_i^{(1)}(N_j) = 0$), während nach Aussage des Lemmas 1.2.8 für eine durch die Singularität von $\hat\nu_i^{(2)}$ bzgl. $\mu_j$ bestimmte $\mu_j$-Nullmenge $L_j$ gilt $\hat\nu_i^{(2)}(A \cap L_j) = \hat\nu_i^{(2)}(A)$ (ebenso wie $\nu_i^{(2)}(A \cap M_j) = \nu_i^{(2)}(A)$). Setzt man daher $Z_j = L_j \cup M_j$, so hat man einerseits $\nu_i^{(2)}(A \cap Z_j) = \nu_i^{(2)}(A \cap Z_j \cap M_j)$ und $\hat\nu_i^{(2)}(A \cap Z_j) = \hat\nu_i^{(2)}(A \cap Z_j \cap L_j)$, andererseits wegen $\nu_i^{(1)}(A \cap Z_j) = \hat\nu_i^{(1)}(A \cap Z_j) = 0$ sowie $Z_j \cap M_j = M_j$ und $Z_j \cap L_j = L_j$

$$\mu_i(A \cap Z_j) = \nu_i^{(2)}(A \cap M_j) = \hat\nu_i^{(2)}(A \cap L_j) = \nu_i^{(2)}(A) = \hat\nu_i^{(2)}(A)$$

für beliebiges $A \in \mathcal{A}_\sigma$, also $\nu_i^{(2)} = \hat\nu_i^{(2)}$. Die Annahme $\mu_i = \nu_i^{(1)} + \nu_i^{(2)} = \hat\nu_i^{(1)} + \hat\nu_i^{(2)}$ impliziert entsprechend $\nu_i^{(1)} = \hat\nu_i^{(1)}$, so daß die Eindeutigkeit der Zerlegung bewiesen ist. □

## 1.3 Konstruktion von Maßen

Die Herleitung des Lebesgue'schen Integralbegriffes für reelle Funktionen über dem $\mathbb{R}^d$ stützt sich bei gegebener Teilmenge $A$ auf die Bestimmung eines Zahlenwertes $\mu_L^*(A)$ in der Form $\mu_L^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^\infty Q_k\}$ mit Hilfe der für Quader[12] $Q_k$ leicht zu berechnenden Volumina $\mathrm{vol}(Q_k)$. Die Mengenfunktion $\mu_L^*$ wird als *äußeres Lebesgue-Maß*

[12] Intervalle im Falle von $d = 1$.

von $A$ bezeichnet (s. u. Abschn. 1.4. Sie ist abzählbar subadditiv, isoton, für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ definiert und liefert für die leere Menge offenbar $\mu(\varnothing) = 0$. Da nun jede Menge $A$ als $A = (A \setminus M) \cup (A \cap M)$ (mit beliebiger sonstiger Menge $M$) darstellbar ist, erscheint es naheliegend, solche Mengen $M$ auszuzeichnen, die die Gleichheit $\mu_L^*(A) = \mu_L^*(A \setminus M) + \mu_L^*(A \cap M)$ für jedes $A$ garantierten. Dabei stellt sich für das oben definierte $\mu_L^*$ heraus, daß die Familie $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*(\mu_L^*)$ aller derart ausgezeichneten Mengen $M$ eine $\sigma$-Algebra bildet, und daß die Einschränkung von $\mu_L^*$ auf $\mathcal{C}^*$ ein vollständiges Maß ist, nämlich das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^d$. Die Schritte, die zu diesen Resultaten führen, sind verallgemeinerungsfähig: Man hat sich lediglich von der Festlegung auf den $\mathbb{R}^d$ sowie von speziellen Begriffen wie Quaderüberdeckung und Quadervolumina zu lösen, um in ähnlicher Weise zur Konstruktion von Maßen – als Einschränkungen *äußerer Maße* auf geeignete $\sigma$-Algebren – zu gelangen. Wir definieren zunächst den Terminus des äußeren Maßes.

**Definition 1.3.1** (Äußeres Maß) *Eine auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer Menge $X$ erklärte erweitert-reellwertige Mengenfunktion $\mu^*$ heißt **äußeres Maß** über $\mathfrak{P}(X)$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:*

- $\mu^*(\varnothing) = 0$, $\mu^*(M) \geq 0 \; \forall \, M \subset X$,
- $A \subseteq B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *(Isotonie),*
- $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n)$ *(abzählbare Subadditivität).*

Jedes auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ definierte Maß ist offenbar auch ein äußeres Maß. Die Namensgebung erklärt sich historisch aus der Tatsache, daß bei gegebenem Maß über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ der reellen Zahlenachse das äußere Maß einer beliebigen beschränkten Teilmenge $M$ als das Infimum der Maße aller $M$ umfassenden offenen Mengen definiert werden kann [124] (vergl. auch Lemma 1.3.8, Abschn. 1.3). Wir werden im nächsten Satz zeigen, daß es zur Konstruktion eines äußeren Maßes lediglich einer Mengenfamilie $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{P}(X)$ mit $\varnothing \in \mathcal{Q}$ und einer erweitert-reellwertigen und nicht negativen Mengenfunktion $\varphi$ bedarf, die über $\mathcal{Q}$ definiert ist und $\varphi(\varnothing) = 0$ erfüllt. Das Paar $(\mathcal{Q}, \varphi)$ aus einer Familie $\mathcal{Q}$ mit $\varnothing \in \mathcal{Q}$ und solcherart definierter Mengenfunktion $\varphi$ nennen wir ein **Basispaar**. Eine Teilmenge $A \subset X$, für die es eine abzählbare Überdeckung mit Mengen aus $\mathcal{Q}$ gibt, werde als **abzählbar $\mathcal{Q}$-überdeckbar** bezeichnet.

**Satz 1.3.1** *Es sei $(\mathcal{Q}, \varphi)$ ein Basispaar. $\mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$ bezeichne die Familie aller abzählbaren $\mathcal{Q}$-überdeckbaren Teilmengen aus $X$, d. h. $A \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}} \Longleftrightarrow A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ für Elemente $Q_n \in \mathcal{Q}$. Die vermöge $\mu_\varphi^*(A) = \infty$ für $A \notin \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$ und*

$$\mu_\varphi^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) : A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n,\; Q_n \in \mathcal{Q} \;\forall\, n \in \mathbb{N}\right\} \quad \textit{für } A \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}} \tag{1.3}$$

*definierte Mengenfunktion ist ein äußeres Maß.*

*Beweis* Offenbar ist $\mu_\varphi^*$ eine erweitert-reellwertige nicht negative Mengenfunktion über der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, die $\mu_\varphi^*(\emptyset) = 0$ erfüllt. Die Isotonie-Eigenschaft folgt aus der Tatsache, daß im Falle $A \subset B$ jede Überdeckung von $B$ auch eine Überdeckung von $A$ bildet. Zu zeigen bleibt daher lediglich die abzählbare Subadditivität. Sei $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie aus $\mathcal{X}_Q$. Ist $\mu_\varphi^*(A_k) = \infty$ für mindestens eine der Mengen $A_k$, so ist die Aussage trivial; daher nehmen wir $\mu_\varphi^*(A_k) < \infty \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ an und können voraussetzen, daß es zu jedem $A_k$ eine Quader-Überdeckung $\{Q_n(A_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_n(A_k)) < \infty$ gibt. Das bedeutet, daß man zu jedem $A_k$ auch eine solche Überdeckung $\{Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ von $A_k$ finden kann, für die $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)) \le \mu_\varphi^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ ist. Die Vereinigung $\bigcup_{n,k} Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)$ aller dieser Quader bildet eine abzählbare[13] abgeschlossene Quaderüberdeckung der Menge $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Daher gilt

$$\mu_\varphi^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \le \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_n^{(\varepsilon)}(A_k)) \le \sum_{k=1}^\infty \mu_\varphi^*(A_k) + \varepsilon,$$

mit $\varepsilon \to 0$ also die behauptete Ungleichung. □

Das durch (1.3) bzw. $\mu_\varphi^*(A) = \infty$ für $A \notin \mathcal{X}_Q$ definierte äußere Maß wird zuweilen als **verallgemeinertes äußeres Lebesgue-Maß** bezeichnet (vergl. dazu Definition 1.4.1 in Abschn. 1.4.1).

**Satz 1.3.2** (Carathéodory) *Die Familie $\mathcal{C}^*$ aller Teilmengen $M \subseteq X$, die für ein äußeres Maß $\mu^*$ die Gleichheit*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus M) + \mu^*(A \cap M) \quad \forall\, A \subset X \tag{1.4}$$

*zulassen, formt eine $\sigma$-Algebra. Ihre Elemente werden als **Carathéodory-meßbare Mengen** oder **$\mu^*$-meßbare Mengen** bezeichnet. Die Einschränkung des äußeren Maßes $\mu^*$ auf die $\sigma$-Algebra $\mathcal{C}^*$ ist ein vollständiges Maß über $\mathcal{C}^*$.*

*Beweis* 1. Die $\mu^*$-Meßbarkeit von $X$ und $\emptyset$ ist direkte Folge von $\mu^*(\emptyset) = 0$ und $A \cap X = A$, $A \setminus X = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$. Die Isotonie ist offenkundig. Zu beweisen bleibt daher die $\mu^*$-Meßbarkeit jeder abzählbaren Vereinigung $\mu^*$-meßbarer Mengen $M_k$, $k \in \mathbb{N}$. Hierzu betrachten wir zunächst eine Familie $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ wechselseitig disjunkter $\mu^*$-meßbarer Mengen und zeigen induktiv das Bestehen der Gleichung

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n D_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap D_k) \tag{1.5}$$

[13] Ist $\mathcal{F} = \{\mathcal{M}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie abzählbarer Mengen $\mathcal{M}_k = \{M_i^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, so ist deren Vereinigung $\bigcup_{i,k} M_i^{(k)}$ abzählbar.

für beliebiges $A \in X$. Für $n = 1$ ist dies trivial. Angenommen, die Gleichung sei richtig für $n = m$; dann folgt aufgrund der $\mu^*$-Meßbarkeit der endlichen Vereinigung $\bigcup_{k=1}^m D_k$ und der angenommenen wechselseitigen Disjunktheit der $D_k$

$$\begin{aligned}\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} D_k\right) &= \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} D_k \cap \bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) + \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} D_k \setminus \bigcup_{k=1}^{m} D_k\right)\\ &= \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{m} D_k\right) + \mu^*\left(A \cap D_{m+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m} \mu^*(A \cap D_k) + \mu^*\left(A \cap D_{m+1}\right) = \sum_{k=1}^{m+1} \mu^*(A \cap D_k),\end{aligned}$$

d. h. (1.5) ist auch für $n = m + 1$ – und daher für alle $n$ – richtig. Gleichung (1.5) impliziert

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap D_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n}(A \cap D_k)\right) \le \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A \cap D_k)\right) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right),$$

mit $n \to \infty$ also $\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^\infty D_k\right) \le \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A \cap D_k) \overset{!}{\le} \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^\infty D_k\right)$, d. h. man hat für wechselseitig disjunkte $\mu^*$-meßbare Mengen $D_k$ sogar

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap D_k). \tag{1.6}$$

Für endliche Vereinigungen gilt $\mu^*(A) = \mu^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^n D_k\right) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k\right)$. Unter Beachtung von $A \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k \supset A \setminus \bigcup_{k=1}^\infty D_k$ folgt daher $\mu^*(A) \ge \sum_{k=1}^n \mu^*(A \cap D_k) + \mu^*\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^\infty D_k\right)$, und der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert zusammen mit (1.6) die Aussage, daß die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{k=1}^\infty D_k$ disjunkter $\mu^*$-meßbarer Mengen $\mu^*$-meßbar ist. Für eine beliebige Familie $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\mu^*$-meßbaren Mengen definiere man nun $D_1 = M_1$ und $D_{k+1} = M_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k M_i\right)$ für $k \ge 1$. Dann sind die $D_k$ offensichtlich disjunkt, und es ist $\bigcup_{k=1}^\infty D_k = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$. Die abzählbare Vereinigung $\mu^*$-meßbarer Mengen ist daher $\mu_L^*$-meßbar.

2. Vollständigkeit: Für jede Teilmenge $U$ einer Nullmenge $N \in \mathcal{C}^*$ liefert die Isotonie des äußeren Maßes die Relationen $\mu^*(U) = 0$, $\mu^*(A \cap U) = 0$ und $\mu^*(A \setminus U) \le \mu^*(A)$ $\forall A \in \mathfrak{P}(X)$. Die Subadditivität impliziert $\mu^*(A) \le \mu^*(A \setminus U) + \mu^*(A \cap U)$, so daß $\mu^*(A \setminus U) \le \mu^*(A) \le \mu^*(A \setminus U)$ bzw. $\mu^*(A) = \mu^*(A \setminus U)$ gilt; das bedeutet $U \in \mathcal{C}^*$ wegen $\mu^*(A \cap U) = 0$. □

Die beiden Sätze 1.3.1 und 1.3.2 benennen die notwendigen Hilfsmittel zur Konstruktion von (möglicherweise trivialen) $\sigma$-Algebren und vollständigen Maßen, letztere als Einschränkung auf die $\sigma$-Algebra $\mathcal{C}^*$ der Carathéodory-meßbaren Mengen. Es bleibt die umgekehrte Frage offen, ob und wie man eine geeignete Mengenfunktion zu einem Maß fortsetzen kann. Hierzu erklären wir zunächst, was man unter der *Erweiterung* eines Basispaares zu verstehen hat.

**Definition 1.3.2** (Fortsetzung) *Es seien* $(\mathcal{Q}, \varphi)$ *und* $(\mathcal{S}, \psi)$ *Basispaare. Ist* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$ *und gilt* $\varphi(Q) = \psi(Q)$ *für alle* $Q \in \mathcal{Q}$*, so heißt* $(\mathcal{S}, \psi)$ ***Erweiterung von*** $(\boldsymbol{\mathcal{Q}}, \boldsymbol{\varphi})$*, und die Mengenfunktion* $\psi$ *heißt* ***Fortsetzung*** *der Mengenfunktion* $\varphi$*.*

Ist $\mu_\varphi^*$ das verallgemeinerte äußere Lebesgue-Maß bzgl. des Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$, so sind $\big(\mathfrak{P}(X), \mu_\varphi^*\big)$ und $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ Basispaare ($\mathcal{C}^*$ die $\sigma$-Algebra der $\mu_\varphi^*$-meßbaren Mengen). Für den Fall eines *zerlegbaren Systems* $\mathcal{Q}$ (Definition 1.1.2, Abschn. 1.1) läßt sich $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$ zeigen, so daß folgende Frage sinnvoll wird: Wann ist $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ eine Erweiterung von $(\mathcal{Q}, \varphi)$? Wann also läßt sich die Mengenfunktion $\varphi$ zu einem vollständigen Maß $\mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*}$ über der (das zerlegbare System $\mathcal{Q}$ umfassenden) $\sigma$-Algebra $\mathcal{C}^*$ fortsetzen? Der folgende Satz gibt im Falle elementarer Maße ein notwendiges und hinreichendes Kriterium hierfür an[14].

**Satz 1.3.3** (Maßerweiterungssatz) *Es sei* $\varphi$ *ein elementares Maß über* $\mathcal{Q}$*.* $\mu_\varphi^*$ *sei das äußere Lebesgue-Maß bzgl. des Basispaares* $(\mathcal{Q}, \varphi)$*,* $\mathcal{C}^*$ *bezeichne die Familie aller bzgl.* $\mu_\varphi^*$ *Carathéodory-meßbaren Mengen. Das Basispaar* $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ *ist d. u. n. d. eine Erweiterung von* $(\mathcal{Q}, \varphi)$*, wenn für die Mengenfunktion* $\varphi$ *und jede in* $\mathcal{Q}$ *abzählbar überdeckbare Menge* $Q \in \mathcal{Q}$ *gilt*

$$\varphi(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) \quad \textit{für} \quad Q \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\ Q_n \in \mathcal{Q}\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

*Beweis* 1. Es sei $(\mathcal{C}^*, \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*})$ Erweiterung von $(\mathcal{Q}, \varphi)$; dann ist $\mu_\varphi^*|_{\mathcal{Q}} = \varphi$. Als äußeres Maß ist $\mu_\varphi^*$ abzählbar subadditiv, also trifft das auch auf $\varphi$ zu; daher ist (1.7) richtig.

2. Zu zeigen ist, daß aus (1.7) die Relationen $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$ und $\varphi(Q) = \mu_\varphi^*(Q)\ \forall\, Q \in \mathcal{Q}$ folgen. Zunächst hat man $\mu_\varphi^*(Q) \leq \varphi(Q)\ \forall\, Q \in \mathcal{Q}$ gemäß Definition des äußeren Maßes; nach (1.7) gilt $\varphi(Q) \leq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(Q_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \supseteq Q,\ Q_n \in \mathcal{Q}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$, also $\varphi(Q) \leq \mu_\varphi^*(Q)$, so daß sich sofort $\varphi(Q) = \mu_\varphi^*(Q)\ \forall\, Q \in \mathcal{Q}$ ergibt.

Es bleibt $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$, also die Carathéodory-Meßbarkeit aller Elementmengen $Q \in \mathcal{Q}$ nachzuweisen:

$$\mu_\varphi^*(A) = \mu_\varphi^*(A \setminus Q) + \mu_\varphi^*(A \cap Q) \quad \forall\, A \subset X.$$

Diese Beziehung gilt für alle $M$ aus $\mathcal{Q}$, wie folgendermaßen einzusehen ist: $M \in \mathcal{Q}$ bedeutet $M \setminus Q = \bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell$ mit wechselseitig disjunkten Elementen aus $\mathcal{Q}$. Die endliche Additivität von $\varphi$ führt daher zu $\varphi\left(\bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{m} \varphi(Q_\ell)$. $M \cap Q$ ist Element von $\mathcal{Q}$, und somit ist $\varphi(M) = \varphi\big((M \cap Q) \cup \big[\bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell\big]\big) = \varphi(M \cap Q) + \sum_{\ell=1}^{m} \varphi(Q_\ell) \overset{!}{=} \mu_\varphi^*(M)$. Aufgrund der Subadditivität des äußeren Maßes $\mu_\varphi^*$ ist aber $\sum_{\ell=1}^{m} \varphi(Q_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m} \mu_\varphi^*(Q_\ell) \geq \mu_\varphi^*\left(\bigcup_{\ell=1}^{m} Q_\ell\right) = \mu_\varphi^*(M \setminus Q)$, und das heißt $\mu_\varphi^*(M \cap Q) + \mu_\varphi^*(M \setminus Q) \geq \mu_\varphi^*(M)$, während doch die Subadditivität von $\mu_\varphi^*$ die umgekehrte Relation garantiert. Somit ist die zu beweisende Gleichung sicher für alle $M \in \mathcal{Q}$ richtig.

[14] Zur Erinnerung: Ein elementares Maß ist eine nicht negative, endlich additive, über einem zerlegbaren System $\mathcal{Q}$ definierte erweitert-reellwertige Mengenfunktion $\varphi$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$; vergl. Definition 1.1.2, Abschn. 1.1, sowie Abschn. 1.2.

Sei nun $M$ abzählbar $\mathcal{Q}$-überdeckbar (also $M \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$). Gemäß Definition des äußeren Lebesgue-Maßes gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\mathcal{Q}$-Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n^{(\varepsilon)}$ von $M$, so daß die Beziehung $\mu_\varphi^*(M) > \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\big(Q_n^{(\varepsilon)}\big) - \varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\varphi^*\big(Q_n^{(\varepsilon)}\big) - \varepsilon$ besteht. Wie gezeigt, gilt für die Elemente $Q_n^{(\varepsilon)}$ aus $\mathcal{Q}$ die Gleichung $\mu_\varphi^*\big(Q_n^{(\varepsilon)}\big) = \mu_\varphi^*\big(Q_n^{(\varepsilon)} \setminus Q\big) + \mu_\varphi^*\big(Q_n^{(\varepsilon)} \cap Q\big)$, daher folgt für $M \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$

$$\mu_\varphi^*(M) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\varphi^*\big(Q_n^{(\varepsilon)} \setminus Q\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\varphi^*\big(Q_n^{(\varepsilon)} \cap Q\big).$$

Demnach besteht wegen $M \setminus Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(Q_n^{(\varepsilon)} \setminus Q\big)$ und $M \cap Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(Q_n^{(\varepsilon)} \cap Q\big)$ für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $\mu_\varphi^*(M) + \varepsilon > \mu_\varphi^*(M \setminus Q) + \mu_\varphi^*(M \cap Q)$, d. h. es ist $\mu_\varphi^*(M) \geq \mu_\varphi^*(M \setminus Q) + \mu_\varphi^*(M \cap Q)$. Diese Ungleichung gilt jedoch trivialerweise auch für den Fall $M \notin \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$, da dann $\mu_\varphi^*(M) = \infty$ ist. Da aus der Subadditivität von $\mu_\varphi^*$ wiederum die umgekehrte Relation folgt, hat man für jedes $Q \in \mathcal{Q}$ und beliebiges $M \in \mathfrak{P}(X)$ die Gleichung $\mu_\varphi^*(M) = \mu_\varphi^*(M \setminus Q) + \mu_\varphi^*(M \cap Q)$, d. h. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}^*$. □

Ist also (1.7) erfüllt, so kann jedes elementare Maß $\varphi$ – und damit auch jeder Inhalt – zu einem vollständigen Maß $\mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*}$ über $\mathcal{C}^*$ fortgesetzt werden, und umgekehrt. Das ist der Grund, weshalb man bzgl. des Satzes 1.3.3 von einem *Maßerweiterungssatz* spricht. Unter gewissen Umständen – falls es nämlich eine abzählbare $\mathcal{Q}$-Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ des Raumes $X$ mit $\varphi(Q_n) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt[15] – ist diese Erweiterung über der minimalen $\mathcal{Q}$ enthaltenden $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{C}^*$ eindeutig.

**Satz 1.3.4** (Eindeutigkeitssatz) *Es sei $\mathcal{Q}$ ein zerlegbares Mengensystem, $\varphi$ ein elementares Maß über $\mathcal{Q}$. Es gebe eine abzählbare $\mathcal{Q}$-Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ des Raumes $X$ mit $\varphi(Q_n) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Die Erweiterung des Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$ zu einem Paar $(\sigma(\mathcal{Q}), \mu_\varphi)$ mit vollständigem Maße $\mu_\varphi = \mu_\varphi^*|_{\sigma(\mathcal{Q})}$ ist dann eindeutig.*

*Beweis* Zu einem Element $Q \in \mathcal{Q}$ mit $\varphi(Q) < \infty$ sei $\mathcal{A}_Q$ die Familie aller Mengen $M$, die sich als Durchschnitt von $Q$ mit einer endlichen disjunkten Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{Q}$ darstellen lassen:

$$\mathcal{A}_Q = \left\{ M : M = Q \cap \bigcup_{k=1}^{m} Q_k,\ Q_k \in \mathcal{Q},\ Q_i \cap Q_j = \varnothing \text{ für } i \neq j \right\}.$$

Man erkennt leicht, daß $\mathcal{A}_Q$ eine Algebra ist. Es seien nun $\mu_\varphi^{(1)}$, $\mu_\varphi^{(2)}$ zwei über $\sigma(\mathcal{Q})$ durch Fortsetzung von $\varphi$ bestimmte vollständige Maße. Als solche erfüllen sie die Relation $\mu_\varphi^{(j)}(M) = \sum_{k=1}^{m} \varphi(Q_k \cap Q)$ für $M \in \mathcal{A}_Q$, $j = 1, 2$, d. h. über $\mathcal{A}_Q$ stimmen die beiden Maße überein. Zu zeigen bleibt, daß das für alle Elemente aus $\sigma(\mathcal{Q})$ gilt. Sei $\mathcal{G} = \{A \subset X : \mu_\varphi^{(1)}(A) = \mu_\varphi^{(2)}(A)\}$, so daß also $\mathcal{A}_Q \subset \mathcal{G}$ für jedes feste $Q \in \mathcal{Q}$ ist. Da offenbar der Limes

[15] In diesem Falle nennt man das elementare Maß $\sigma$-endlich.

jeder monotonen Folge aus $\mathcal{G}$ wieder zu $\mathcal{G}$ gehört, $\mathcal{G}$ somit eine monotone Familie formt, liefert das Korollar 1.1.7 die Aussage, daß auch jede der von den $\mathcal{A}_Q$ erzeugten $\sigma$-Algebren $\sigma(\mathcal{A}_Q)$ in $\mathcal{G}$ enthalten ist: $\sigma(\mathcal{A}_Q) \subset \mathcal{G}\ \forall\, Q \in \mathcal{Q}$. Sei nun $A \in \sigma(\mathcal{Q})$. Laut Vor. gibt es eine abzählbare Menge von Elementen $U_n$ aus $\mathcal{Q}$ mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ und $\varphi(U_n) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, wobei man aufgrund der Zerlegbarkeit des Systems $\mathcal{Q}$ annehmen kann, daß die $U_n$ wechselseitig disjunkt sind. Damit ist $A \cap U_n \in \mathcal{A}_Q$ und folglich $\mu_\varphi^{(1)}(A \cap U_n) = \mu_\varphi^{(2)}(A \cap U_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \mu_\varphi^{(1)}(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \mu_\varphi^{(1)}(A) = \mu_\varphi^{(2)}(A)$, also $A \in \mathcal{G}$ und $\sigma(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{G}$. □

Betrachtet man insbesondere den Fall, daß $\varphi$ ein Prämaß (also eine nicht negative und $\sigma$-additive Mengenfunktion über einer Algebra $\mathcal{A}$ mit $\varphi(\emptyset) = 0$) ist, so kann man aus Satz 1.3.4 Folgendes schließen.

**Korollar 1.3.5** *$\varphi$ sei Prämaß über $\mathcal{A}$. Die Familie $\mathcal{C}^*$ der Carathéodory-meßbaren Mengen bzgl. des äußeren Maßes $\mu_\varphi^*$ umfaßt $\mathcal{A}$, und es gibt mindestens ein Maß $\mu$ über $\sigma(\mathcal{A})$ mit $\mu(A) = \varphi(A)$ für $A \in \mathcal{A}$ (nämlich $\mu = \mu_\varphi^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$). Ist $\varphi$ darüberhinaus $\sigma$-endlich, so ist $\mu$ eindeutig bestimmt und ebenfalls $\sigma$-endlich.*

Im Falle des allgemeinen äußeren Lebesgue-Maßes $\mu_\varphi^*$ bzgl. eines Basispaares $(\mathcal{Q}, \varphi)$ bezeichnet man dessen Einschränkung auf die $\sigma$-Algebra der Carathéodory-meßbaren Mengen als **allgemeines Lebesgue-Maß bzgl. $\varphi$**. Das Lebesgue-Maß $\lambda$ der Integrationstheorie – und ebenso das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß – sind spezielle Maße dieses Typs.

Es sei nun $(X; d)$ ein metrischer Raum mit der Metrik $d$. Eine Teilmenge $O$ ist darin d. u. n. d. offen, wenn mit jedem $x \in O$ noch eine ganze Kugelumgebung $U_\varepsilon(x) = \{z : d(x,z) < \varepsilon\}$ zu $O$ gehört. Die Komplemente offener Mengen sind die abgeschlossenen Mengen. Mit Hilfe der Metrik $d$ ist zudem ein Abstandsbegriff für Teilmengen $A, B \subset X$ vermöge

$$\rho(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y)$$

erklärt (vergl. Abschn. A.1, insbesondere Abschn. A.1.3). Der Begriff der metrischen Trennbarkeit ermöglicht die Auszeichnung von äußeren Maßen mit „Additivitätseigenschaft".

**Definition 1.3.3** (Metrisches äußeres Maß) *Ein über dem metrischen Raum $(X; d)$ definiertes äußeres Maß $\mu^*$ heißt **metrisches äußeres Maß**, falls für Teilmengen $A, B$ mit $d(A,B) > 0$ stets gilt $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.*

**Lemma 1.3.6** *Es sei $\mu^*$ ein metrisches äußeres Maß über $(X; d)$, $A \subseteq X$ mit $\mu^*(A) < \infty$ und $A \subseteq M^\circ$ für eine offene Menge $M^\circ$ in $(X; d)$. Bezeichnet $A_k$ zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Menge aller Punkte $x \in A$ mit $\rho(\{x\}, X \setminus M^\circ) \geq 1/k$, so gilt*

$$\lim_{k \to \infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A).$$

*Beweis* Die Isotonie von $\mu^*$ besagt zusammen mit $A_k \subset A_{k+1}$, daß die Folge $\{\mu^*(A_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ monoton nicht abnehmend ist und $\mu^*(A_k) \leq \mu^*(A)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt. Das impliziert $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$. Da es wegen $A \subset M^\circ$ zu jedem $x \in A$ eine $\varepsilon_x$-Umgebung $U_{\varepsilon_x}(x)$ mit $U_{\varepsilon_x}(x) \subset M^\circ$ gibt, also $\rho(\{x\}, X \setminus M^\circ) \geq \frac{1}{k_{\varepsilon_x}}$ für $k_{\varepsilon_x} \leq \frac{1}{\varepsilon_x}$ gilt, hat man auch $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, d. h. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sei $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ für $k \geq 2$ und $B_1 = A_1$, so daß $A$ in der Form $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ schreibbar ist. Da offensichtlich $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_n$ für jedes $n \geq 1$ gilt, folgt

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_n) + \mu^*\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) \leq \mu^*(A_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Laut Voraussetzung ist $\rho(\{x\}, X \setminus M^\circ) \geq \frac{1}{n}$ für $x \in B_n$, also $\rho(B_n, B_{n+1}) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$, daher folgt $\mu^*(B_n \cup B_{n+1}) = \mu^*(B_n) + \mu^*(B_{n+1})$, da $\mu^*$ metrisches äußeres Maß ist. Betrachtet man also endlich viele, etwa $n$, der $B_n$, so folgt einerseits nach Konstruktion $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \subset A$, andererseits

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(B_k) \leq \mu^*(A) < \infty \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k)$ ist also konvergent, etwa gegen $S$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so daß $|\sum_{k=1}^{n} \mu^*(B_k) - S| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k)| < \varepsilon$ ist für alle $n > n_0(\varepsilon)$. Demnach ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu^*(B_k) = 0$, und man erhält $\mu^*(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$. Andererseits liefert $A_n \subset A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die umgekehrte Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \leq \mu^*(A)$, so daß Gleichheit besteht. □

**Lemma 1.3.7** *Jede abgeschlossene Menge – und daher auch jede Borel-Menge – eines metrischen Raumes $[X; d]$ ist unter einem metrischen äußeren Maß $\mu^*$ Carathéodory-meßbar.*

*Beweis* Sei $\bar{B}$ abgeschlossen in $(X; d)$. Zu zeigen ist $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap \bar{B}) + \mu^*(A \setminus \bar{B})$ für jedes $A$ mit $\mu^*(A) < \infty$ (für $\mu^*(A) = \infty$ ist die Aussage trivial). Es sei $\tilde{A} := A \setminus \bar{B} \subset \bar{B}^c$, worin $\bar{B}^c = \mathbb{R}^d \setminus \bar{B} =: M^\circ$ offen im $(X; d)$ ist. Lemma 1.3.6 besagt, daß es eine Mengenfolge $\{\tilde{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\rho(\tilde{A}_n, \bar{B}) \geq \frac{1}{n}$ und $\lim_{n\to\infty} \mu^*(\tilde{A}_n) = \mu^*(A \setminus \bar{B})$. $\rho(\tilde{A}_n, \bar{B}) \geq \frac{1}{n}$ impliziert $\rho(\tilde{A}_n, A \cap \bar{B}) \geq \frac{1}{n}$, und damit wegen $\tilde{A}_n \subset A \setminus \bar{B}$ und $A = (A \setminus \bar{B}) \cup (A \cap \bar{B})$ die Beziehung $\mu^*(A) \geq \mu^*(\tilde{A}_n \cup [A \cap \bar{B}]) = \mu^*(\tilde{A}_n) + \mu^*(A \cap \bar{B})$. Der Übergang $n \to \infty$ liefert daher $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \setminus \bar{B}) + \mu^*(A \cap \bar{B})$, also die $\mu^*$-Meßbarkeit von $\bar{B}$. Da die $\mu^*$-meßbaren Mengen eine $\sigma$-Algebra bilden, sind auch die Komplemente, also alle offenen Mengen, $\mu^*$-meßbar. □

**Lemma 1.3.8** *Es sei $\mu$ ein Maß über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines metrischen Raumes $(X; d)$. Die Mengenfunktion $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch das Infimum*

$$\mu^*(M) = \inf\left\{\mu(O) : O \supset M,\ O \text{ offen}\right\} \forall\, M \in \mathfrak{P}(X),$$

*ist ein äußeres Maß.*

*Beweis* $\mu^*$ besitzt offensichtlich die Eigenschaften 2 und 3 in Definition 1.3.1, d. h. es ist lediglich die abzählbare Subadditivität nachzuweisen. Es sei also $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Mengenfolge in $X$, wobei wir O. E. d. A. voraussetzen können, daß für alle $E_n$ $\mu^*(E_n) < \infty$ ist (anderenfalls bestände die zu beweisende Ungleichung á priori). Aufgrund der Voraussetzung, daß $X$ ein metrischer Raum ist, gibt es gemäß Definition von $\mu^*$ zu beliebigem $\varepsilon > 0$ für jedes $E_n$ eine offene Menge $O_n \supset E_n$ mit der Eigenschaft $\mu^*(E_n) \leq \mu(O_n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Damit folgt unter Nutzung der Maßeigenschaft von $\mu$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(O_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) + \varepsilon,$$

also die Subadditivität von $\mu^*$. □

Ein Resultat, das später eine Rolle spielen wird (vergl. Abschn. 1.4) betrifft die Frage, wann die Einschränkung eines äußeren Maßes auf die Borel-$\sigma$-Algebra eines topologischen $T_2$-Raumes ein Maß definiert.

**Satz 1.3.9** *Es sei $\mu^*$ ein äußeres Maß über der Potenzmenge eines Hausdorff-Raumes $[X, \mathcal{O}]$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\mu^*(M) = \inf\left\{\mu^*(O) : O \supset M,\ O \text{ offen}\right\}\ \forall\, M \in \mathfrak{P}(X)$,
2. $\mu^*(O) = \sup\left\{\mu^*(K) : K \subset O,\ K \text{ kompakt}\right\}$ *für alle offenen Mengen* $O \in \mathcal{O}$,
3. $\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$ *für disjunkte kompakte Mengen* $K_1, K_2$.

*Die Restriktion von $\mu^*$ auf die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist dann ein Maß.*

*Beweis* 1. Es sei $\mathcal{C}^*$ die $\sigma$-Algebra aller $\mu^*$-meßbaren Mengen aus $\mathfrak{P}(X)$. Wir setzen

$$\mathcal{A}_O^* = \left\{M : \mu^*(O) \geq \mu^*(O \cap M) + \mu^*(O \setminus M),\ O \text{ offen}\right\}$$

und zeigen zunächst, daß $\mathcal{A}_O^* = \mathcal{C}^*$ ist. Offenbar ist $\mathcal{A}_O^* \supseteq \mathcal{C}^*$. Es sei $M_0 \in \mathcal{A}_O^*$, d. h. wir haben $\mu^*(O) \geq \mu^*(O \cap M_0) + \mu^*(O \setminus M_0)$ für alle offenen Mengen $O \in \mathcal{O}$. Für eine beliebige Teilmenge $E \subset X$ betrachte man nun alle $E$ umfassenden offenen Mengen $O_E \supset E$; dann gilt

$$\mu^*(O_E) \geq \mu^*(O_E \cap M_0) + \mu^*(O_E \setminus M_0) \geq \mu^*(E \cap M_0) + \mu^*(E \setminus M_0)\ \forall\, O_E \supset E.$$

Eigenschaft 1 besagt, daß die zweite Ungleichung auch für das Infimum aller $\mu^*(O_E)$ gilt, d. h. es ist $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap M_0) + \mu^*(E \setminus M_0)$, also $M_0 \in \mathcal{A}_O^*$.

2. Da jede einpunktige Menge kompakt ist, gibt es zu jeder Teilmenge $M$ von $X$ mindestens eine in $M$ enthaltene kompakte Menge. Zu zwei beliebigen offenen Mengen $O, M^\circ$ können daher stets kompakte Mengen $K_1, K_2$ gefunden werden, die die Relationen $K_1 \subset O \cap M^\circ$, $K_2 \subset O \setminus K_1$ erfüllen. Wir betrachten alle solche Mengen $K_1, K_2$. Gemäß Eigenschaft 3 und $O \supseteq K_1 \cup K_2$ hat man

$$\mu^*(O) \geq \mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2).$$

Jede kompakte Menge in einem Hausdorff-Raum ist abgeschlossen, daher ist $X \setminus K_1$ offen, und somit auch $O \cap (X \setminus K_1) = O \setminus K_1$ offen. Eigenschaft 2 besagt, daß $\mu^*(O \setminus K_1)$ das Supremum über alle $\mu^*(K_2)$ für derartige kompakte Mengen $K_2 \subset O \setminus K_1$ ist, und für dieses Supremum gilt obige Ungleichung ebenfalls; daher folgt

$$\mu^*(O) \geq \mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(O \setminus K_1).$$

$\mu^*(O \setminus K_1)$ umfaßt $\mu^*(O \setminus M^\circ)$ nach Konstruktion, also hat man $\mu^*(O) \geq \mu^*(K_1) + \mu^*(O \setminus M^\circ)$. Nun ist Eigenschaft 2 nochmals heranzuziehen, um $\mu^*(O \cap M^\circ)$ als das Supremum über alle äußeren Maße $\mu^*(K_1)$ so gearteter kompakter Mengen $K_1$ zu erkennen, so daß die Ungleichung auch für $\mu^*(O \cap M^\circ)$ anstelle von $\mu^*(K_1)$ gelten muß:

$$\mu^*(O) \geq \mu^*(O \cap M^\circ) + \mu^*(O \setminus M^\circ).$$

Damit ist bewiesen, daß jede offene Menge in $\mathcal{A}_O^*$ liegt, nach dem unter 1 Bewiesenen also in $\mathcal{C}^*$, d. h. alle offenen Mengen sind $\mu^*$-meßbar. Die von den offenen Mengen erzeugte Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist somit in $\mathcal{C}^*$ enthalten, und da $\mu^*$ über $\mathcal{C}^*$ ein Maß ist, gilt dies auch für $\mathcal{B}(X)$. □

## 1.4 Spezielle Maße

Die bekanntesten speziellen Maße sind die in der Analysis gebräuchlichen Integrationsmaße, d. h. das Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß. Deren Kennzeichnung – wie auch der später genannte „spezielle Maßerweiterungssatz" – verweisen auf die Bedeutung der Sätze 1.3.3 und 1.3.4. Wir werden in diesem Abschnitt außerdem auf die für die stochastische Modellierung wichtigen Radon-Maße, insbesondere die Radon'schen Zählmaße, eingehen.

### 1.4.1 Lebesgue-Maß und Lebesgue-Stieltjes'scher Inhalt

**Definition 1.4.1** (Lebesgue-Maß) *$\mathcal{Q}$ bezeichne die Familie aller Quader (verallgemeinerten Rechtecken) des $d$-dimensionalen reellen Raumes $\bar{\mathbb{R}}^d$ einschließlich der leeren Menge von* *der Form $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$, so daß auch die Mengen $Q_n$ in dem Ausdruck (1.3) (s. Abschn. 1.3) Quader der Form*

$$Q_{\boldsymbol{a}^{(n)},\boldsymbol{b}^{(n)}} = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}^{(n)} < \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}^{(n)}\right\}$$

*sind mit $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\boldsymbol{a}^{(n)} = (a_1^{(n)}, \dots, a_d^{(n)})$, $\boldsymbol{b}^{(n)} = (b_1^{(n)}, \dots, b_d^{(n)})$[16]. $\mathcal{Q}$ formt ein zerlegbares System. Wird die Mengenfunktion $\varphi$ durch*

$$\varphi(Q_{\boldsymbol{a}^{(n)},\boldsymbol{b}^{(n)}}) = \mathrm{vol}(Q_{\boldsymbol{a}^{(n)},\boldsymbol{b}^{(n)}}) = \prod_{\nu=1}^{d}(b_\nu^{(n)} - a_\nu^{(n)})$$

*dargestellt[17] ($d \ge 1$), und ist damit das äußere Maß $\mu_\varphi^*$ wie in (1.3) in der Form*

$$\mu_\varphi^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(Q_n) : A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n,\ Q_n \in \mathcal{Q}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{für } A \in \mathcal{X}_{\mathcal{Q}}$$

*gegeben, so bezeichnet man das zum Basispaar $(\mathcal{Q}, \varphi)$ gemäß Satz 1.3.1 bestimmte vollständige Maß $\lambda = \mu_\varphi^*|_{\mathcal{C}^*}$ als* ***Lebesgue-Maß über dem*** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{d}}$. *$\lambda$ ist durch seine Werte $\lambda(Q) = \mu_\varphi^*(Q)$ auf $\mathcal{Q}$ eindeutig bestimmt, da $(\mathcal{Q}, \varphi)$ die Voraussetzungen der Sätze 1.3.3 und 1.3.4 erfüllt. $\mu_\varphi^*$ heißt* ***Lebesgue'sches äußeres Maß****.*

$\varphi = \mathrm{vol}$ ist diejenige Mengenfunktion über der Borel-$\sigma$-Algebra des reellen $\mathbb{R}^d$, die den aus dem kartesischen Produkt von Intervallen (Borel-Mengen) gebildeten Quadern deren Volumen zuordnet. $\varphi$ ist über kompakten Mengen des $\mathbb{R}^d$ endlich. Das Lebesgue-Maß $\lambda$ der Integrationstheorie geht aus der Vervollständigung des mittels des äußeren Maßes $\mu_\varphi^*$ gebildeten Maßes $\lambda$ hervor und repräsentiert ein vollständiges $\sigma$-endliches Maß über dem $\mathbb{R}^d$, das insbesondere jedem Quader seinen Inhaltswert zuordnet: $\lambda(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \prod_{\nu=1}^{d}(b_\nu - a_\nu)$. Es ist ein **Borel-Maß**[18]. Sind $Q_1, Q_2$ mit $Q_1 \subset Q_2$ Borelmengen gleichen Inhalts, so wird das Lebesgue-Maß einer jeden Menge $M$ mit $Q_1 \subset M \subset Q_2$ gerade durch $\lambda(M) = \varphi(Q_i)$ dargestellt ($i \in \{1, 2\}$).

Im eindimensionalen reellen Raum formt – wie bereits erwähnt (siehe Beispiel 5 in Abschn. 1.1) – die Mengenfamilie

$$\mathcal{A}_Q = \left\{\bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j] : m \in \mathbb{N},\ a_j, b_j \in \bar{\mathbb{R}},\ a_j < b_j\right\} \cup \{\varnothing\}$$

[16] Größenrelationen für Vektoren sind komponentenweise zu verstehen.

[17] Tatsächlich ist es hierfür belanglos, ob es sich um offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle handelt.

[18] Vergl. Definition 1.4.6 in Abschn. 1.4.4. Man beachte, daß es sich nicht um den kompaktifizierten reellen Raum handelt. Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist Teilmenge eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$.

eine Algebra. Definiert man mit Hilfe einer monoton nicht abnehmenden Funktion $F : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $|F(r)| < \infty$ für $|r| \neq \infty$ die Mengenfunktion $\varphi_F : \mathcal{A}_Q \to \bar{\mathbb{R}}$ durch

$$\begin{aligned} \varphi_F(\varnothing) &= 0, \\ \varphi_F\big((a,b]\big) &= F(b) - F(a) \quad \text{für } a < b, \\ \varphi_F\left(\bigcup_{j=1}^{m}(a_j, b_j]\right) &= \sum_{j=1}^{m} \varphi_F\big((a_j, b_j]\big) \quad \text{für } b_j \leq a_{j+1}\ \forall\, j \leq m, \end{aligned} \tag{1.8}$$

so ist $\varphi_F$ ein elementares Maß (speziell ein Inhalt) über $\mathcal{A}_Q$, das man als **Lebesgue-Stieltjes'schen Inhalt bzgl. $F$** bezeichnet. Da man $\mathbb{R}$ durch abzählbar viele Intervalle der Form $(a_j, b_j]$ mit $a_j < b_j$ und $\varphi_F\big((a_j, b_j]\big) < \infty$ überdecken kann, handelt es sich um einen $\sigma$-endlichen Inhalt. Das zugehörige äußere Lebesgue-Maß $\mu^*$ über $\mathfrak{P}(\bar{\mathbb{R}})$ ist gemäß (1.3) in Abschn. 1.3 definiert. Es läßt sich zeigen, daß $\varphi_F$ genau dann $\sigma$-additiv (somit ein Prämaß) ist, wenn die Funktion $F$ rechtsstetig ist mit $\lim_{r \to -\infty} F(r) = F(-\infty)$ und $\lim_{r \to +\infty} F(r) = F(+\infty)$. In diesem Falle existiert nach Satz 1.3.4 *genau eine* Fortsetzung von $\varphi_F$ zu einem vollständigen Maß – dem *Lebesgue-Stieltjes'schen Maß* $\lambda_F$. Dazu die

**Definition 1.4.2** (Lebesgue-Stieltjes'sches Maß) *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton nicht abnehmende und von rechts stetige reellwertige Funktion mit $|F(r)| < \infty$ für $|r| \neq \infty$. $\mathcal{Q}$ bezeichne die Familie aller halboffenen Intervalle der Form $(a, b]$ für $a < b$ unter Einschluß der leeren Menge. Wird die Mengenfunktion $\varphi_F$ durch $\varphi_F(\varnothing) = 0$ und*

$$\varphi_F(Q_{a,b}) = F(b) - F(a) \quad \textit{für } Q_{a,b} = (a, b]$$

*definiert, und ist damit das **Lebesgue-Stieltjes'sche äußere Maß $\mu^*_\varphi$** gemäß Gleichung (1.3) bestimmt, so heißt das über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{C}^*$ aller Carathéodory-meßbaren Mengen zum Basispaar $(\mathcal{Q}, \varphi_F)$ definierte vollständige Maß $\lambda_F = \mu^*_{\varphi_F}|_{\mathcal{C}^*}$ das **Lebesgue-Stieltjes'sche Maß bzgl. $F$**.*

Während somit ein Lebesgue-Stieltjes'scher Inhalt $\varphi_F$ und damit das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß mit Hilfe einer monoton nicht abnehmenden Funktion $F$ definiert sind, kann auch der umgekehrte Weg beschritten werden, der von einer erweitert-reellwertigen und endlich additiven Mengenfunktion $\theta$ ausgeht. Dieser Weg ist in der Integrationstheorie üblich, d. h. insbesondere im Falle des meßbaren Raumes $[\mathbb{R}^n, \mathcal{B}]$ (wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall). Da hierbei nicht ausgeschlossen ist, daß die Mengenfunktion $\theta$ auch negative Werte annimmt, spricht man von einem *Stieltjes'schen Quasi-Inhalt* [169]. Sei $Q = [a, b]$ ein ggf. nicht endliches abgeschlossenes Intervall der reellen Achse. Als *Subintervall* bezeichnen wir jedes halboffene Intervall $(x, y] \subset Q$ mit $x > a$ und jedes abgeschlossene Intervall $[a, y]$ mit $y \leq b$. Um beide Subintervalltypen mit gleicher Symbolik zu versehen, schreibt man dafür $\{x, y]$.

**Definition 1.4.3** *Es sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Subintervallen des Intervalls $Q = [a, b]$. Eine reellwertige und endlich additive Mengenfunktion $\theta : \mathcal{S} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\theta(\varnothing) = 0$ heißt* ***Stieltjes'scher Quasi-Inhalt****.*

Die durch die Inhaltswerte (Volumina) $\mathrm{vol}(\{x, y]) = y - x$ definierte Mengenfunktion $\theta = \varphi$ ist natürlich auch ein solcher Stieltjes'scher Quasi-Inhalt, und generell ist jeder Inhalt (und, allgemeiner, jedes Prämaß oder Maß) auch ein Stieltjes'scher Quasi-Inhalt.

In praktischen Fällen und in der Integrationstheorie reicht es i. a. aus, die Stieltjes'schen Quasi-Inhalte über einer *dichten Menge von Subintervallen* zu definieren. Dazu die folgende

**Definition 1.4.4** *Es sei $\mathcal{D}$ eine in $Q = [a, b]$ dichte Menge, die beide Endpunkte $a$ und $b$ enthält. Die Gesamtheit $\mathcal{S}$ aller derjenigen Subintervalle $\{x, y]$, deren Endpunkte zu $\mathcal{D}$ gehören, wird als in $Q$* ***dichte Menge von Subintervallen*** *bezeichnet.*

Jedem Stieltjes'schen Quasi-Inhalt $\theta$ ist eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ vermöge

$$F(x) = \begin{cases} \theta\big([a, x]\big) & \text{für } x \in \mathcal{D},\ x \neq a, \\ 0 & \text{für } x = a \end{cases}$$

zuzuordnen, die man als die **zu $\boldsymbol{\theta}$ gehörige erzeugende Funktion** bezeichnet [169]; sie erfüllt die Relation

$$\theta\big((x, y]\big) = F(y) - F(x).$$

$F$ ist offenbar dann und nur dann monoton nicht abnehmend über $[a, b]$, wenn $\theta$ ein nichtnegativer Stieltjes'scher Quasi-Inhalt ist. In diesem Falle ist $F$ – sofern $b = \infty$ und $F(\infty) = 1$ gilt – eine Verteilung im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie. Umgekehrt definiert jede über einer in $Q = [a, b]$ dichten Menge $\mathcal{D}$ endliche Funktion $F(x)$, die in $x = a$ verschwindet, einen Stieltjes'schen Quasi-Inhalt. Im Falle monoton nicht abnehmender Funktionen $F$ wird damit der Zusammenhang sowohl zum Lebesgue-Stieltjes'schen Inhalt als auch zum Riemann-Stieltjes'schen Inhalt (sowie dem Riemann-Stieltjes-Integral) hergestellt; letzteres dann, wenn anstelle der Konstruktion über das Lebesgue'sche äußere Maß direkt Quasi-Inhalte endlicher Variation herangezogen werden.

### 1.4.2 Das Helly'sche Auswahlprinzip

Ein Satz von Eduard Helly besagt, daß aus einer Menge punktweise gleichmäßig beschränkter Funktionen endlicher Variation, definiert über einem kompakten Intervall, stets eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die punktweise gegen eine Grenzfunktion endlicher Variation konvergiert [78]. Dieser Satz kann auf Folgen von Quasi-Inhalten über $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ verallgemeinert werden, sofern entsprechende Beschränktheitseigenschaften vorliegen. Wir konzentrieren uns im Folgenden wieder auf den eindimensionalen Fall.

**Satz 1.4.1** (Helly'sches Auswahlprinzip) *$\mathcal{D}$ sei eine in dem Intervall $Q = [a, b]$ der reellen Achse dichte Menge, die beide Endpunkte $a$ und $b$ enthält. $\mathcal{S}$ bezeichne eine im Sinne der Definition 1.4.4 dazu gehörige dichte Menge von Subintervallen von $Q$. Eine über $\mathcal{S}$ definierte unendliche Menge $\mathcal{F} = \{\theta_i\}_{i\in I}$ von Stieltjes'schen Quasi-Inhalten gleichmäßig beschränkter Variation[19] enthält stets eine (Teil-)Folge $\{\theta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, die gegen einen Quasi-Inhalt $\theta$ über $\mathcal{S}$ von endlicher Variation konvergiert.*

*Beweis* Da $\mathbb{R}$, versehen mit der natürlichen Topologie, separabel ist, kann man davon ausgehen, daß $\mathcal{S}$ eine in $Q$ dichte *Folge* $\{\{x_j, y_j]\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Subintervallen enthält. Die Menge der Werte $\theta_i(\{x_1, y_1])$ $(i \in I)$ ist beschränkt und enthält daher eine konvergente Folge $\{\theta_n(\{x_1, y_1])\}_{n\in\mathbb{N}}$. Die entsprechende Folge $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Quasi-Inhalte sei in $\{\theta_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ umbenannt; aus ihr kann aus gleichem Grunde eine Teilfolge $\{\theta_{n_\nu}^{(1)}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ derart ausgewählt werden, daß die Werte $\theta_{n_\nu}^{(1)}(\{x_2, y_2])$ über dem zweiten Subintervall eine konvergente Zahlenfolge bilden, so daß – mit der Umbenennung $\{\theta_{n_\nu}^{(1)}\}_{\nu\in\mathbb{N}} = \{\theta_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ – sowohl die Zahlenfolge $\{\theta_n^{(2)}(\{x_1, y_1])\}_{n\in\mathbb{N}}$ als auch die Zahlenfolge $\{\theta_n^{(2)}(\{x_2, y_2])\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d. h. $\{\theta_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist über beiden ersten Subintervallen konvergent. Entsprechend gibt es in $\{\theta_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\{\theta_n^{(3)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, die über den ersten drei Subintervallen konvergente Folgen bildet, usw. Die Fortführung dieser Konstruktion garantiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ die Existenz einer Teilfolge $\{\theta_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ der ursprünglichen Folge $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Quasi-Inhalten, mit der alle $j$ Zahlenfolgen $\{\theta_n^{(j)}(\{x_k, y_k])\}_{n\in\mathbb{N}}$, $k = 1, \dots, j$, mit $n \to \infty$ konvergieren. Man wähle nun die Diagonalfolge $\{\theta_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, die auf allen Subintervallen der in $Q$ dichten Folge konvergiert und daher eine über $Q$ gegen eine Mengenfunktion $\theta$ konvergente Folge von Quasi-Inhalten darstellt. $\theta$ besitzt alle Eigenschaften eines Stieltjes'schen Quasi-Inhalts und ist wegen

$$\sum_{j=0}^{m_\Pi} \left|\theta\big(\{x_j, x_{j+1}]\big)\right| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{m_\Pi} \left|\theta_n^{(n)}\big(\{x_j, x_{j+1}]\big)\right| \quad \text{für jede Partition } \Pi$$

von beschränkter Variation. □

Für eine Folge $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ können nun stets Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ vermöge $f_n(x) = \mu_n\big((-x, +x)\big)$ gebildet werden; diese Funktionen sind bzgl. $x$ offenbar monoton nicht abnehmend, und monotone Funktionen sind stets von endlicher Variation [124]. Daraus ist folgender Schluß zu ziehen [59]:

**Korollar 1.4.2** *Ist $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von solchen Maßen über $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, die für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine gleichmäßig beschränkte Zahlenfolge $\{\mu_n\big((-x, +x)\big)\}_{n\in\mathbb{N}}$ bilden, so enthält $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine*

[19] Definition 1.2.9, Abschn. 1.2. Ein Menge von Quasi-Inhalten ist von *gleichmäßig endlicher Variation*, wenn es eine für jeden Quasi-Inhalt $\theta_i$ geltende gemeinsame Konstante $K$ mit $Var_Q(\theta_i) \leq K$ (gemäß Definition 1.2.9) gibt.

*Teilfolge* $\{\mu_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, *die gegen ein Maß* $\mu$ *über* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *im Sinne von*

$$\big(\{\mu_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}} \to \mu\big) \iff \big(\lim_{\nu\to\infty} \mu_{n_\nu}(B) = \mu(B)\ \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ B \text{ beschränkt}\big)$$

*konvergiert, wobei* $\mu\big((-\infty,+\infty)\big)$ *nicht notwendig endlich sein muß.*

### 1.4.3 Wahrscheinlichkeitsmaße

Eine Besonderheit der Lebesgue-Stieltjes'schen Maße stellen die Wahrscheinlichkeitsmaße dar, die wir im Kap. 2 behandeln. Dazu bemerken wir Folgendes: Der Spezialfall einer in das Intervall $[0,1]$ abbildenden rechtsstetigen und monoton nicht abnehmenden Funktion

$$F : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$$

führt zu einem vollständigen und total endlichen Maß $\mathbb{P}$ über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma = \sigma(\mathcal{A}_Q)$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ für $\Omega = \bar{\mathbb{R}}$. Ein solches Maß wird als **Wahrscheinlichkeitsmaß** bezeichnet, und $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**. Bei gegebenem Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ nennt man eine meßbare und $\mathbb{P}$-fast überall endliche Funktion $\xi : (\Omega, \mathcal{A}_\sigma) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine **reellwertige Zufallsvariable** bzgl. $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$[20]. Jede monoton nicht abnehmende und rechtsseitig stetige Funktion $F : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$, die $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$ erfüllt, ist **Verteilungsfunktion** einer Zufallsvariablen $\xi$, für die $\mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le r\}\big) = F(r)$ gilt (zu weiteren Einzelheiten vergl. Kap. 2).

Im mehrdimensionalen Fall, d. h. bei gegebener Funktion $F : \bar{\mathbb{R}}^d \to [0,1]$ mit $d > 1$, reichen allerdings die genannten Eigenschaften nicht aus, um $F$ als Verteilungsfunktion eines *Zufallsvektors* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ festzulegen. Dies beweist u. a. ein in [165] genanntes Beispiel für $d = 2$: Die Funktion $F : \bar{\mathbb{R}}^2 \to [0,1]$, definiert durch

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_1 + x_2 \ge 0, \\ 0, & \text{falls } x_1 + x_2 < 0, \end{cases}$$

ist offenbar in jeder Komponente von rechts stetig und monoton nicht fallend und garantiert für alle $x_i, x_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ das Bestehen der Gleichungen

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= F(x_2, x_1), \\ F(x_1, -\infty) = F(-\infty, x_2) &= 0, \\ F(+\infty, +\infty) &= 1. \end{aligned}$$

[20] Die Schreibweise $\xi : (\Omega, \mathcal{A}_\sigma) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ für die Abbildung $\xi : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ soll den Bezug zur Meßbarkeitseigenschaft herstellen.

Man kann jedoch kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ über einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ zu einer Menge $\Omega$ angeben, so daß $F$ gemeinsame Verteilungsfunktion zweier Zufallsvariablen $\xi_i : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ ist ($i = 1, 2$), denn dies würde die Gültigkeit von

$$\mathbb{P}_F\big(\{\omega \in \Omega : -\infty < \xi_1(\omega) \le x_1, -\infty < \xi_2(\omega) \le x_2\}\big) = F(x_1, x_2)$$

erfordern, so daß insbesondere das Maß $\mathbb{P}_F(Q_{\mathbf{-1},\mathbf{1}})$ des Quaders

$$Q_{\mathbf{-1},\mathbf{1}} = \big\{(z_1, z_2) : -1 < z_1 \le 1, -1 < z_2 \le 1\big\}$$

als $\mathbb{P}_F(Q_{\mathbf{-1},\mathbf{1}}) = F(1,1) - F(1,-1) - \big(F(-1,1) - F(-1,-1)\big)$ darstellbar sein müßte; dieser letztere Ausdruck hat jedoch den Wert $-1$.

Nachfolgend werden Vektoren wieder durch Fettbuchstaben gekennzeichnet. Entsprechende Relationen sind komponentenweise zu verstehen, d. h. $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ steht für $a_i < x_i \le b_i$ ($i = 1, \dots, d$), usw. Eine Funktion $F$ über dem $\bar{\mathbb{R}}^d$ ist in jeder Komponente monoton nicht abnehmend, wenn aus $x_i^{(1)} \le x_i^{(2)}$ $\forall\, i \in \{1, \dots, d\}$ folgt $F(x_1^{(1)}, \dots, x_d^{(1)}) \le F(x_1^{(2)}, \dots, x_d^{(2)})$.

Die nach obiger Erkenntnis notwendige zusätzliche Eigenschaft zur Kennzeichnung von Verteilungsfunktionen im mehrdimensionalen Fall nennen wir „Quader-Monotonie“[21].

**Definition 1.4.5** (Quadermonotonie) *Es sei $F : \bar{\mathbb{R}}^2 \to [0,1]$ eine in jeder Komponente von rechts stetige und monoton nicht abnehmende Funktion. $F$ heißt* ***quadermonoton****, falls für jeden halboffenen Quader $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ der Ausdruck*

$$I_F(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \sum_{i_1=0}^{1} \sum_{i_2=0}^{1} \dots \sum_{i_d=0}^{1} (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_d}$$
$$\cdot F\big(b_1 - i_1(b_1 - a_1), b_2 - i_2(b_2 - a_2), \dots, b_d - i_d(b_d - a_d)\big) \tag{1.9}$$

*stets größer oder gleich Null ist.*

Wie leicht nachprüfbar, ist (1.9) im Falle des Quaders $Q_{\mathbf{-1},\mathbf{1}}$ aus obigem Beispiel gerade der Ausdruck $I_F(Q_{\mathbf{-1},\mathbf{1}}) = F(1,1) - F(1,-1) - \big(F(-1,1) - F(-1,-1)\big)$.

**Satz 1.4.3** (Spezieller Maßerweiterungssatz) *Es sei $F : \bar{\mathbb{R}}^d \to [0,1]$ eine in jeder Komponente von rechts stetige und monoton nicht abnehmende quadermonotone Funktion über dem $\bar{\mathbb{R}}^d$ mit folgenden Eigenschaften ($i_1, \dots, i_d$ sei eine beliebige Permutation der Zahlen $1, \dots, d$):*

$$F(x_1, \dots, x_d) = F(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}),$$
$$F(x_1, \dots, x_{k-1}, -\infty, x_{k+1}, \dots, x_d) = 0 \quad \forall\, k \in \{1, \dots, d\},$$
$$F(+\infty, \dots, +\infty) = 1.$$

[21] In [165] „Rechtecks-Monotonie“ genannt.

*Es gibt dann genau einen Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}_F]$, in dem $F$ die* ***gemeinsame Verteilungsfunktion*** *von $d$ Zufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_d$ in $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}_F]$ repräsentiert, d. h.*

$$\mathbb{P}_F(\{\omega : \xi_1(\omega) \leq x_1, \ldots, \xi_d(\omega) \leq x_d\}) = F(x_1, \ldots, x_d).$$

*$\mathbb{P}_F$ ist das Lebesgue-Stieltjes'sche Maß bzgl. $F$.*

*Beweis* Die Familie $\mathcal{Q}$ aller halboffenen Quader $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ formt ein zerlegbares System im $\bar{\mathbb{R}}^d$ (vergl. etwa [68]). Über $\mathcal{Q}$ definieren wir die Mengenfunktion $\varphi_F : \mathcal{Q} \to [0,1]$ unter Verwendung von (1.9) durch

$$\varphi_F(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = I_F(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

Aufgrund der Quader-Monotonie von $F$ gilt $\varphi_F(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \geq 0$; mit $\varphi_F(\emptyset) = 0$ stellt daher $\varphi_F$ ein elementares Maß dar. Bei gegebenem Quader $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ sei $b_{\max} = \max\{b_1, \ldots, b_d\}$, und man setze $\boldsymbol{b}_{\max} = (b_{\max}, \ldots, b_{\max})$; dann ist $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \subset Q_{-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{b}_{\max}}$, und es gilt

$$I_F(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \leq I_F(Q_{-\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{b}_{\max}}) = F(b_{\max}, \ldots, b_{\max}) \leq 1.$$

Dies beweist, daß stets $\varphi_F(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \leq 1$ und $\varphi_F(Q_{\boldsymbol{\infty},\boldsymbol{\infty}}) = 1$ ist. Man sieht weiterhin leicht ein, daß $\varphi_F$ endlich additiv ist, d. h. für eine Vereinigung $\bigcup_{n=1}^k U_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}$ wechselseitig disjunkter halboffener Quader $U_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}_n < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_n\}$ gilt

$$\varphi_F\left(\bigcup_{n=1}^k U_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}\right) = \sum_{n=1}^k \varphi_F\left(U_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}\right).$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, daß $\varphi_F$ die Relation 1.7 erfüllt. Es bezeichne $\bigcup_{n=1}^\infty Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}$ eine Überdeckung von $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$. Aufgrund der Rechtsstetigkeit von $F$ gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\delta) > 0$ derart, daß mit $\boldsymbol{\varepsilon}_n = (\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^d$

$$\varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_n}) - \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}) < \frac{\delta}{2^n} \tag{1.10}$$

wird. Die Vereinigung der abzählbar vielen offenen Quader $Q^\circ_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_n} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}_n < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}_n + \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ überdeckt den halboffenen Quader $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ und damit auch den abgeschlossenen Quader $\bar{Q}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\eta} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$ für jedes $\boldsymbol{\eta} = (\eta, \ldots, \eta) \in \mathbb{R}^d$ mit $0 < \eta < \min_{k\in\{1,\ldots,d\}}\{b_k - a_k\}$. Dieser ist kompakt (Satz von Heine-Borel, s. Satz A.1.17 in Abschn. A.1), so daß es unter den $Q^\circ_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n+\boldsymbol{\varepsilon}_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) bereits eine endliche Familie

$$\mathcal{F} = \left\{Q^\circ_{\boldsymbol{a}_{\nu_1},\boldsymbol{b}_{\nu_1}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\nu_1}}, \ldots, Q^\circ_{\boldsymbol{a}_{\nu_m},\boldsymbol{b}_{\nu_m}+\boldsymbol{\varepsilon}_{\nu_m}}\right\}$$

gibt, die $\bar{Q}_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{b}}$ überdeckt. Es sei $\varepsilon = \max\{\varepsilon_{\nu_1}, \ldots, \varepsilon_{\nu_m}\}$, und man wähle $\eta$ zu $\eta = \varepsilon$ ($\varepsilon$ als genügend klein vorausgesetzt); die zugehörigen Vektoren des $\mathbb{R}^d$ seinen $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\eta} = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

Die endliche Familie $\mathcal{F}$ überdeckt dann auch den halboffenen Quader $Q_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{\varepsilon} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_n\}$. Man setze

$$M_\ell = Q_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{b}} \cap \left( Q^\circ_{\boldsymbol{a}_{\nu_\ell},\boldsymbol{b}_{\nu_\ell}+\boldsymbol{\varepsilon}} \setminus \bigcup_{j=1}^{\ell-1} Q^\circ_{\boldsymbol{a}_{\nu_j},\boldsymbol{b}_{\nu_j}+\boldsymbol{\varepsilon}} \right), \quad \ell = 1, \ldots, m.$$

Jede dieser Punktmengen $M_\ell \in \mathbb{R}^d$ besteht aus einer Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{r_\ell} Q'_i$ wechselseitig disjunkter halboffener Quader, die innerhalb von $Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ liegt, und für die $Q_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{b}} = \bigcup_{\ell=1}^m \bigcup_{i=1}^{r_\ell} Q'_i$ gilt. Aufgrund der endlichen Additivität von $\varphi_F$ folgt für geeignete $Q_{\boldsymbol{a}_{\nu_j},\boldsymbol{b}_{\nu_j}+\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}_{\nu_j} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_{\nu_j} + \boldsymbol{\varepsilon}\}$

$$\varphi_F\left(Q_{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{b}}\right) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1}^{r_\ell} \varphi_F(Q'_i) \leq \sum_{j=1}^m \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_{\nu_j},\boldsymbol{b}_{\nu_j}+\boldsymbol{\varepsilon}}) \leq \sum_{n=1}^\infty \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n+\boldsymbol{\varepsilon}}),$$

worin wegen (1.10)

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n+\boldsymbol{\varepsilon}}) \leq \sum_{n=1}^\infty \left[\varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}) + \frac{\delta}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^\infty \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}) + \delta$$

ist. $\varepsilon \to 0$ liefert $\varphi_F\left(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}) + \delta$ für beliebig kleines $\delta$, was

$$\varphi_F\left(Q_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n})$$

und somit die Gültigkeit von (1.7) impliziert. Nach Satz 1.3.3 ist $\varphi_F$ zu einem vollständigen Maß fortsetzbar, und zwar in Gestalt des vermöge der Beziehung (1.3) (Satz 1.3.1) definierten äußeren Lebesgue-Maßes $\mu^*_{\varphi_F}|_{\mathcal{C}^*}$ (eingeschränkt auf die $\sigma$-Algebra $\mathcal{C}^* \supset \mathcal{Q}$ der $\mu^*_{\varphi_F}$-meßbaren Mengen). Da der $\bar{\mathbb{R}}^d$ offenbar durch abzählbar viele Quader $Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}$ mit $\varphi_F(Q_{\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_n}) < \infty$ überdeckbar ist, liegt mit $\varphi_F$ zudem ein $\sigma$-endliches elementares Maß vor, so daß Satz 1.3.4 die Eindeutigkeit von $\mathbb{P}_F$ impliziert. $\Omega = \bar{\mathbb{R}}_d$, $\mathcal{A} = \mathcal{C}^*$ und $\mathbb{P}_F = \mu^*_{\varphi_F}|_{\mathcal{C}^*}$ liefern die behauptete Aussage. □

### 1.4.4 Radon-Maße

Es möge nun $\mathcal{O}_X$ das System aller offenen, $\mathcal{C}_X$ das System aller abgeschlossenen und $\mathcal{K}_X$ das System aller kompakten Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ bezeichnen. Während die von $\mathcal{C}_X$ erzeugte $\sigma$-Algebra mit der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}_X)$ zusammenfällt, ist die von den kompakten Mengen erzeugte $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{K}_X)$ im allgemeinen echt in der $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{C}_X)$ enthalten. Ist allerdings $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter Hausdorff-Raum ($T_2$-Raum), so fallen die kompakten Mengen mit den abgeschlossenen zusammen, und $(X, \mathcal{O}_X)$ verhält sich bzgl. der Borel-$\sigma$-Algebra wie der durch Hinzunahme des Punktes $\infty$ kompaktifizierte $\mathbb{R}^d$, d. h. es gilt

$$\sigma(\mathcal{O}_X) = \sigma(\mathcal{C}_X) = \sigma(\mathcal{K}_X), \quad \text{falls } X \text{ kompakter Hausdorff-Raum.}$$

Die Kompaktheit des Raumes ist hierin eine wichtige Voraussetzung, denn in einem beliebigen Hausdorff-Raum sind zwar alle kompakten Mengen abgeschlossen und daher auch Borel-Mengen, jedoch sind i. a. nicht alle abgeschlossenen Mengen kompakt.

**Definition 1.4.6** (Borel-Maß) *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein $T_2$-Raum mit der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$. Ein Maß $\mu$ über $\mathcal{B}(X)$ heißt*

- ***Borel-Maß** auf X, falls für jede kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(X)$ gilt $\mu(K) < \infty$,*
- ***von innen regulär**, falls für jede Borel-Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ das Maß $\mu(A)$ schreibbar ist als $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}$,*
- ***von außen regulär**, falls für jede Borel-Menge $A \in \mathcal{B}(X)$ das Maß $\mu(A)$ schreibbar ist als $\mu(A) = \inf\{\mu(O) : A \subset O,\ O \text{ offen}\}$.*

Alle endlichen Maße über $\mathcal{B}(X)$ sind somit Borel-Maße. Ein Maß, das sowohl von innen als auch von außen regulär ist, wird kurz als **reguläres Maß** bezeichnet. Ist ein Maß von innen (bzw. außen) regulär, so wird es bereits durch seine Werte auf den kompakten (bzw. offenen) meßbaren Mengen vollständig bestimmt.

In einem Hausdorff-Raum $X$ ist jede kompakte Menge abgeschlossen; die Umkehrung gilt, falls $X$ selbst kompakt ist, d. h. in einem kompakten Raum sind Abgeschlossenheit und Kompaktheit äquivalent. Demnach kann man die *Regularität eines Maßes in einem kompakten Raum* mit dem Bestehen folgender Relationen erklären:

$$\mu(M) = \sup\{\mu(C) : C \subset M,\ C \in \mathcal{C}_X\} \quad \forall\, M \in \mathcal{B}(X), \tag{1.11}$$
$$\mu(M) = \inf\{\mu(O) : M \subset O,\ O \in \mathcal{O}_X\} \quad \forall\, M \in \mathcal{B}(X). \tag{1.12}$$

**Lemma 1.4.4** *Es sei $\mu$ ein endliches Maß über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines (nicht notwendig kompakten) Hausdorff-Raumes $X$. Für jede meßbare Menge $M$ gilt dann: Erfüllt $M$ eine der Bedingungen (1.11), (1.12), so erfüllt das Komplement von $M$ die jeweils andere Bedingung.*

*Beweis* Zu $M \in \mathcal{B}(X)$ sei $O$ eine $M$ umfassende offene Menge. $O^c =: C$ ist dann abgeschlossen, und es gilt $C \subset M^c$. Aufgrund der Endlichkeit des Maßes $\mu$ hat man

$$\mu(M^c) - \mu(C) = \big(\mu(X) - \mu(M)\big) - \big(\mu(X) - \mu(O)\big) = \mu(O) - \mu(M).$$

Erfüllt nun $M$ die Relation (RK2), so gibt es zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $O_\varepsilon$ mit $\mu(O_\varepsilon) - \mu(M) \le \varepsilon$, also eine abgeschlossene Menge $C_\varepsilon = X \setminus O_\varepsilon \subset M^c$

mit $\mu(M^c) - \mu(C_\varepsilon) \le \varepsilon$, so daß das Supremum $\sup\{\mu(C) : C \subset M,\ C \in \mathcal{C}_X\}$ nicht echt kleiner als $\mu(M^c)$ sein kann. Entsprechendes ist bzgl. (RK2) für $M^c$ zu schließen, falls $M$ die Relation (RK1) erfüllt. □

**Definition 1.4.7** (Radon-Maß) *Ein auf der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines $T_2$-Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ definiertes Maß $\mu$ heißt* ***lokal-endlich****, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ von $x$ gibt, für die $\mu(U) < \infty$ gilt. Ein lokalendliches und von innen reguläres Maß auf $X$ nennt man ein* ***Radon-Maß****.*

Jede offene Überdeckung einer kompakten Menge $K \in \mathcal{K}$ enthält per definitionem eine endliche Überdeckung. Ist $\mu$ lokal-endliches Maß, existiert also zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathcal{O}_X$ mit $\mu(O_x) < \infty$, so kann stets eine endliche Überdeckung von $K$ aus offenen Umgebungen endlichen Maßes konstruiert werden, d. h. *unter einem lokal-endlichen Maß $\mu$ ist $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K$*. Folglich ist jedes lokal-endliche Maß ein Borel-Maß. Weiterhin läßt sich zeigen, daß in polnischen Räumen die Radon-Maße auch von außen regulär sind (zur Erinnerung: Ein metrischer Raum $(X; d)$ wird als *polnischer Raum* bezeichnet, wenn er vollständig ist und eine abzählbare Basis besitzt; vergl. Definition A.1.25 in Abschn. A.1). Die Existenz einer abzählbaren Basis ist für metrische Räume mit der Eigenschaft der Separabilität gleichwertig, d. h. mit der Eigenschaft, eine überall dichte und abzählbare Teilmenge zu enthalten. Zu weiteren Eigenschaften polnischer Räume s. Satz A.1.39, Abschn. A.1.6. Wir beweisen zunächst einige Hilfsaussagen.

**Lemma 1.4.5** *Es sei $\mu$ ein über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines polnischen Raumes $(X; d)$ definiertes endliches Maß; dann gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_\eta \subset X$ mit $\mu(X) - \mu(K_\eta) < \eta$, und es gilt*

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K \subset X,\ K \text{ kompakt}\}.$$

*Beweis* Als polnischer Raum besitzt $X$ eine abzählbare Basis, daher enthält nach Aussage des Satzes A.1.8 von Lindelöf (s. Abschn. A.1) jede offene Überdeckung eine abzählbare Überdeckung, d. h. es gibt eine in $X$ dichte Punktfolge $D = \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\bar{D} = X$. Für beliebiges $\ell > 1$ bilden daher die Kreisumgebungen

$$\bar{K}_\ell(x_k) = \left\{ y : d(x_k, y) \le \frac{1}{\ell} \right\}$$

eine abgeschlossene Überdeckung von $X$. Setzt man $\bar{A}_n := \bigcup_{k=1}^n \bar{K}_\ell(x_k)$, so folgt für die monoton nicht abnehmende Folge $\{\bar{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n = \lim_{n \to \infty} \bar{A}_n = X, \quad \mu(\lim_{n \to \infty} \bar{A}_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(\bar{A}_n) = \mu(X) < \infty.$$

Zu jedem $\eta > 0$ läßt sich daher ein $n_\ell(\eta)$ derart finden, daß $\mu(X) - \mu(\bar{A}_{n_\ell(\eta)}) < \frac{\eta}{2^\ell}$ wird. Es sei $\bigcap_{\ell=1}^\infty \bar{A}_{n_\ell(\eta)} =: K_\eta$; wegen $X \setminus K_\eta = \bigcup_{\ell=1}^\infty (X \setminus \bar{A}_{n_\ell(\eta)})$ hat man

$$\mu(X) - \mu(K_\eta) \leq \sum_{\ell=1}^\infty \mu\big(X \setminus \bar{A}_{n_\ell(\eta)}\big) = \sum_{\ell=1}^\infty \big(\mu(X) - \mu(\bar{A}_{n_\ell(\eta)})\big) < \eta.$$

Dabei gilt $K_\eta \subset \bar{A}_{n_\ell(\eta)} = \bigcup_{k=1}^{n_\ell(\eta)} \bar{K}_\ell(x_k)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ setze man $\ell_\varepsilon = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil$. $K_\eta$ ist dann enthalten in der Vereinigung $\bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_1) \cup \ldots \cup \bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_{n_{\ell_\varepsilon}(\eta)})$ endlich vieler Kreisumgebungen, deren Durchmesser

$$d\big(\bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_k)\big) = \sup\big\{d(x,y) : x, y \in \bar{K}_{\ell_\varepsilon}(x_k)\big\} \leq \frac{2}{\ell_\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ist, d. h. jedes $K_\eta$ ist total-beschränkt und demnach kompakt (vergl. Satz A.1.39 in Abschn. A.1). Folglich kann $\mu(X)$ nicht echt größer als das Supremum $\sup\{\mu(K) : K \subset X,\ K \text{ kompakt}\}$ sein, womit alles bewiesen ist. □

Als abkürzende Schreibweise benutzen wir im Folgenden die Symbole $\mathcal{R}eg(\mu)$ für die Familie aller Borel-Mengen $M$, bzgl. derer ein über $\mathcal{B}(X)$ definiertes Maß $\mu$ regulär ist, und $\mathcal{R}eg_i(\mu)$ bzw. $\mathcal{R}eg_a(\mu)$ für die Familie aller solchen Borel-Mengen $M$, bzgl. derer $\mu$ von innen regulär bzw. von außen regulär ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}eg(\mu) &= \mathcal{R}eg_i(\mu) \cap \mathcal{R}eg_a(\mu) \subseteq \mathcal{B}(X),\\
\mathcal{R}eg_i(\mu) &= \big\{M : \mu(M) = \sup\{\mu(K) : K \subset M,\ K \text{ kompakt}\}\big\},\\
\mathcal{R}eg_a(\mu) &= \big\{M : \mu(M) = \inf\{\mu(O) : M \subset O,\ O \text{ offen}\}\big\}.
\end{aligned}$$

**Lemma 1.4.6** *Ist $\mu$ ein über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines polnischen Raumes $(X; d)$ definiertes endliches Maß, so gilt $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{R}eg(\mu)$, d. h. $\mu$ ist regulär bzgl. aller abgeschlossenen Mengen $C \subset X$.*

*Beweis* 1. Für die (sowohl offene als auch abgeschlossene) leere Menge $\varnothing$ ist die Behauptung offensichtlich richtig, so daß wir von vornherein $C \neq \varnothing$ voraussetzen können (auch für $X$ selbst ist nach Lemma 1.4.5 nichts mehr zu zeigen). Zu einer abgeschlossenen Menge $C \neq \varnothing$ gibt es eine abnehmende Folge $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit $\lim_{n\to\infty} O_n = \bigcap_{n=1}^\infty O_n = C$ (s. Lemma A.1.25 in Abschn. A.1). Da $\mu$ endlich ist, hat man $\lim_{n\to\infty} \mu(O_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} O_n) = \mu(C)$, woraus sofort $\mu(C) = \inf\{\mu(O) : C \subseteq O, O \text{ offen}\} \Longleftrightarrow C \in \mathcal{R}eg_a(\mu)$ folgt.

2. Es sei $K$ kompakt. Wegen $\mu(C \cup K) < \infty$ ist $\mu(C \setminus K) = \mu(C \cup K) - \mu(K)$, so daß sich aus $\mu(C) = \mu(C \setminus K) + \mu(C \cap K)$ die Beziehung

$$\mu(C) - \mu(C \cap K) = \mu(C \cup K) + \mu(K)$$

ergibt, in der $C \cap K$ kompakt ist. Dies gilt insbesondere für die gemäß Lemma 1.4.5 zu beliebigem $\eta > 0$ existierenden kompakten Mengen $K_\eta$, für die man

$$\eta > \mu(X) - \mu(K_\eta) \geq \mu(C) - \mu(C \cap K_\eta)$$

hat. Demnach kann nicht $\mu(C) > \sup\{\mu(K) : K \subseteq C,\ K \text{ kompakt}\}$ sein, d. h. es ist $C \in \mathcal{R}eg_i(\mu)$. □

**Lemma 1.4.7** *Unter den Voraussetzungen des Lemmas 1.4.6 ($\mu$ endlich, $X$ polnisch) gilt*

$$M \in \mathcal{R}eg(\mu) \implies X \setminus M \in \mathcal{R}eg(\mu).$$

*Beweis* Es sei $M \in \mathcal{R}eg(\mu)$.

1. Aufgrund der Endlichkeit von $\mu$ hat man für jede kompakte Teilmenge $K \in \mathcal{K}_X$ mit $K \subset M$ die Beziehung $\mu(K^c) - \mu(M^c) = \mu(M) - \mu(K)$. $M \in \mathcal{R}eg_i(\mu)$ bedeutet, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine derartige kompakte Menge $K$ gibt, die $|\mu(M) - \mu(K)| < \varepsilon$ erfüllt, d. h. eine offene Menge $O_K = K^c$ mit $|\mu(O_K) - \mu(M^c)| < \varepsilon$. Daraus folgt $M^c \in \mathcal{R}eg_a(\mu)$.

2. $M \in \mathcal{R}eg_a(\mu)$ bedeutet nach Lemma 1.4.4, daß $\mu(M^c) = \sup\left\{\mu(C) : C \subset M,\ C \in \mathcal{C}_X\right\}$ ist (man beachte auch $\mu(M^c) - \mu(O^c) = \mu(O) - \mu(M)$ für jede offene Menge $O \supset M$!), und Lemma 1.4.6 besagt $\mu(C) = \sup\left\{\mu(K) : K \subset C,\ K \text{ kompakt}\right\}$, so daß $\mu(M^c) = \sup\left\{\mu(K) : K \subset M^c,\ K \text{ kompakt}\right\} \iff M^c \in \mathcal{R}eg_i(\mu)$ folgt. □

**Satz 1.4.8** *Jedes Radon-Maß $\mu$ auf einem polnischen Raum ist $\sigma$-endlich und regulär.*

*Beweis* 1. Da $\mu$ lokal-endlich ist, gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $O_x$ mit $\mu(O_x) < \infty$. Als polnischer Raum besitzt $X$ eine abzählbare Basis. Nach Aussage des Satzes A.1.8 von Lindelöf (s. Abschn. A.1) enthält daher die offene Überdeckung $\bigcup_{x \in X} O_x$ eine abzählbare Überdeckung $\bigcup_{k=1}^\infty O_{x_k}$, für die $\mu(O_{x_k}) < \infty\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt. Das bedeutet, daß $\mu$ $\sigma$-endlich ist.

2. Nach Lemma 1.3.8 ist die Mengenfunktion $\mu^* : \mathfrak{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch

$$\mu^*(M) = \inf\left\{\mu(O) : M \subset O,\ O \text{ offen}\right\}\ \forall\, M \in \mathfrak{P}(X),$$

ein äußeres Maß. Wir zeigen, daß dieses äußere Maß von außen regulär ist und mit $\mu$ übereinstimmt. Setzt man unter Verwendung der unter 1 genannten offenen Umgebungen $V_n^\circ := \bigcup_{k=1}^n O_{x_k}$, so bilden die $V_n^\circ$ eine monoton nicht abnehmende Folge offener Mengen von endlichem Maß, die $X$ überdecken:

$$V_n^\circ \subseteq V_{n+1}^\circ, \quad \mu(V_n^\circ) < \infty\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{n=1}^\infty V_n^\circ = X.$$

Mit Hilfe der $V_n^\circ$ läßt sich eine Folge von endlichen Maßen $\mu_n$ vermöge der Definition

$$\mu_n(M) := \mu(M \cap V_n^\circ)\ \forall\, M \in \mathcal{B}(X)$$

angeben (die Maßeigenschaften lassen leicht nachweisen). Die Maße $\mu_n$ sind von außen regulär. Man kann nämlich mit Rückgriff auf die Metrik $d$ des polnischen Raumes O. E. d. A. voraussetzen, daß die offenen Umgebungen $O_{x_k}$ von der Form $O_{x_k} = \{y : d(y, x_k) < r_k \in \mathbb{R}\}$ sind. Zu jeder Teilmenge $M \in \mathcal{B}(X)$ gibt es daher höchstens abzählbar viele Punkte $x_k$ und offene Kreisumgebungen $O_{x_k}$, so daß $F := \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{x_k}$ ist. Setzt man für $\ell \geq 1$

$$U_\ell = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y : d(y, x_k) < r_k/\ell\},$$

so folgt wegen $U_{\ell+1} \subset U_\ell \; \forall \, \ell \in \mathbb{N}$ und $\mu_n(U_\ell) = \mu(U_\ell \cap M_n^\circ) < \infty$

$$\lim_{\ell\to\infty} U_\ell = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} U_\ell \subseteq M, \quad \mu_n\big(\lim_{\ell\to\infty} U_\ell\big) = \lim_{\ell\to\infty} \mu_n\big(U_\ell\big) \leq \mu_n(M),$$

während andererseits für alle $\ell \in \mathbb{N}$, für die $U_\ell \supseteq M$ ist, $\mu_n(U_\ell) \geq \mu_n(M)$ und somit $\mu_n(M) \geq \lim_{\ell\to\infty} \mu_n(U_\ell)$ ist. Da die $U_\ell$ offen sind, kann $\inf\{\mu_n(O) : M \subset O, O \text{ offen}\}$ nicht größer als $\mu_n(M)$ sein, d. h. $\mu_n$ ist von außen regulär.

Man betrachte nun eine beliebige kompakte Teilmenge $K$ von $X$. Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^\circ = X$ gibt es aufgrund der Kompaktheit von $K$ bereits endlich viele $V_n^\circ$, die $K$ überdecken, und somit wegen $V_n^\circ \subset V_{n+1}^\circ$ ein $n_K \in \mathbb{N}$ mit $K \subset V_{n_K}^\circ$, so daß $\mu(K) = \mu_{n_K}(K) < \infty$ ist. Die Offenheit der $V_n^\circ$ impliziert

$$\begin{aligned}\mu(K) = \mu_{n_K}(K) &= \inf\{\mu_{n_K}(O \cap V_{n_K}^\circ) : K \subset O,\ O \text{ offen}\}\\ &= \inf\{\mu(O) : K \subset O,\ O \text{ offen}\},\end{aligned}$$

woraus $\mu^*(K) = \mu(K)$ für die (also jede) kompakte Menge $K$ folgt. Für offene Mengen einschließlich $X$ selbst ist diese Übereinstimmung per definitionem gegeben. Insbesondere besagt die Maßeigenschaft von $\mu$, daß $\mu^*(K_1 \cup K_2) = \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$ für disjunkte kompakte Mengen $K_1, K_2$ gilt. Damit sind für das äußere Maß $\mu^*$ die im Satz 1.3.9 als Voraussetzung genannten Eigenschaften 1–3 gegeben, d. h. die Einschränkung des äußeren Maßes $\mu^*$ auf die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist ein Maß. Dieses Maß ist lokal-endlich und ein Borel-Maß, da auf kompakten Mengen mit $\mu$ identisch. In Analogie zur Konstruktion der $V_n^\circ$ bezüglich des Maßes $\mu$ kann somit eine Folge offener Mengen $V_n^{*\circ} = \bigcup_{k=1}^{n} O_{x_k}^*$ mit $O_{x_k}^* = \{y : d(y, x_k^*) < r_k\}$ und $\mu^*(V_n^{*\circ}) < \infty$ gefunden werden, so daß für eine beliebige Menge $M \in \mathcal{B}(X)$ eine Punktfolge $F^* := \{x_1^*, x_2^*, \dots\} \subseteq M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} O_{x_k}^*$ angebbar ist und – wieder in Analogie zum Vorigen – die offenen Mengen $U_\ell^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{y : d(y, x_k^*) \leq r_k/\ell\}$ zu

$$\lim_{\ell\to\infty} U_\ell^* = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} U_\ell^* \subseteq M \subseteq U_j^* \; \forall \, j \in \mathbb{N}$$

führen. Setzt man $S_\ell := \sup\{\mu^*(K) : K \subset U_\ell^*,\ K \text{ kompakt}\}$, so folgt offenbar

$$\begin{aligned}\mu^*(M) \leq \lim_{\ell\to\infty} S_\ell &= \sup\{\mu^*(K) : K \subset M,\ K \text{ kompakt}\}\\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset M,\ K \text{ kompakt}\} = \mu(M),\end{aligned}$$

während man stets $\mu^*(M) \geq \sup\{\mu^*(K) : K \subset M,\ K \text{ kompakt}\}$ hat; das impliziert $\mu^* = \mu$ auf $\mathcal{B}(X)$. □

Maße mit Werten in $\mathbb{N}_0$ nennt man **Zählmaße**. In vielen Anwendungen werden vornehmlich Radon'sche Zählmaße betrachtet, und zwar solche auf polnischen Räumen, also vollständigen und separablen metrischen Räumen. Nach obigem Satz 1.4.8 ist jedes derartige Maß $\sigma$-endlich. Häufig verwendet man – im Gegensatz zur o. gen. Definition – den Begriff *Radon-Maß* von vornherein nur für Radon'sche Zählmaße auf polnischen Räumen (vergl. etwa [7, 101]). Bzgl. der folgenden Definition sei daran erinnert, daß in einem $T_2$-Raum jede einelementige Menge abgeschlossen ist und damit zur Borel-$\sigma$-Algebra des Raumes gehört.

**Definition 1.4.8** *Es sei $\mu$ ein Maß mit Werten in $\mathbb{N}_0$ (ein **Zählmaß**) über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ eines $T_2$-Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$. Diejenigen Punkte $x \in X$, für die $\mu(\{x\}) > 0$ ist, heißen **Atome** von $\mu$. Die Menge aller Atome in $X$ heißt der **Träger** von $\mu$. Ist $\mu(\{x\}) = 1$ für jedes Atom $x \in X$, so heißt das ein Zählmaß $\mu$ **einfach**.*

**Satz 1.4.9** *Ist $(X; d)$ ein polnischer Raum, so gelten für den Träger $T_\mu$ eines Radon'schen Zählmaßes $\mu$ über der Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(X)$ die Aussagen*

1. *$T_\mu$ ist höchstens abzählbar unendlich,*
2. *$\mu(M) = \sum_{x\in T_\mu} \mu(\{x\}) \cdot 1_M(x)$ für jede Borel-Menge $M \in \mathcal{B}(X)$.*

*Beweis* 1. Die Existenz einer abzählbaren in $X$ dichten Teilmenge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bedeutet zusammen mit der lokalen Endlichkeit von $\mu$, daß es abzählbar viele offene Mengen $O_k$ mit $x_k \in O_k$, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} O_k = X$ und $\mu(O_k) < \infty$ gibt, d. h. $T_\mu$ ist höchstens abzählbar.

2. Zu jedem $O_k$ sei $T_\mu(O_k)$ die (endliche) Anzahl aller Punkte $y \in O_k$ mit $\mu(y) > 0$, wobei $O_k$ eine der eben erwähnten Überdeckungsmengen sei ($k \in \mathbb{N}$); dann gilt

$$\mu(M) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(M \cap O_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{x\in T_\mu(O_k)} \mu(\{x\}) \cdot 1_M(x) = \sum_{x\in T_\mu} \mu(\{x\}) \cdot 1_M(x)$$

für $M \in \mathcal{B}(X)$. □

Ein spezielles einfaches Radon'sches Zählmaß ist das sog. Dirac-Maß.

**Definition 1.4.9** (Dirac-Maß) *Es sei* $(X, \mathcal{O}_d)$ *polnischer Raum mit der Borel-*$\sigma$*-Algebra* $\mathcal{B}(X)$, $x \in X$ *ein fest gewählter Punkt. Das Maß* $\delta_x$, *definiert durch*

$$\delta_x(M) = 1_M(x) \quad \textit{für } M \in \mathcal{B}(X),$$

*heißt* ***Dirac-Maß*** *über* $\mathcal{B}(X)$.

## 1.5 Meßbare Abbildungen

Der Begriff der Meßbarkeit von Abbildungen zwischen meßbaren Räumen weist eine gewisse Analogie zum Stetigkeitsbegriff für Abbildungen zwischen topologischen Räumen auf, und zwar insofern, als die jeweiligen Urbildmengen von meßbaren Bildmengen (im Falle der Stetigkeit von offenen Bildmengen) meßbar (im Falle der Stetigkeit offen) sein müssen.

**Definition 1.5.1** (Meßbare Abbildungen) *Eine Abbildung* $f : X \to Y$ *von einem meßbaren Raum* $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ *in einen anderen meßbaren Raum* $[Y, \mathcal{B}_\sigma]$ *heißt* ***meßbare Abbildung****, wenn das Urbild* $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$ *jeder meßbaren Menge* $B \in \mathcal{B}_\sigma$ *eine meßbare Menge in* $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ *ist, d. h.* $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}_\sigma$.

Wie man leicht nachprüfen kann[22], formen die Mengenfamilien

$$\mathcal{A}_f(\mathcal{B}_\sigma) = \{f^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}_\sigma\} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}_f(Y) = \{M \subset Y : f^{-1}[M] \in \mathcal{A}_\sigma\}$$

der Urbildmengen aller meßbaren Mengen aus $[Y, \mathcal{B}_\sigma]$ bzw. aller Teilmengen aus $Y$, deren Urbilder in $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ meßbar sind, $\sigma$-Algebren in $X$ bzw. in $Y$. Mit Hilfe dieser $\sigma$-Algebren können wir die Meßbarkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ offenbar auch folgendermaßen charakterisieren (nachfolgend bezeichne $\mathcal{L} \subset \mathfrak{P}(Y)$ ein beliebiges Erzeugendensystem der $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}_\sigma$, ggf. also auch $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{L}$ selbst):

$$f : [X, \mathcal{A}_\sigma] \to [Y, \mathcal{B}_\sigma] \quad \text{meßbar} \iff \mathcal{A}_f(\mathcal{B}_\sigma) \subseteq \mathcal{A}_\sigma \quad \text{oder} \quad \mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_f(Y).$$

Es ist möglich, daß $\mathcal{A}_f(\mathcal{B}_\sigma)$ nur aus $X$ selbst und der leeren Menge besteht, oder daß $\mathcal{M}_f(Y) = \left\{\varnothing, f[X], \left(f[X]\right)^c, Y\right\}$ gilt. Derartige Fälle sind bei surjektiven Abbildungen und nicht trivialen $\sigma$-Algebren i. a. ausgeschlossen. Für eine surjektive Abbildung $f : X \to Y$ wird $\mathcal{M}_f(Y)$ auch als **Bild $f(\mathcal{A}_\sigma)$ der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$** bezeichnet [68].

Es sei nun $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein Maßraum. Die auf der $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}_\sigma$ vermöge

$$\nu_f(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right) \quad \forall\, B \in \mathcal{B}_\sigma \tag{1.13}$$

[22] Hierzu sind u. a. die für jede beliebige Indexmenge $I$ und jede Abbildung $f$ gültigen Relationen der Form $\bigcup_{i \in I} f^{-1}[M_i] = f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} M_i\right]$ bzw. $\bigcap_{i \in I} f^{-1}[M_i] = f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} M_i\right]$ zu beachten.

definierte Mengenfunktion $\nu_f : \mathcal{B}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ ist dann ein Maß, denn für wechselseitig disjunkte $B_n$ aus $\mathcal{B}_\sigma$ ($n \in \mathbb{N}$) sind auch die Mengen $f^{-1}(B_n)$ wechselseitig disjunkt, so daß die $\sigma$-Additivität von $\nu_f$ aus derjenigen von $\mu$ folgt (die Relationen $\nu_f(B) \geq 0$ und $\nu_f(\varnothing) = 0$ bestehen trivialerweise).

**Definition 1.5.2** (Induzierte Maße) *$[X, \mathcal{A}_\sigma]$ und $[Y, \mathcal{B}_\sigma]$ seien meßbare Räume, $f : [X, \mathcal{A}_\sigma] \to [Y, \mathcal{B}_\sigma]$ eine meßbare Abbildung, $\mu$ ein Maß über $\mathcal{A}_\sigma$. Das vermöge (1.13) definierte Maß $\nu_f$ heißt* ***das durch die Abbildung $f$ induzierte Maß über $\mathcal{B}_\sigma$****.*

Für Abbildungen meßbarer Räume in meßbare Räume ist eine erweiterte Version des Begriffes „$\sigma$-Operator“ gebräuchlich, die insbesondere in der Theorie stochastischer Prozesse Anwendung findet.

**Definition 1.5.3** *Es seien $I$ eine Indexmenge, $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ und $\{[Y_i, \mathcal{B}_i]\}_{i \in I}$ meßbare Räume. Über der Menge der meßbaren Abbildungen von $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ in die Räume $[Y_i, \mathcal{B}_i]$ ($i \in I$) wird der* ***Operator $\sigma$*** *definiert durch*

$$\sigma\big(\varphi_i : i \in I\big) = \sigma\Big(\big\{\varphi_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathcal{B}_i,\ i \in I\big\}\Big). \tag{1.14}$$

Die Meßbarkeit von (erweitert-reellwertigen) Funktionen[23], d. h. von Abbildungen von einem meßbaren Raum in den durch Hinzunahme von $+\infty$ und $-\infty$ kompaktifizierten $\mathbb{R}$, wird häufig nur unter Bezugnahme auf die offenen Mengen aus $\mathbb{R}$ definiert. Genauer nennt man eine erweitert-reellwertige Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ über dem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ eine **meßbare Funktion**, falls das Urbild $f^{-1}[O]$ jeder offenen Menge aus $\mathbb{R}$ und zusätzlich die Mengen $f^{-1}(-\infty) = \{x : f(x) = -\infty\}$ und $f^{-1}(+\infty) = \{x : f(x) = +\infty\}$ meßbar sind. Daß diese Form der Definition keine Einschränkung bedeutet, zeigt die Tatsache, daß die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ von der Familie aller offenen Mengen erzeugt wird. Enthält nämlich die $\sigma$-Algebra $\mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}})$ aller Teilmengen $M$ aus $\bar{\mathbb{R}}$, deren Urbilder meßbar sind, alle offenen Mengen aus $\bar{\mathbb{R}}$, so folgt $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}})$, so daß $f$ auch meßbar im Sinne der Definition 1.5.1 ist.

Die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ enthält alle offenen, halboffenen sowie abgeschlossenen Intervalle und wird von der Mengenfamilie $\bar{\mathcal{E}} = \{[r, +\infty] : r \in \mathbb{R}\}$ erzeugt, denn wegen

$$\{+\infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} [j, +\infty], \quad \{-\infty\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} [-j, +\infty]^c$$

enthält $\sigma(\bar{\mathcal{E}})$ die „Kompaktifizierungsmengen“ $\{+\infty\}$ und $\{-\infty\}$ sowie – wie leicht nachzuprüfen – auch alle Intervalle der Form $[r, s)$, $(r, s]$, $(r, s)$, $[r, s]$, $(-\infty, r]$, $[r, +\infty)$. Eine erweitert-reellwertige Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist also d. u. n. d. meßbar, wenn $\bar{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}})$ ist. Mit $\mathcal{E} = \{(r, +\infty] : r \in \mathbb{R}\}$ gilt insgesamt

$$f \text{ meßbar} \iff \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}}) \iff \mathcal{E} \subset \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}}) \iff \bar{\mathcal{E}} \subset \mathcal{M}_f(\bar{\mathbb{R}}).$$

[23] Erweitert-reellwertige Funktionen werden häufig auch als *numerische Funktionen* bezeichnet.

Damit ergibt sich folgende wichtige Aussage, die wir als Lemma formulieren:[24]

**Lemma 1.5.1** *Eine erweitert-reellwertige Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ über einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ist d. u. n. d. meßbar, wenn die Mengen $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$ sowie $f^{-1}[r, +\infty)$ (oder $f^{-1}(r, +\infty)$, oder $f^{-1}(-\infty, r]$, oder $f^{-1}(-\infty, r)$) für jedes $r \in \mathbb{R}$ meßbar sind.*

Sind $f_1, f_2$ erweitert-reellwertige Funktionen über $[X, \mathcal{A}_\sigma]$, so läßt sich die Menge $\{x : f_1(x) < f_2(x)\}$ als Durchschnitt zweier Mengen obigen Typs darstellen:[25]

$$\{x : f_1(x) < f_2(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{x : f_1(x) < q\} \cap \{x : q < f_2(x)\}\big).$$

Weiterhin bestehen offenbar die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\{x : f_1(x) \le f_2(x)\} &= \{x : f_1(x) > f_2(x)\}^c, \\
\{x : f_1(x) = f_2(x)\} &= \{x : f_1(x) \le f_2(x)\} \cap \{x : f_1(x) \ge f_2(x)\}, \\
\{x : f_1(x) \ne f_2(x)\} &= \{x : f_1(x) = f_2(x)\}^c;
\end{aligned}$$

daher liefern die bisherigen Ergebnisse auch noch zu das nachstehende Resultat.

**Korollar 1.5.2** *Sind die erweitert-reellwertigen Funktionen $f_1, f_2$ über $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ meßbar, so sind die Mengen $\{x : f_1(x) < f_2(x)\}$, $\{x : f_1(x) \le f_2(x)\}$, $\{x : f_1(x) = f_2(x)\}$, $\{x : f_1(x) \ne f_2(x)\}$ Elemente der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$.*

Funktionen der Form $f_1 \pm f_2 : X \to \bar{\mathbb{R}}$ bzw. $f_1 f_2 : X \to \bar{\mathbb{R}}$ werden im Folgenden definiert durch $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ bzw. $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, sofern die jeweiligen rechten Seiten stets eindeutig bestimmt sind[26]. Für eine Folge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Abbildungen $X \to \bar{\mathbb{R}}$ sind Supremum, Infimum sowie oberer und unterer Limes erklärt als

$$\begin{aligned}
\big(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n\big)(x) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad & \big(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n\big)(x) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \\
\big(\overline{\lim_{n \in \mathbb{N}}}\, f_n\big)(x) &= \overline{\lim_{n \in \mathbb{N}}}\, f_n(x), \quad & \big(\underline{\lim}_{n \in \mathbb{N}}\, f_n\big)(x) &= \underline{\lim}_{n \in \mathbb{N}}\, f_n(x).
\end{aligned}$$

Eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ über einem Maßraum heißt fast überall (bzw. überall) **punktweise konvergent**, falls es eine Funktion $\varphi$ gibt mit

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \varphi(x) \quad \text{fast überall (bzw. überall).}$$

[24] Meßbare Funktionen $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ werden häufig als *Borel-Funktionen* bezeichnet.
[25] $\mathbb{Q}$ bezeichne die (abzählbare) Menge der rationalen Zahlen.
[26] Demnach wird verlangt, daß im Falle der Summe nicht gleichzeitig $f_1(x) = +\infty$ und $f_2(x) = -\infty$ oder umgekehrt – bzw. im Falle des Produktes nicht gleichzeitig $f_1(x) = 0$ und $f_2(x) = \pm\infty$ oder umgekehrt – möglich sind.

Ohne Angabe von Beweisen nennen wir noch drei leicht nachprüfbare Resultate zu Eigenschaften meßbarer Funktionen (vergl. [10, 63]).

**Satz 1.5.3** *Es seien $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ meßbare Funktionen über dem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$. Dann sind auch die Funktionen $f_i \pm f_j$, $f_i f_j$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} f_n$ meßbar.*

**Satz 1.5.4** *Bildet ein vollständiger metrischer Raum $X$ einen Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, und gleicht $\varphi(x)$ f. ü. einer meßbaren Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, so ist auch $\varphi$ selbst meßbar.*

**Satz 1.5.5** *Konvergiert eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer erweitert-reellwertiger Funktionen über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ überall gegen eine gegebene Funktion $\varphi$, so ist $\varphi$ meßbar. Ist darüberhinaus $X$ ein vollständiger metrischer Raum, so genügt für die Meßbarkeit von $\varphi$ die Forderung, daß die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ f. ü. gegen $\varphi$ konvergiert.*

Ist $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ ein meßbarer Raum, so repräsentiert offenbar für jedes $U \in \mathcal{A}_\sigma$ die Familie $\mathcal{U} = \{A \cap U : A \in \mathcal{A}_\sigma\}$ eine $\sigma$-Algebra in $\mathfrak{P}(U)$, mit der $[U, \mathcal{U}]$ ebenfalls ein meßbarer Raum ist. $\mathcal{U}$ wird als die **Spur-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** zu $U$ bezeichnet. Wegen $\{0\} \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ gilt nun für jede über einem meßbaren Raum $[X, \mathcal{A}_\sigma]$ definierte meßbare Funktion $f$, daß $T(f)^c = \{x : f(x) = 0\} \in \mathcal{A}_\sigma$ ist, also auch $T(f) = \{x : f(x) \neq 0\} \in \mathcal{A}_\sigma$. Daher definiert bei gegebenem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ der Träger $T(f)$ einer meßbaren Funktion $f$ über $X$ einen Maßraum $[T(f), \mathcal{T}_f, \mu]$ mit der $\sigma$-Algebra $\mathcal{T}_f = \{A \cap T(f) : A \in \mathcal{A}_\sigma\}$. Diese Feststellung erweist sich für viele Überlegungen als hilfreich.

Die Ideen Henri Léon Lebesgues haben über die Untersuchung sog. einfacher Funktionen zur Definition von Integralen in allgemeinen Maßräumen geführt. Die Elemente dieser Integrationstheorie werden im folgenden Abschnitt kurz skizziert. Um den Hinweis auf beliebige Maßräume zu betonen, sprechen wir von der „Integrabilität" einer Funktion anstelle von „Integrierbarkeit".

## 1.6 Integrale in Maßräumen I: Einfache Funktionen

Wir gehen im Folgenden stets von einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ aus.

**Definition 1.6.1** *Eine meßbare Abbildung $s : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt* ***einfache Funktion****, falls es endlich viele wechselseitig disjunkte und meßbare Mengen $E_1, \ldots, E_m$ sowie reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ derart gibt, daß*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot 1_{E_k}(x). \tag{1.15}$$

*Sind alle $\alpha_k$ in dieser Summe verschieden, so sagt man, daß $s(x)$* ***in kanonischer Form*** *vorliegt. Sind alle $\alpha_k$ verschieden und ungleich Null, so bezeichnet man die Darstellung (1.15) als* ***reduzierte kanonische Form*** *von $s$. Eine einfache Funktion $s$ heißt* ***integrabel***[27]*, falls die in der reduzierten kanonischen Form auftretenden Mengen $E_k$ von endlichem Maße sind, d. h. $\mu(E_k) < \infty$ für jedes $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\alpha_k \neq 0$. Das Integral ist definiert als*

$$\int_X s(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu(E_k). \tag{1.16}$$

Liegt eine einfache Funktion $s$ in nicht kanonischer Form vor, so pflegt man im Falle $\alpha_k = 0$ und $\mu(E_k) = \infty$ $\alpha_k\, \mu(E_k) =_{def.} 0$ zu setzen; die Bedingung für die Integrabilität lautet dann $\mu(E_k) < \infty$ für $\alpha_k \neq 0$. Der Integrationsbereich $X$ in (1.16) ist offenbar mit dem Definitionsbereich des Maßes identisch; der Hinweis darauf kann daher entfallen. Auch benutzt man häufig die durch Weglassung der Argumente verkürzte Schreibweise, so daß (1.16) auch in der Form

$$\int s\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu(E_k)$$

schreibbar ist. Die Wohldefiniertheit der linken Seiten von (1.16) ergibt sich daraus, daß aus $s(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot 1_{E_k}(x) = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell \cdot 1_{G_k}(x)$ mit anderen wechselseitig disjunkten Mengen $G_1, \ldots, G_n$ endlichen Maßes stets $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \cdot \mu(E_k) = \sum_{\ell=1}^{n} \beta_\ell \cdot \mu(G_\ell)$ folgt. *Man beachte, daß das Integral einer einfachen Funktion stets endlich ist.*

**Definition 1.6.2** *Eine einfache Funktion $s(x)$ heißt* ***integrabel über einer meßbaren Teilmenge A****, falls die ebenfalls einfache Funktion $1_A(x)s(x)$ integrabel über $X$ ist. Ihr Integral über $A$ wird durch*

$$\int_A s(x)\, d\mu(x) = \int 1_A(x) \cdot s(x)\, d\mu(x) \quad \textit{bzw.} \quad \int_A s\, d\mu = \int 1_A \cdot s\, d\mu$$

*erklärt.*

Für jede meßbare Teilmenge $A$ endlichen Maßes ist die Indikatorfunktion $1_A$ einfach und integrabel mit $\int 1_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)$; daher folgt speziell

$$\int_A d\mu = \mu(A) \quad \text{für } \mu(A) < \infty, \quad A \in \mathcal{A}_\sigma. \tag{1.17}$$

Darüberhinaus besitzen integrable einfache Funktionen folgende Eigenschaften, die wir ohne Beweis in einer Satzaussage zusammenfassen.

[27] Genauer sollte man sagen „integrabel bzgl. $\mu$“ oder kurz „$\mu$-integrabel“. Solange jedoch keine Zweideutigkeiten auftreten können, behalten wir die Bezeichnung „integrabel“ bei.

**Satz 1.6.1** *Es seien $c_1, \dots, c_m$ reelle Zahlen und $s, s_1, \dots, s_m$ einfache integrable Funktionen über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$.*

- *Jede Linearkombination $\sum_{k=1}^m c_k\, s_k$ ist selbst integrable einfache Funktion mit*

$$\int \sum_{k=1}^{m} c_k s_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{m} c_k \int s_k \, d\mu;$$

- *mit $s(x)$ ist stets auch die Funktion $|s|(x) = |s(x)|$ integrable einfache Funktion, und es ist*

$$\left| \int s \, d\mu \right| \le \int |s| \, d\mu;$$

- $\int |s_1 + s_2| \, d\mu \le \int |s_1| \, d\mu + \int |s_2| \, d\mu,$
- $s(x) \ge 0$ *f. ü.* $\Longrightarrow \int s \, d\mu \ge 0;$
- $s(x) = 0$ *f. ü.* $\Longleftrightarrow \int_A s \, d\mu = 0$ *für jedes* $A \in \mathcal{A}_\sigma$;
- $s_1(x) \ge s_2(x)$ *f. ü.* $\Longrightarrow \int s_1 \, d\mu \ge \int s_2 \, d\mu;$
- *ist $\mu(A) < \infty$ und $a \le s(x) \le b$ f. ü. in $A$, so gilt*

$$a \cdot \mu(A) \le \int_A s \, d\mu \le b \cdot \mu(A);$$

- *sind $A$ und $B$ meßbar mit $A \subset B$ und ist $s(x) \ge 0$ f. ü. in $B$, so gilt*

$$\int_A s \, d\mu \le \int_B s \, d\mu;$$

- *das Integral einer integrablen einfachen Funktion $s(x)$ über einer abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ disjunkter meßbarer Mengen $A_n$ ist die Summe der Integrale über den $A_n$:*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} s \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s \, d\mu, \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{für } i \ne j;$$

- *mit $s_1(x)$ und $s_2(x)$ ist auch $s_1 s_2(x) = s_1(x) \cdot s_2(x)$ integrable einfache Funktion.*

## 1.7 Konvergenz in Maßräumen

Wir beginnen mit einer viel zitierten und für die Frage der Integrierbarkeit allgemeiner Funktionen wichtigen Aussage.

**Satz 1.7.1** *Zu jeder nicht negativen meßbaren Funktion $f$ über einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ gibt es eine monoton nicht abnehmende Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher nicht negativer Funktionen, die überall gegen $f$ konvergiert.*

*Beweis* Man betrachte die sog. **dyadischen Elementarzellen**

$$E_k(n) = \left\{x \in X : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$$
$$E_\infty(n) = \{x \in X : f(x) \geq n\},$$

und definiere die Elementarfunktionen $s_n$ für alle positiven natürlichen Zahlen $n$ vermöge

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } x \in E_k(n) \text{ für } 0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1 \\ n, & \text{falls } x \in E_\infty(n) \end{cases} \\ &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot 1_{E_k(n)}(x) + n \cdot 1_{E_\infty(n)}(x). \end{aligned} \tag{1.18}$$

Da die halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$ zur Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ gehören und $f$ eine meßbare Funktion ist, sind die Urbildmengen $E_k(n)$ und $E_\infty(n)$ meßbar. Dies impliziert die Meßbarkeit der Funktionen $s_n$. Wie leicht nachzuprüfen, ist $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)\ \forall\, x \in X$, d. h. die Elementarfunktionen $s_n$ bilden eine monoton nicht abnehmende Folge mit der Eigenschaft

$$0 \leq |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für } f(x) \leq n.$$

Da zudem $s_n(x) = n$ für alle $x$ mit $f(x) = \infty$ gilt, folgt $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ für jeden Punkt $x \in X$. □

**Definition 1.7.1** *Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mu$-endlicher meßbarer Funktionen. Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* ***fast gleichmäßig konvergent*** *gegen die meßbare Funktion $\varphi$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Menge $N_\varepsilon$ mit $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$ existiert, so daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $X \setminus N_\varepsilon$ gleichmäßig gegen $\varphi$ konvergiert*[28].

Es läßt sich leicht zeigen, daß aus der fast gleichmäßigen Konvergenz einer Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-endlicher meßbarer Funktionen gegen eine meßbare Funktion $\varphi$ deren gewöhnliche Konvergenz gegen $\varphi$ fast überall folgt. Außerdem ist die Grenzfunktion $\varphi$ dann ebenfalls $\mu$-endlich. Da es nämlich zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine meßbare Menge $A_k$ gibt mit $\mu(A_k) < 1/k$, in deren Komplement $A_k^c = X \setminus A_k$ die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\varphi$ konvergiert, ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch in allen Punkten der Vereinigung

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c$$

[28] Wir erinnern daran, daß eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi$ konvergiert, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine nicht von $x$ abhängige natürliche Zahl $n_0$ derart gibt, daß $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ (und alle $x \in X$) ist.

konvergent, wobei aus $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le \mu(A_\ell) < 1/\ell$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ folgt, daß das Komplement dieser Vereinigung vom Maße Null ist. Die nicht triviale Umkehrung dieser Aussage – für den Fall eines total endlichen Maßes – wurde von D.F. Egoroff bewiesen.

**Satz 1.7.2** (Egoroff) *Es sei $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein Maßraum mit total endlichem Maße $\mu$. Konvergiert eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-endlicher meßbarer Funktionen f. ü. gegen eine $\mu$-endliche meßbare Funktion $\varphi$, so konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch fast gleichmäßig gegen $\varphi$.*

*Beweis* Wir konstruieren zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Menge $N_\varepsilon$ mit $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$, in deren Komplement $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\varphi$ konvergiert. Dazu setze man $D_{j,n} = \{x : |f_j(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{n}\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Offenbar ist jedes $D_{j,n} \in \mathcal{A}_\sigma$, und somit auch $A_{k,n} = \bigcap_{j=k}^{\infty} D_{j,n} \in \mathcal{A}_\sigma$, wobei die $A_{k,n}$ bzgl. $k$ eine monoton abfallende (zumindest nicht zunehmende) Mengenfolge bilden: $A_{k,n} \subseteq A_{k+1,n}$. Da fast überall $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \varphi(x)$ gilt, ist das Komplement von $\lim_{k\to\infty} A_{k,n}$ eine Nullmenge: $\mu(X \setminus \lim_{k\to\infty} A_{k,n}) = 0$. Außerdem folgt nach Lemma 1.2.2 aus $\mu(X) < \infty$ und der Monotonie-Eigenschaft der Mengenfolge $\{A_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}}$, daß

$$\mu(X \setminus \lim_{k\to\infty} A_{k,n}) = \mu\big(\lim_{k\to\infty} (X \setminus A_{k,n})\big) \overset{!}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(X \setminus A_{k,n})$$

ist. Daher kann man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n$ ein $k_n$ finden mit $\mu(X \setminus A_{k,n}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ für alle $k \ge k_n$. Der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n,n} =: X \setminus N_\varepsilon$ genügt also den Beziehungen

$$\mu(N_\varepsilon) = \mu\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n,n}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_{k_n,n})\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

während in $X \setminus N_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n,n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=k_n}^{\infty} D_{j,n}$ offenbar $|f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{n}$ für jedes $x$ gilt, also $|f_n(x) - \varphi(x)| < \delta$ für alle $n \ge n_0(\delta) = \frac{1}{\delta}$ unabhängig von $x$, so daß dort die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\varphi$ konvergiert. □

**Definition 1.7.2** *Eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-endlicher meßbarer Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ heißt **konvergent im Maß** oder **$\mu$-stochastisch konvergent**, falls es eine meßbare Funktion $\varphi$ derart gibt, daß für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \ge \varepsilon\}\big) = 0 \tag{1.19}$$

*wird.*

Die Grenzfunktion $\varphi$ ist bis auf eine Menge vom Maße Null eindeutig bestimmt und $\mu$-endlich. Ist nämlich $\psi$ eine weitere meßbare Funktion, gegen die $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ im Maße konvergiert, so folgt aus

$$0 < 2\varepsilon = |\varphi(x_0) - \psi(x_0)| \le |\varphi(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - \psi(x_0)|,$$

daß $x_0 \notin \{x : |\varphi(x) - f_n(x)| < \varepsilon\} \cap \{x : |f_n(x) - \psi(x)| < \varepsilon\}$ ist, vielmehr $x_0 \in \{x : |\varphi(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \cup \{x : |f_n(x) - \psi(x)| \geq \varepsilon\}$ gilt; das bedeutet aber für $N = \{x : |\varphi(x) - \psi(x)| > 0\}$

$$\mu(N) \leq \mu\big(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}\big) + \mu\big(\{x : |f_n(x) - \psi(x)| \geq \varepsilon\}\big) \to_{n\to\infty} 0.$$

Daß die Grenzfunktion $\varphi$ in (1.19) $\mu$-endlich ist, ergibt sich unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft der $f_n$.

Zuweilen wird die Kennzeichnung der $\mu$-stochastischen Konvergenz mit Hilfe der schwächeren Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\} \cap A\big) = 0 \tag{1.20}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $\mu(A) < \infty$ angegeben [10]. Im Falle eines totalendlichen Maßes fällt diese Bedingung allerdings mit der hier genannten zusammen. (1.20) erlaubt die Betrachtung derart $\mu$-stochastisch konvergenter Folgen, für die die Maßzahlen $\mu(\{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\})$ selbst unendlich werden. In [10] findet man ein Beispiel einer solchen gegen die Nullfunktion im Sinne von (1.20) $\mu$-stochastisch konvergierenden Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ mit $\sigma$-endlichem, aber nicht total endlichen Maß $\mu$, die die schärfere Bedingung (1.19) nicht erfüllt: Mit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_\sigma = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mu(\{n\}) = 1/n$ und $f_n(k) = 1_{A_n}(k)$ für $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ konvergiert die monoton abnehmende Mengenfolge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die leere Menge, so daß mit $\{x : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} = A_n$ für $0 < \varepsilon < 1$ einerseits $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n \cap A) = 0$ wird, andererseits aber $\mu(A_n) = \infty$ ist für jedes $n$.

**Satz 1.7.3** *Konvergiert die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-endlicher meßbarer Funktionen fast gleichmäßig gegen eine meßbare Funktion $\varphi$, so konvergiert sie auch im Maß gegen $\varphi$. Ist $\mu$ total endlich, so genügt statt fast gleichmäßiger Konvergenz die einfache Konvergenz fast überall.*

*Beweis* 1. Laut Voraussetzung gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Menge $N_\varepsilon$ mit $\mu(N_\varepsilon) < \varepsilon$ und $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus N_\varepsilon$ und $n \geq n_0(\varepsilon)$. Es sei $G_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}$, womit man $G_n(\varepsilon) \subseteq N_\varepsilon$ für $n \geq n_0(\varepsilon)$ und $G_n(\varepsilon_1) \subseteq G_n(\varepsilon_2)$ für $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ erhält. Gäbe es ein $\varepsilon_0$ sowie eine Menge $A$ endlichen Maßes, so daß $\lim_{n\to\infty} \mu(G_n(\varepsilon_0) \cap A) = \delta > 0$ bleibt, so hätte man wegen $(G_n(\varepsilon_0) \cap A) \subseteq (N_{\varepsilon_0} \cap A)$ die Relation $\delta = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n(\varepsilon_0) \cap A) \leq \mu(N_{\varepsilon_0}) < \varepsilon_0$, während mit der Wahl $\varepsilon = \delta < \varepsilon_0$ auch $G_n(\varepsilon_0) \subseteq G_n(\delta)$ wird und daher

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n(\varepsilon_0) \cap A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(G_n(\delta) \cap A) \leq \mu(N_\delta \cap A) < \delta,$$

ein offensichtlicher Widerspruch.

2. Ist das Maß $\mu$ total endlich, so konvergiert nach Satz 1.7.2 eine gegen $\varphi$ fast überall konvergente Folge auch fast gleichmäßig gegen $\varphi$, so daß der Aussagenteil 1 greift. □

**Definition 1.7.3** *Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt* ***Cauchy-Folge im Maß*** *oder* ***$\mu$-stochastische Cauchy-Folge****, falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\mu\big(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}\big) \to 0 \quad \textit{für } m, n \to \infty.$$

**Satz 1.7.4** *Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Maß mit $\mu$-endlichen meßbaren Funktionen $f_n$, so enthält $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen eine meßbare Funktion $\varphi$ fast gleichmäßig konvergierende Teilfolge $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$.*

*Beweis* Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ gibt es ein $n(\varepsilon_k) =: n_k$ derart, daß

$$\mu\left(\left\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k} \quad \text{für } n, m \geq n_k$$

ist, wobei man o. E.d. A. $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen kann. Setzt man $G_k = \left\{x : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}$, so folgt für jedes $\ell \geq 1$ und jedes $x \in X \setminus (\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k)$

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| < \frac{1}{2^\ell} \quad \text{für } i \leq j \leq \ell,$$

d. h. $|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \to 0$ mit $i, j \to \infty$. Die Teilfolge $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ bildet also eine gleichmäßige Cauchy-Folge[29] über $X \setminus (\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k)$ für jedes $\ell \geq 1$. Daher existiert eine über

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty}\left(X \setminus \left(\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k\right)\right) =: M$$

definierte Funktion $\varphi_0$, gegen die $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in jeder der Mengen $X \setminus (\bigcup_{k=\ell}^{\infty} G_k)$, $\ell \geq 1$, gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 1.5.5 ist $\varphi_0$ meßbar über $M$. Sei nun $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ für $x \in M$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in M^c = X \setminus M$; dann ist diese über ganz $X$ definierte Funktion wegen $\varphi^{-1}[U] = \varphi_0^{-1}[U] \cup \{0\}$ offensichtlich ebenfalls meßbar. Zu $\varepsilon > 0$ wähle man den Index $\ell(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^{\ell(\varepsilon)-1}} \leq \varepsilon < \frac{1}{2^{\ell(\varepsilon)-2}}$ und bilde die Menge $N_\varepsilon = \bigcup_{k=\ell(\varepsilon)}^{\infty} G_k$; dann konvergiert $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $X \setminus N_\varepsilon$ gleichmäßig gegen $\varphi$, und es ist $\mu(N_\varepsilon) < \frac{1}{2^{\ell(\varepsilon)-1}} \leq \varepsilon$, d. h. die Teilfolge konvergiert in $X$ fast gleichmäßig gegen $\varphi$. □

Satz 1.7.4 liefert zusammen mit Satz 1.7.3 das

**Korollar 1.7.5** *Zu einer $\mu$-stochastischen Cauchy-Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ f. ü. reellwertiger meßbarer Funktionen gibt es stets eine Teilfolge $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ sowie eine meßbare Funktion $\varphi$, so daß $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ $\mu$-stochastisch gegen $\varphi$ konvergiert.*

## 1.8 Integrale in Maßräumen II: Allgemeine Funktionen

**Definition 1.8.1** *Eine Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrabler einfacher Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ heißt* ***Cauchy-Folge im Mittel*** *oder* ***$\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge****, falls mit $n, m \to \infty$ das Integral $\int |s_n - s_m|\, d\mu$ gegen Null strebt*[30].

[29] Für $k_1, k_2 > k_0(\delta)$ wird $|f_{n_{k_1}}(x) - f_{n_{k_2}}(x)| < \delta$ unabhängig von $x$.
[30] Eine meßbare Funktion heißt *$p$-fach $\mu$-integrierbar*, wenn $\int |f|^p\, d\mu$ erklärt ist ($p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$). Die Menge der *reellwertigen* $p$-fach $\mu$-integrierbaren Funktionen bezeichnet man mit dem Symbol

**Definition 1.8.2** *Eine erweitert reellwertige meßbare Funktion $f$ über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ heißt* ***integrabel****, wenn es eine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrabler einfacher Funktionen gibt, die f. ü. gegen $f$ konvergiert, für die also $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ ist mit einer Nullmenge $N$. Das Integral von $f$ ist definiert als*

$$\int f(x)\,d\mu(x) =: \int f\,d\mu \stackrel{!}{=} \lim_{n\to\infty} \int s_n\,d\mu. \tag{1.21}$$

Die Existenz des Grenzwertes folgt aus der $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folgen-Eigenschaft der $s_n$ und der Tatsache, daß jede Cauchy-Folge im vollständigen reellen Raum $\mathbb{R}$ konvergiert (mit $n, m \to \infty$ geht $|\int s_n\,d\mu - \int s_m\,d\mu| \le \int |s_n - s_m|\,d\mu$ gegen 0). Die eindeutige Bestimmtheit und damit die Wohldefiniertheit des Integrals wird unten (Satz 1.8.5) gezeigt. Es läßt sich leicht nachweisen, daß eine meßbare Funktion $f$ d. u. n. d. integrabel ist, wenn dies für die Funktionen $f^+$ und $f^-$ zutrifft, oder wenn $|f|$ integrabel ist[31]. Das Integral von $f$ ist daher stets schreibbar als

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu. \tag{1.22}$$

Die Integrabilität von $f$ impliziert offenbar diejenige von $1_A f$. Über einer meßbaren Teilmenge $A$ ist das Integral der integrablen Funktion $f$ definiert als

$$\int_A f\,d\mu = \int 1_A f\,d\mu. \tag{1.23}$$

Da für diese Festlegung die Integrabilität von $1_A f$ ausreicht, ist (1.23) auch dann erklärt, wenn zwar $1_A f$ integrabel, $f$ jedoch lediglich meßbar ist.

Das Integral (1.21) einer über einem beliebigen Maßraum $[X, \mathcal{A}, \mu]$ definierten integrablen Funktion ist im Sinne obiger Definition 1.8.2 zwangsläufig endlich, da die Folge $\{\int s_n\,d\mu\}_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $|\int (s_n - s_m)\,d\mu| \le \int |s_n - s_m|\,d\mu \to 0$ für $n, m \to \infty$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ darstellt, die einem endlichen Grenzwert zustrebt. Umgekehrt ist eine beschränkte nicht negative Funktion bzgl. eines total endlichen Maßes integrabel, wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 1.8.1** *In einem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ mit total endlichem Maße $\mu$ ist jede nicht negative meßbare und nach oben durch eine Konstante $K > 0$ beschränkte Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ endlich $\mu$-integrabel.*

*Beweis* Nach Satz 1.7.1 gibt es stets eine monoton nicht abnehmende Folge einfacher, überall gegen $f$ konvergierender Funktionen $s_n$ der Form (1.18) mit den Trägermengen $E_k(n)$,

---

$\mathcal{L}^p(\mu)$ oder kurz $\mathcal{L}^p$ (in Anlehnung an die Notation für $p$-fach Lebesgue-integrierbare Funktionen in der Analysis).

[31] Positiv- bzw. Negativanteil einer Funktion $f$ sind definiert als $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ bzw. $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

$1 \le k \le n\,2^n - 1$ und $E_\infty(n)$, und diese $s_n$ erfüllen $0 \le f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n}$, falls $f(x) < n$ ist, und $s_n(x) = n$, falls $f(x) = \infty$ wird. Sie sind bzgl. des total endlichen Maßes zwangsläufig integrabel. Ist $f(x)$ für jedes $x \in X$ durch eine Konstante $K$ nach oben beschränkt, so ist für alle $n > K$ jede der Funktionen $|f - s_n|$ integrabel, und es gilt

$$\begin{aligned}\left|\int s_m\,d\mu - \int s_n\,d\mu\right| &\le \int |s_m - s_n|\,d\mu \le \int \left(|s_m - f| + |f - s_n|\right) d\mu \\ &\le \int |s_m - f|\,d\mu + \int |s_m - f|\,d\mu \to_{n,m\to\infty} 0,\end{aligned}$$

d. h. die Zahlen $\int s_n\,d\mu$ bilden eine Cauchy-Folge und konvergieren gegen $\int f\,d\mu < \infty$. □

Unbefriedigend bleibt, daß in allgemeinen Maßräumen gemäß Definition 1.8.2 (die nur zu endlichen Integralwerten führt) sogar beschränkte stetige Funktionen – definiert etwa über der reellen Achse – nicht integrabel sein müssen. Dem begegnet man durch eine Erweiterung des Integralbegriffes: Ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine meßbare und nicht negative, jedoch nicht im Sinne der Definition 1.8.2 integrable Funktion, so wird

$$\int f\,d\mu = \infty \tag{1.24}$$

gesetzt. Einer beliebigen, nicht notwendig integrablen, einfachen und nicht negativen Funktion $s(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot 1_{E_k}(x)$ ist demnach stets ein Integral zugeordnet:

$$\int s(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot \mu(E_k)$$

($E_1, \ldots, E_m$ wechselseitig disjunkt und meßbar mit der Möglichkeit, daß $\mu(E_k) = \infty$ wird). Folglich ist die Definition der Integrabilität nicht negativer meßbarer Funktionen aufgrund des Satzes 1.7.1 (Abschn. 1.7) folgendermaßen formulierbar.

**Definition 1.8.3** *Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine meßbare nicht negative Funktion, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die nach Satz 1.7.1 existierende monoton nicht abnehmende Folge einfacher Funktionen, die f. ü. punktweise gegen $f$ konvergiert. Dann besitzt $f$ das Integral*

$$\int f(x)\,d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int s_n(x)\,d\mu(x).$$

Für Funktionen, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen können, wird Folgendes festgelegt.

**Definition 1.8.4** *Es sei $f$ meßbar. Ist mindestens eine der Funktionen $f^+$ und $f^-$ integrabel im Sinne der Definition 1.8.2, besitzt also insbesondere einen endlichen Integralwert, so wird das $\mu$-Integral $\int f\,d\mu$ von $f$ vermöge (1.22) erklärt:*

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu. \tag{1.25}$$

*Ist genau eines der Integrale $\int f^+ \,d\mu$ und $\int f^- \,d\mu$ (jedoch nicht das jeweils andere) im Sinne der Definition 1.8.3 unendlich, so heißt $f$ **quasi-integrabel** mit $|\int f\,d\mu| = \infty$. Sind beide Anteile, also sowohl $f^+$ als auch $f^-$, (endlich) integrabel gemäß Definition 1.8.2, so heißt $f$ (endlich) **$\mu$-integrabel**.*

Zu einer quasi-integrablen Funktion **existiert** also das Integral als endlicher oder unendlicher Wert. Man sagt dann, das Integral von $f$ sei *wohldefiniert*. Sind dagegen die Integrale *beider* Anteilsfunktionen $f^+, f^-$ einer Funktion $f$ unendlich, so besitzt $f$ kein Integral, d. h. die Symbolfolge $\int f\,d\mu$ bleibt *undefiniert*.

Für $X = \bar{\mathbb{R}}^d$, $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^d)$, $\mu = \lambda$ (das Lebesgue-Maß) bezeichnet (1.25) das **Lebesgue-Integral von $f$**. Falls $\mu = \lambda_F$ ein Lebesgue-Stieltjes'sches Maß bzgl. $F$ ist, repräsentiert $\int f d\lambda_F$ das **Lebesgue-Stieltjes'sche Integral von $f$ bzgl. $F$**. Die üblichen Schreibweisen für das Lebesgue–Integral und das Lebesgue-Stieltjes-Integral sind[32]

$$\int f\,d\lambda = \int f(x)\,d(x), \qquad \int f\,d\lambda_F = \int f\,dF = \int f(x)\,dF(x). \tag{1.26}$$

Da im eindimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}$ das Lebesgue-Maß jedem Intervall $I = (a, b]$ dessen Inhalt $b - a$ zuordnet, wird aus obigen Festlegungen ersichtlich, daß jede meßbare beschränkte Funktion über $\mathbb{R}$ im Sinne von Lebesgue integrabel ist (vergl. hierzu [124] sowie auch Abschn. A.2).

**Bemerkung 1.8.1** *Für eine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher integrabler Funktionen, die f. ü. (bzw. im Maße) gegen $f$ konvergiert, gilt für jedes festes $k_0$*

$$\int \big||s_{k_0} - s_n| - |s_{k_0} - s_m|\big|\,d\mu \le \int |s_n - s_m|\,d\mu \to_{n,m\to\infty} 0.$$

*$\{|s_{k_0} - s_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ bildet daher eine Cauchy-Folge im Mittel mit*

$$\lim_{n\to\infty} \{|s_{k_0} - s_n|\}_{n\in\mathbb{N}} = |s_{k_0} - f| \quad \text{f. ü. (bzw. im Maße),}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int |s_{k_0} - s_n|\,d\mu = \int |s_{k_0} - f|\,d\mu.$$

*Da $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ selbst Cauchy-Folge im Mittel ist, folgt*

$$\lim_{k\to\infty} \int |s_k - f|\,d\mu = \lim_{k,n\to\infty} \int |s_k - s_n|\,d\mu = 0. \qquad \square$$

**Bemerkung 1.8.2** *Gleicht eine meßbare Funktion $\varphi$ fast überall einer integrablen Funktion $f$, so ist sie offenbar selbst integrabel mit $\int f\,d\mu = \int \varphi\,d\mu$; denn jede gegen $f$ f. ü. konvergierende $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge einfacher integrabler Funktionen konvergiert auch fast überall gegen $\varphi$. Daraus können wir schließen, daß über einer Nullmenge $N \in \mathcal{A}_\sigma$ jede meßbare Funktion $f$ integrabel ist mit $\int_N f\,d\mu = 0$ (denn $1_N(x) f(x) =_{f.ü.} 0$).* $\square$

[32] Siehe Definitionen 1.4.1 und 1.4.2, Abschn. 1.4.1.

An die Stelle der fast überall gültigen Konvergenz kann in Definition 1.8.2 auch die Konvergenz im Maß treten:

**Lemma 1.8.2** *$f$ ist d. u. n. d. endlich integrabel, wenn eine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrabler einfacher Funktionen $\mu$-stochastisch gegen $f$ konvergiert.*

*Beweis* 1. Ist $f$ integrabel und $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge, die f. ü. gegen $f(x)$ konvergiert, so gibt es zu $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine f. ü. reellwertige meßbare Funktion $\varphi$, gegen die $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-stochastisch konvergiert. Nach Satz 1.7.4 enthält $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $\{s_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, die gegen $\varphi$ fast gleichmäßig konvergiert. Das bedeutet, daß es zu jedem $\varepsilon_n = 1/n$ eine Menge $N_{\varepsilon_n}$ mit $\mu(N_{\varepsilon_n}) \le \varepsilon_n$ derart gibt, daß $\{s_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $X \setminus N_{\varepsilon_n}$ gleichmäßig gegen $\varphi$ konvergiert. Die Teilfolge ist also in $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus N_{\varepsilon_n}) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n})^c$ gleichmäßig konvergent, wobei $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}) \le 1/n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\varepsilon_n}) = 0$ gilt, d. h. $\{s_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen $\varphi$, woraus $f = \varphi$ f. ü. folgt. Die gegen $\varphi$ $\mu$-stochastisch konvergente Teilfolge konvergiert also $\mu$-stochastisch auch gegen $f$.

2. Es sei umgekehrt $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $f$ $\mu$-stochastisch konvergente $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge integrabler einfacher Funktionen. Eine Teilfolge $\{s_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ dieser Folge konvergiert dann gemäß Satz 1.7.4 fast gleichmäßig gegen eine meßbare Funktion $\varphi$, und eine zum vorangegangenen Schluß analoge Überlegung impliziert $\{s_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}} \to_{\text{f. ü.}} \varphi$. □

Ist eine erweitert-reellwertige Funktion $\varphi_M$ nur auf einer Teilmenge $M \in \mathcal{A}_\sigma$ definiert, so ist der Begriff der Integrierbarkeit von $\varphi_M$ auf den Maßraum $[M, \mathcal{A}_M, \mu_M]$ zu beziehen, worin $\mathcal{A}_M = \{M \cap A : A \in \mathcal{A}_\sigma\}$ die Spur-$\sigma$-Algebra in $M$ ist und $\mu_M$ die Restriktion von $\mu$ auf $M$ darstellt. $\varphi_M$ ist d. u. n. d. integrabel (über $M$), wenn die auf dem ganzen Raum $X$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_M(x) & \text{für } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(über $X$) integrabel ist. Man schreibt in diesem Falle $\int_M \varphi_M \, d\mu_M = \int_M \varphi_M \, d\mu$.

**Satz 1.8.3** *Es sei $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge integrabler einfacher Funktionen, die f. ü. gegen die erweitert-reellwertige meßbare Funktion $f$ konvergiert. Die Abbildung $\nu : \mathcal{A}_\sigma \to \mathbb{R}$, definiert durch*

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu = \int 1_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}_\sigma,$$

*ist eine vollständig additive Mengenfunktion.*

*Beweis* Zunächst ist festzustellen, daß der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_A s_n \, d\mu$ existiert und sogar gleichmäßig erreicht wird, da wegen der Cauchy-Folgen-Eigenschaft im Mittel

$$\left| \int_A s_n \, d\mu - \int_A s_m \, d\mu \right| \le \int_A |s_n - s_m| \, d\mu \le \int |s_n - s_m| \, d\mu \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty$$

gilt. Sei nun $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ eine Vereinigung disjunkter meßbarer Mengen. Da die Integrale (einfacher Funktionen) additiv sind, hat man für jedes $k$ und $M^{(k)} = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ die Beziehungen

$$\int_{M^{(k)}} s_n \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} \int_{A_j} s_n \, d\mu, \quad \nu(M^{(k)}) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j).$$

Damit folgt

$$\left|\nu(M) - \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)\right| \leq \left|\nu(M) - \int_M s_n \, d\mu\right| + \left|\int_M s_n \, d\mu - \sum_{j=1}^{k} \int_{A_j} s_n \, d\mu\right| + \left|\int_{M^{(k)}} s_n \, d\mu - \nu(M^{(k)})\right|.$$

Gemäß Definition von $\nu$ ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ und geeignetes $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$\left|\nu(M) - \int_M s_n \, d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left|\int_{M^{(k)}} s_n \, d\mu - \nu(M^{(k)})\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei $n_0(\varepsilon)$ als abhängig vom Gesamtintegral, jedoch unabhängig von $M$ und $M^{(k)}$ (insbesondere von $k$) wählbar ist. Das Integral $\int_M s_n \, d\mu$ ist vollständig additiv für jede der integrablen einfachen Funktionen $s_n$ (Satz 1.6.1). Somit hat man für beliebiges $\varepsilon$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\nu(M) - \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)\right| \leq \varepsilon + \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|\int_M s_n \, d\mu - \sum_{j=1}^{k} \int_{A_j} s_n \, d\mu\right| = \varepsilon,$$

also $\nu(M) = \sum_{j=1}^{k} \nu(A_j)$. □

**Satz 1.8.4** *Es seien $\{s_n^{(\ell)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\ell = 1, \ldots, w$, $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folgen integrabler einfacher Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, die f. ü. gegen dieselbe meßbare Funktion $f$ konvergieren. Ist das Maß $\mu$ $\sigma$-additiv, so stimmen die vermöge*

$$\nu^{(\ell)}(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n^{(\ell)} \, d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{A}_\sigma$$

*definierten vollständig additiven Mengenfunktionen über den meßbaren Mengen $A \in \mathcal{A}_\sigma$ überein.*

*Beweis* Die vollständige Additivität der $\nu^{(\ell)}$ wurde in Satz 1.8.3 festgestellt. Es sei $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit $A_j \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\mu(A_j) < \infty$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ ($\sigma$-Additivität von $\mu$). Man setze $E_1 = A_1$, $E_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$ für $k > 1$, so daß $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$ wird und somit $X$ als abzählbare Vereinigung disjunkter meßbarer Mengen $E_k$ endlichen Maßes darstellbar ist.

Wir zeigen nachfolgend, daß für jede der Mengen $E_k$ und jedes Indexpaar $\ell_1 \neq \ell_2$ eine Abschätzung der Form

$$|\nu^{(\ell_1)}(E_k) - \nu^{(\ell_2)}(E_k)| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{E_k} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| \, d\mu \leq \varepsilon$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ gilt. Dazu setze man $\eta = \varepsilon/[4 + \mu(E_k)]$ und

$$U_n(\eta; \ell_1, \ell_2) = \left\{x : |s_n^{(\ell_1)}(x) - s_n^{(\ell_2)}(x)| \geq \eta\right\},$$

womit offenbar

$$U_n(\eta; \ell_1, \ell_2) \subset \left\{x : |s_n^{(\ell_1)}(x) - f(x)| \geq \frac{\eta}{2}\right\} \cup \left\{x : |s_n^{(\ell_2)}(x) - f(x)| \geq \frac{\eta}{2}\right\}$$

gilt. Da nach Lemma 1.8.2 jede der $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folgen $\{s_n^{(\ell)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-stochastisch gegen $f$ konvergiert, hat man $\mu\big(U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)\big) \to 0$ für $n \to \infty$. Des weiteren gilt offenbar

$$\begin{aligned}\int_{E_k} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| \, d\mu \leq & \int_{E_k \setminus U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| \, d\mu \\ & + \int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_1)}| \, d\mu + \int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_2)}| \, d\mu,\end{aligned}$$

worin $\int_{E_k \setminus U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| \, d\mu \leq \eta \cdot \mu(E_k)$ ist. Die Cauchy-Folgen-Eigenschaft impliziert, daß für genügend große Zahlen $n$ und $m$ die Abschätzung

$$\int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_s)} - s_m^{(\ell_s)}| \, d\mu \leq \eta \quad \text{für } s \in \{1, 2\}$$

erfüllt wird, so daß

$$\begin{aligned}\int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_s)}| \, d\mu &\leq \int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} \left(|s_n^{(\ell_s)} - s_m^{(\ell_s)}| + |s_m^{(\ell_s)}|\right) d\mu \\ &\leq \eta + \int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_m^{(\ell_s)}| \, d\mu\end{aligned}$$

für $s \in \{1, 2\}$ folgt. Wird nun $m$ festgehalten, so daß $|s_m^{(\ell_s)}(x)| \leq c_s(m)$ f. ü. mit einer Konstanten $c_s(m)$ und $\int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_m^{(\ell_s)}| \, d\mu \leq c_s(m) \cdot \mu\big(U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)\big)$ ist, so bedeutet $\lim_{n\to\infty} \mu\big(U_n(\eta; \ell_1, \ell_2)\big) = 0$, daß auch $\int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_m^{(\ell_s)}| \, d\mu \leq \eta$ wird, sofern nur $n$ genügend groß ist. Dies impliziert $\int_{E_k \cap U_n(\eta;\ell_1,\ell_2)} |s_n^{(\ell_s)}| \, d\mu \leq 2\eta$ $(s = 1, 2)$, also

$$|\nu^{(\ell_1)}(E_k) - \nu^{(\ell_2)}(E_k)| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{E_k} |s_n^{(\ell_1)} - s_n^{(\ell_2)}| \, d\mu \leq \eta \, \mu(E_k) + 4\eta = \varepsilon$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, und daher $\nu^{(\ell_1)}(E_k) = \nu^{(\ell_2)}(E_k)$ für jede der disjunkten Mengen $E_k$ endlichen Maßes. Aus der vollständigen Additivität der Mengenfunktionen $\nu_\ell$ folgt nun die Satzbehauptung: $\nu^{(\ell_1)}(E) = \nu^{(\ell_1)}\left(\bigcup_{k=1}^\infty E_k\right) = \sum_{k=1}^\infty \nu^{(\ell_1)}(E_k) = \nu^{(\ell_2)}(E)$ für alle $\ell_1, \ell_2$ aus $\{1, \ldots, w\}$. □

Mit Hilfe der letzten beiden Sätze läßt sich nun zeigen, daß die Integral-Definition gemäß (1.21) nicht von der Wahl einer speziellen Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher, gegen $f$ konvergierender Funktionen abhängt.

**Satz 1.8.5** *Es sei $f$ eine erweitert reellwertige meßbare Funktion über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, und $\{s_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(i = 1, \ldots, m)$ seien $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folgen integrabler einfacher Funktionen mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{(i)}(x) = f(x) \quad \textit{fast überall.}$$

*Dann ist das (endliche) Integral $\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n^{(i)}\,d\mu$ für alle $i$ gleich, also unabhängig von der Wahl einer speziellen Folge $\{s_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

*Beweis* Aufgrund der Eigenschaften einfacher Funktionen sind die meßbaren Mengen $M_n^{(i)} := \{x : s_n^{(i)}(x) \neq 0\}$ für jedes $i$ in einer Vereinigungsmenge $\bigcup_{j=1}^{k(i)} E_j^{(i)}$ meßbarer Mengen $E_j^{(i)}$ enthalten, die zusammen mit $\{x : s_n^{(i)}(x) = 0\}$ eine Partition von $X$ bilden und von endlichem Maße sind: $\mu(E_j^{(i)}) < \infty$. Daher bildet die Menge $M = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^{(i)}$ mit der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_M = \mathcal{A}_\sigma \cap \{M_n^{(i)}\}_{i\in\{1,\ldots,m\},n\in\mathbb{N}}$ und dem auch auf $\mathcal{A}_M$ definierten Maß $\mu$ einen Maßraum $[M, \mathcal{A}_M, \mu]$ mit $\sigma$-endlichem Maß. Nach Satz 1.8.4 sind alle Integrale $\lim_{n\to\infty} \int_M s_n^{(i)}\,d\mu$ gleich, und wegen $s_n^{(i)}(x) = 1_M(x)\,s_n^{(i)}(x)$ auch die Integrale $\lim_{n\to\infty} \int_X s_n^{(i)}\,d\mu = \int f\,d\mu$. □

Es macht nun auch Sinn, im Falle einer integrablen Funktion $f$ von dem durch $f$ vermöge

$$\nu_f(A) = \int_A f\,d\mu \quad \text{für } A \in \mathcal{A}_\sigma,$$

definierten endlichen signierten Maß $\nu_f : \mathcal{A}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ zu sprechen, das man als das **unbestimmte Integral** von $f$ bezeichnet.

In Anbetracht der Bemerkungen zu lediglich meßbaren Funktionen kann man nun allgemeiner die folgende Feststellung treffen.

**Korollar 1.8.6** *Für jede nicht negative meßbare Funktion $f$ ist die Mengenfunktion $\nu_f : \mathcal{A}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ ein (ggf. nicht total endliches) Maß. Für eine beliebige meßbare Funktion $f$ mit der Eigenschaft, daß nicht gleichzeitig $\nu_{f^+}(X)$ und $\nu_{f^-}(X)$ den Wert $\infty$ annehmen, repräsentiert $\nu_f$ ein signiertes Maß.*

**Lemma 1.8.7** *Kann einer meßbaren Funktion $f$ ein Integralwert zugeordnet werden, so ist das vermöge $\nu_f(A) = \int_A f\,d\mu$ definierte signierte Maß $\nu_f : \mathcal{A}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ absolut stetig bzgl. $\mu$. Ist $f$ über jeder meßbaren Teilmenge endlichen Maßes integrabel (besitzt also ein endliches Integral), so ist $\nu_f$ auch absolut stetig im Sinne der Definition 1.2.10.*

*Beweis* 1. Über einer Nullmenge $N$ ist jede meßbare Funktion $f$ integrabel (vergl. Bemerkung 1.8.2), und es ist $\nu_f(N) = \int_N f\,d\mu = 0$, d. h. $\nu_f$ ist absolut stetig.

2. Ist $f$ integrabel über jeder meßbaren Menge $A$ mit $\mu(A) < \infty$, so gilt $|\nu_f(A)| < \infty$, also ist $\nu_f$ nach Satz 1.2.7 auch absolut stetig im Sinne der Definition 1.2.10. □

**Lemma 1.8.8** *Ist $f$ nicht negativ und integrabel, so sind alle Mengen der Form $A_n = \left\{x : \frac{1}{n} \le f(x) < n\right\}$ bzw. $B_n = \left\{x : \frac{1}{n} \le f(x)\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$ von endlichem Maße.*

*Beweis* Nach Lemma 1.5.1 sind alle $B_n = f^{-1}\left[\frac{1}{n}, \infty\right)$ und damit auch alle Mengen $A_n$ für $n \ge 1$ meßbar. Es sei $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine gegen $f$ f. ü. konvergierende $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge einfacher integrabler Funktionen. Zu jedem $s_k$ gehören endlich, etwa $m(k)$, viele Mengen $X_i(k)$ mit $s_k(x) = \alpha_i(k)$ für $x \in X_i(k)$, und $s_k(x) = 0$ sonst, wobei $\mu\big(X_i(k)\big) < \infty$ für $1 \le i \le m(k)$ ist. Die Mengen $R_{n,k}$, $S_{n,k}$, definiert durch

$$R_{n,k} = \left\{x : \frac{1}{2n} \le s_k(x) \le n + \frac{1}{2n}\right\}, \quad S_{n,k} = \left\{x : \frac{1}{2n} \le s_k(x)\right\}, \quad n, k \in \mathbb{N},$$

sind in der Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{m(k)} X_i(k)$ enthalten. Wählt man $k \ge k_0(\frac{1}{2n})$ derart, daß f. ü. $\big|s_k(x) - |f|(x)\big| < \frac{1}{2n}$ wird, so hat man (ggf. bis auf eine Menge vom Maße Null) $A_n \subseteq R_{n,k}$ sowie $B_n \subseteq S_{n,k}$, woraus $\mu(A_n) < \infty$ und $\mu(B_n) < \infty$ folgt. □

Die Eigenschaften von Integralen meßbarer Funktionen gleichen im wesentlichen denen, die in Satz 1.6.1 für einfache Funktionen genannt wurden. Sie werden nachfolgend lediglich aufgezählt; zu Einzelnachweisen vergl. man [63] oder [68].

**Satz 1.8.9** (Eigenschaften integrabler Funktionen) *Es seien $f_n, f, g$ integrable Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$.*

- *Jede Linearkombination $\sum_{n=1}^m c_n f_n$ ist integrabel mit*

$$\int \sum_{n=1}^{m} c_n f_n(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n \int f_n(x)\,d\mu(x);$$

- *mit $f(x)$ ist stets auch die Funktion $|f|(x) = |f(x)|$ integrabel, und es ist*

$$\left|\int f(x)\,d\mu(x)\right| \le \int |f|(x)\,d\mu(x);$$

- $\int |f+g|(x)\,d\mu(x) \le \int |f|(x)\,d\mu(x) + \int |g|(x)\,d\mu(x)$,
- $f(x) \ge 0$ *f. ü.* $\Longrightarrow \int f(x)\,d\mu(x) \ge 0$;
- $f(x) = 0$ *f. ü.* $\Longleftrightarrow \int_A f(x)\,d\mu(x) = 0$ *für jedes* $A \in \mathcal{A}_\sigma$;
- $f(x) \ge g(x)$ *f. ü.* $\Longrightarrow \int f(x)\,d\mu(x) \ge \int g(x)\,d\mu(x)$;

- *ist $\mu(A) < \infty$ und $a \le f(x) \le b$ f. ü. in A, so gilt*

$$a \cdot \mu(A) \le \int_A f(x)\,d\mu(x) \le b \cdot \mu(A);$$

- *sind A und B meßbar mit $A \subset B$ und ist $f(x) \ge 0$ f. ü. in B, so gilt*

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) \le \int_B f(x)\,d\mu(x);$$

- *das Integral einer integrablen Funktion $f(x)$ über einer abzählbaren Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ disjunkter meßbarer Mengen $A_n$ ist die Summe der Integrale über den $A_n$:*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)\,d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)\,d\mu(x), \quad \text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{für } i \ne j;$$

- *ist $0 < c \le f(x)$ in einer meßbaren Menge A, so ist $\mu(A) < \infty$.*

**Bemerkung 1.8.3** *Die Indikatorfunktion $1_M(x)$ einer beliebigen meßbaren Menge M ist stets eine einfache Funktion. Wählt man $M = \{x : f(x) = \pm\infty\}$, so wird offenbar $1_M(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ durch $\varepsilon|f|(x)$ majorisiert. Daraus folgt: Ist f integrabel, so gilt $\mu(M) \le \varepsilon \int |f|\,d\mu$ $\forall\, \varepsilon > 0$, und es ist $\mu(M) = 0$, d. h. jede integrable Funktion f ist μ-endlich.* □

Auch die Charakterisierung von Eigenschaften „im Mittel" für allgemeine integrable Funktionen entspricht derjenigen für einfache Funktionen:

**Definition 1.8.5** *Eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrabler Funktionen heißt **Cauchy-Folge im Mittel**, falls $\int |f_n - f_m|\,d\mu \to 0$ für $n, m \to \infty$*[33]*. Sie heißt **konvergent im Mittel** gegen φ, sofern* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - \varphi|\,d\mu = 0$ *für die integrable Funktion φ gilt.*

**Lemma 1.8.10** *Ist $f : [X, \mathcal{A}_\sigma, \mu] \to \bar{\mathbb{R}}$ integrabel, so ist das durch Einschränkung von μ auf die Menge $U = \{x : f(x) \ne 0\}$ definierte Maß $\mu_U$ σ-endlich*[34].

*Beweis* Mit $f$ ist auch $|f|$ integrabel. Die Mengen $B_n = \left\{x : \frac{1}{n} \le |f|(x)\right\}$ sind gemäß Lemma 1.8.8 von endlichem Maße und erfüllen $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = U$. □

**Satz 1.8.11** *Es sei f integrabel über $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$. Verschwindet das Integral $\int_P f\,d\mu$ über einer meßbaren Menge P, in der $f(x) > 0$ ist, so ist P Nullmenge. Ist andererseits $\int_A f\,d\mu = 0$ über jeder meßbaren Menge A, so ist $f(x) = 0$ fast überall in X.*

*Beweis* 1. Sei $f(x) > 0$ für $x \in P$, $\int_P f\,d\mu = 0$. Für $U = \{x : |f|(x) > 0\}$ folgt aus Lemma 1.8.10, daß $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n = \{x : \frac{1}{n} \le |f|(x) < n\}$ ist, wobei $\mu(A_n) < \infty$

[33] Von einer $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge spricht man dann, wenn $f(x) \ne \pm\infty$ $\forall\, x$ ist.
[34] Man sagt in diesem Falle, $U$ ist *σ-endlich*.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ ist (vergl. Beweis zu Lemma 1.8.8). Die Mengen $E_n = \{x \in P : \frac{1}{n} \le f(x) \le n\}$ sind dann ebenfalls von endlichem Maße und bilden eine monoton ansteigende Mengenfolge mit $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = P$. Die Endlichkeit der Maßwerte $\mu(E_n)$ impliziert

$$0 = \int_{E_n} f\, d\mu \ge \frac{1}{n} \int_{E_n} d\mu \ge \frac{1}{n}\, \mu(E_n),$$

so daß $\mu(E_n) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und daher $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ folgt. Lemma 1.2.2 garantiert $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(\lim_{n\to\infty} E_n)$, also $\mu(P) = 0$.

2. Es sei $\int_A f\, d\mu = 0$ über jeder meßbaren Menge $A$. Aufgrund des unter 1 Gesagten gilt offenbar sowohl $\mu\big(\{x : f(x) > 0\}\big) = 0$ als auch $\mu\big(\{x : f(x) < 0\}\big) = 0$, so daß f. ü. $f(x) = 0$ ist. □

## 1.9 Konvergenz von Folgen integrabler Funktionen

**Satz 1.9.1** *Jede gegen eine meßbare Funktion $f$ $\mu$-stochastisch konvergente Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von integrablen Funktionen über $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, für die es eine integrable Funktion $\varphi$ gibt mit $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ f. ü., ist Cauchy-Folge im Mittel.*

*Beweis* Gemäß Lemma 1.8.10 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Überdeckung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{k;n}$ der meßbaren Menge $\{x : f_n(x) \ne 0\}$ mit $\mu(A_{k;n}) < \infty$. Da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist, existiert auch eine abzählbare Überdeckung der Menge $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x : f_n(x) \ne 0\}$ dieser Art:

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : f_n(x) \ne 0\} = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} A_\ell \quad \text{mit } \mu(A_\ell) < \infty\ \forall\, \ell \in \mathbb{N}.$$

O. E. d. A. kann man voraussetzen, daß die $A_\ell$ als monoton ansteigende Mengenfolge angeordnet sind: $A_\ell \subseteq A_{\ell+1}$. Da offenbar $\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \gamma\} \subset \{x : |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \ge \gamma\}$ für jedes $\gamma > 0$ ist, folgt aus der $\mu$-stochastischen Konvergenz von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Eigenschaft

$$\mu(S_{n,m}(\gamma)) \to 0 \quad \text{für } n, m \to \infty, \tag{1.27}$$

worin $S_{n,m}(\gamma) = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \gamma\}$ ist (die Meßbarkeit der entsprechenden Mengen wird durch Korollar 1.5.2 und Satz 1.5.3 garantiert). Setzt man daher $K_{n,m}(\ell;\gamma) = A_\ell \setminus S_{n,m}(\gamma)$ und $G_{n,m}(\ell;\gamma) = A_\ell \cap S_{n,m}(\gamma)$, so erhält man unter Beachtung von (1.27)

$$\begin{aligned}
\int_{A_\ell} |f_n - f_m|\, d\mu &= \int_{K_{n,m}(\ell;\gamma)} |f_n - f_m|\, d\mu + \int_{G_{n,m}(\ell;\gamma)} |f_n - f_m|\, d\mu \\
&\le \gamma\, \mu(A_\ell) + \int_{S_{n,m}(\gamma)} |f_n - f_m|\, d\mu \le \gamma\, \mu(A_\ell) + \beta
\end{aligned}$$

für genügend große $n, m$ und beliebiges $\beta > 0$, da nach Lemma 1.8.7 die Mengenfunktion $\nu_{|f_n - f_m|} : \mathcal{A}_\sigma \to \mathbb{R}$ mit $\nu_{|f_n - f_m|}(A) = \int_A |f_n - f_m|\, d\mu$ absolut stetig ist. Hierbei sind sowohl $\beta$ als auch $\gamma$ unabhängig von $\mu(A_\ell)$. Es sei $E_\ell = U \setminus A_\ell$; dann gilt $E_\ell \supseteq E_{\ell+1}$ für jedes $\ell$, und es ist $\lim_{\ell\to\infty} E_\ell = \emptyset$. Die Abbildung $\nu_\varphi : \mathcal{A}_\sigma \to \mathbb{R}$, definiert durch $\nu_\varphi(A) = \int_A \varphi\, d\mu$, ist wegen $\varphi(x) \geq 0$ ein Maß über $[X, \mathcal{A}]$, für das $\nu_\varphi(U) < \infty$ gilt. Lemma 1.2.3 garantiert daher $\lim_{\ell\to\infty} \nu_\varphi(E_\ell) = \nu_\varphi\big(\lim_{\ell\to\infty} E_\ell\big) = 0$ (Eigenschaft M4). Dies impliziert, daß es zu beliebigem $\alpha > 0$ stets ein $\ell_0 = \ell_0(\alpha)$ derart gibt, daß

$$\int_{E_\ell} |f_n - f_m|\, d\mu \leq \int_{E_\ell} (|f_n| + |f_m|)\, d\mu \leq 2 \int_{E_\ell} \varphi\, d\mu < \alpha$$

für alle $\ell \geq \ell_0(\alpha)$. Für das Integral über für $U = \big(U \cap A_\ell\big) \cup \big(U \setminus A_\ell\big)$ gilt daher

$$\int_U |f_n - f_m|\, d\mu \leq \alpha + \beta + \gamma\, \mu(A_\ell),$$

sofern nur $n, m, \ell$ genügend groß sind. $\beta$ und $\gamma$ hängen nicht von $\ell$ ab. $\alpha$ ist beliebig klein wählbar, da stets ein geeignetes $\ell_0$ auffindbar ist. Wählt man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ den Index $\ell_0$ so groß, daß $\alpha < \varepsilon/3$ wird, und $n, m$ so groß, daß $\gamma < \varepsilon/\big(3\, \mu(A_{\ell_0}\big)$ sowie $\beta < \varepsilon/3$ wird, so erhält man $\overline{\lim}_{n,m\to\infty} \int_U |f_n - f_m|\, d\mu < \varepsilon$, woraus schließlich die Cauchy-Folgen-Eigenschaft im Mittel

$$\lim_{n,m\to\infty} \int |f_n - f_m|\, d\mu = 0$$

folgt, da das Integral über $\{x : |f_n(x) - f_m(x)| = 0\}$ für $n, m \to \infty$ verschwindet. □

**Lemma 1.9.2** *Jede nicht negative meßbare Funktion $f$, die fast überall von einer integrablen Funktion $\varphi$ majorisiert wird, ist selbst integrabel.*

*Beweis* Laut Voraussetzung hat man $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$. Nach Satz 1.7.1 gibt es eine gegen die meßbare Funktion $f$ konvergierende und monoton nicht abnehmende Folge einfacher Funktionen $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$ für $f(x) \in E_k(n)$ $(0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1)$, sowie $s_n(x) = n$ für $f(x) \in E_\infty(n)$, wobei

$$E_k(n) = \left\{x \in X : f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}, \quad E_\infty(n) = \{x \in X : f(x) > n\}$$

ist. Aus $f(x) \leq \varphi(x)$ folgt $E_k(x) \subseteq \{x : \varphi(x) \geq \frac{k}{2^n}\}$ und $E_\infty(x) \subseteq \{x : \varphi(x) \geq n\}$, und die Integrabilität von $\varphi$ impliziert gemäß Lemma 1.8.8 $\mu\big(E_k(n)\big) < \infty$ $(0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1)$ und $\mu\big(E_\infty(n)\big) < \infty$; daher sind die einfachen Funktionen $s_n$ integrabel. Es sei $A_n(\varepsilon) = \{x : |s_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Aus $s_m(x) \geq s_n(x)$ für $m > n$ folgt $A_{n+1}(\varepsilon) \subseteq A_n(\varepsilon)$, so daß $\lim_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)$ existiert. Wegen $\bigcap_n A_n(\varepsilon) = \emptyset$ ist $\mu\big(\bigcap_n A_n(\varepsilon)\big) = 0$ und daher $\mu\big(\lim_{n\to\infty} A_n(\varepsilon)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(A_n(\varepsilon)\big) = 0$ (vergl. Ausdruck (1.1) im Beweis des

Lemmas 1.2.3), d. h. die Folge $\{s_n - f\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\mu$-stochastisch gegen Null. Nach Satz 1.9.1 bilden daher die $s_n$ eine Cauchy-Folge im Mittel, und somit ist $f$ integrabel mit $\lim_{n\to\infty}\int s_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ und $\lim_{n\to\infty}\int |s_n - f|\,d\mu = 0$. □

Da für jede fast überall gegen $f$ konvergierende Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ auch $|f|(x) \le \varphi(x)$ f. ü. folgt, liefert Lemma 1.9.2, bezogen auf $|f|$, die folgende weitertragende Aussage.

**Korollar 1.9.3** *Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrabler Funktionen, die f. ü. gegen eine meßbare Funktion $f$ konvergiert und die von der integrablen Funktion $\varphi$ f. ü. absolut majorisiert wird, d. h. $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ f. ü.; dann ist $f$ integrabel.*

**Lemma 1.9.4** *Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, so gibt es stets eine f. ü. reellwertige meßbare Funktion $\varphi$, gegen die eine Teilfolge $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ $\mu$-stochastisch konvergiert. Konvergiert andererseits $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ im Mittel gegen $\varphi$, so konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch im Maße gegen $\varphi$.*

*Beweis* Mit

$$E_{n,m}(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\}, \quad F_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - \varphi(x)| \ge \varepsilon\}$$

hat man gemäß Lemma 1.8.8 $\mu(E_{n,m}(\varepsilon)) < \infty$ und $\mu(F_n(\varepsilon)) < \infty$, so daß sowohl $\int_{E_{n,m}(\varepsilon)} |f_n - f_m|\,d\mu \ge \varepsilon\,\mu\big(E_{n,m}(\varepsilon)\big)$ als auch $\int_{F_n(\varepsilon)} |f_n - \varphi|\,d\mu \ge \varepsilon\,\mu\big(F_n(\varepsilon)\big)$ für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ folgt. Ist nun $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, so strebt das Integral über $E_{n,m}(\varepsilon)$ – und damit auch $\mu\big(E_{n,m}(\varepsilon)\big)$ – für $n, m \to \infty$ gegen Null, und die Folge erweist sich als $\mu$-stochastische Cauchy-Folge, so daß Korollar 1.7.5 zu Satz 1.7.4 greift.

Konvergiert andererseits $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ im Mittel gegen $\varphi$, so strebt entsprechend das Integral über $F_n(\varepsilon)$ für $n \to \infty$ gegen Null, was offensichtlich die Konvergenz im Maße von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bedeutet. □

**Satz 1.9.5** *Eine Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ integrabler Funktionen konvergiert d. u. n. d. im Mittel gegen eine integrable Funktion $f$, wenn sie Cauchy-Folge im Mittel ist. Eine solche Folge konvergiert auch im Maße gegen $f$.*

*Beweis* 1. Konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ im Mittel gegen die integrable Funktion $f$, so gilt

$$\lim_{n,m\to\infty} \int |f_n - f_m|\,d\mu \le \lim_{n,m\to\infty} \left( \int |f_n - f|\,d\mu + \int |f - f_m|\,d\mu \right) = 0,$$

d. h. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im Mittel.

2. Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, so enthält $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 1.9.4 eine gegen eine meßbare Funktion $f$ $\mu$-stochastisch konvergente Teilfolge $\{f_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$. Zu jedem $n_\ell$ gibt es eine Folge $\{s_k^{(n_\ell)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ einfacher integrabler Funktionen, die Cauchy-Folge im

Mittel ist und gegen $f_{n_\ell}$ im Mittel konvergiert: $\lim_{k\to\infty} \int |s_k^{(n_\ell)} - f_{n_\ell}|\, d\mu = 0$ (vergl. Bemerkung 1.8.1). Nach Lemma 1.9.4 konvergiert die Folge $s_k^{(n_\ell)}$ dann auch im Maße gegen $f_{n_\ell}$, d. h. $\lim_{k\to\infty} \mu\big(\{x : |s_k^{(n_\ell)}(x) - f_{n_\ell}(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0$. Insbesondere kann stets zu $n_\ell$ ein Index $k_0(n_\ell, \varepsilon)$ derart gefunden werden, daß die einfache Funktion $e_\ell = s_{k_0(n_\ell,\varepsilon)}^{(n_\ell)}$ die Abschätzung

$$\int |e_\ell - f_{n_\ell}|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{n_\ell}$$

erlaubt. Wir setzen $C_{n_\ell}(\varepsilon) = \{x : |e_\ell(x) - f_{n_\ell}(x)| \geq \varepsilon/2 > 0\}$; wegen $\mu\big(C_{n_\ell}(\varepsilon)\big) < \infty$ (Lemma 1.8.8) hat man dann

$$\frac{\varepsilon}{2}\, \mu\big(C_{n_\ell}(\varepsilon)\big) \leq \int_{C_{n_\ell}(\varepsilon)} |e_\ell - f_{n_\ell}|\, d\mu \leq \int |e_\ell - f_{n_\ell}|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2n_\ell},$$

also $\lim_{\ell\to\infty} \mu\big(C_{n_\ell}(\varepsilon)\big) = 0$. Da mit $A_\ell(\varepsilon) = \{x : |e_\ell(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ und $B_{n_\ell}(\varepsilon) = \{x : |f_{n_\ell}(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}$ offensichtlich die Inklusion

$$A_\ell(\varepsilon) \subseteq B_{n_\ell}(\varepsilon) \cup C_{n_\ell}(\varepsilon)$$

besteht, bedeutet die $\mu$-stochastische Konvergenz von $\{f_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ gegen $f$

$$\lim_{\ell\to\infty} \mu\big(A_\ell(\varepsilon)\big) = \lim_{\ell\to\infty} \mu\big(\{x : |e_\ell(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

Aus $|e_\ell - e_k| \leq |e_\ell - f_{n_\ell}| + |f_{n_\ell} - f_{n_k}| + |f_{n_k} - e_k|$ liest man außerdem ab, daß $\{e_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel ist; also ist $f$ integrabel mit $\lim_{\ell\to\infty} \int e_\ell\, d\mu = \int f\, d\mu$ und $\lim_{\ell\to\infty} \int |e_\ell - f|\, d\mu = 0$. Mit $\int |f_{n_\ell} - f|\, d\mu \leq \int |f_{n_\ell} - e_\ell|\, d\mu + \int |e_\ell - f|\, d\mu$ folgt daher die Konvergenz im Mittel der Teilfolge $\{f_{n_\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ gegen $f$, die (aufgrund der Cauchy-Folgen-Eigenschaft im Mittel) diejenige von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f$ nach sich zieht: $\int |f_n - f|\, d\mu \leq \int |f_n - f_{n_\ell}|\, d\mu + \int |f_{n_\ell} - f|\, d\mu \to_{n,\ell\to\infty} 0$. Nach Lemma 1.9.4 konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch im Maße gegen $f$. □

Der nachfolgend genannte Satz über die Konvergenz majorisierter Folgen ist im Englischen als „Lebesgue's bounded convergence theorem" bekannt und stellt das zentrale Ergebnis dieses Abschnittes dar (vergl. auch [63, 68] und die klassischen Darlegungen in Natansons „Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen" [124]). Der Satz ist mit Hilfe der vorbereitenden Sätze 1.9.1 (s. Korollar 1.9.3) und 1.9.5 relativ einfach beweisbar.

**Satz 1.9.6** (Satz von der majorisierten Konvergenz[35]) *Ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrabler Funktionen über dem Maßraum $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$, die fast überall oder im Maß gegen die meßbare*

[35] Man spricht auch vom „Satz von der beschränkten Konvergenz", engl. „the bounded convergence theorem".

*Funktion $f$ konvergiert, und werden alle $f_n$ in der Form*

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

*von einer integrablen Funktion $\varphi$ majorisiert, so ist $f$ integrabel und erfüllt die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

*Beweis* 1. Es konvergiere $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mu$-stochastisch gegen $f$. Nach Satz 1.9.1 ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge im Mittel, und nach Satz 1.9.5 gibt es eine integrable Funktion $g$ mit $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - g| \, d\mu = 0$, gegen die $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls $\mu$-stochastisch konvergiert. Demnach gilt $g(x) = f(x)$ fast überall (vergl. Text im Anschluß an Definition 1.7.2, Abschn. 1.7), und $f$ ist integrabel (Bemerkung 1.8.2, Abschn. 1.8). Daraus resultiert $\int |f - g| \, d\mu = 0$ sowie $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - g(x)| + |g(x) - f(x)|$ für fast alle $x \in X$, so daß auch $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ folgt.

2. Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere fast überall gegen $f$. Nach Korollar 1.9.3 ist dann $f$ integrabel. Es sei $A_{n_\nu}(\varepsilon) = \{x : |f_{n_\nu}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ für eine Teilfolge $\{f_{n_\nu}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, die so gewählt sei, daß $|f_{n_{\nu+1}}(x) - f(x)| \leq |f_{n_\nu}(x) - f(x)| \; \forall \, \nu \in \mathbb{N}$ ist. Damit wird $A_{n_\nu}(\varepsilon)$ zu einer monoton nicht zunehmenden Mengenfolge mit $\bigcap_\nu A_{n_\nu}(\varepsilon) = \emptyset$, so daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \mu\big(A_{n_\nu}(\varepsilon)\big) = \mu\big(\lim_{\nu\to\infty} A_{n_\nu}(\varepsilon)\big) = 0$$

folgt (vergl. Ausdruck (1.1), Abschn. 1.2). Die ausgewählte Teilfolge konvergiert also $\mu$-stochastisch gegen $f$, und wie im Teil 1 des Beweises ist zu schließen, daß sie auch im Mittel gegen $f$ konvergiert. Die $\mu$-stochastische Konvergenz impliziert, daß $f$ fast überall reellwertig ist. Wir setzen $N = M_1 \cup M_2$ mit $M_1 = \{x : |f(x)| = \infty\}$, $M_2 = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$. Für alle $x \in X \setminus N$ und jedes $f_{n_k}(x)$ gilt dann

$$\lim_{\nu,m\to\infty} |f_{n_\nu}(x) - f_m(x)| \leq \lim_{\nu\to\infty} |f_{n_\nu}(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)| + \lim_{m\to\infty} |f(x) - f_m(x)|,$$

so daß die Relationen $\lim_{\nu,m\to\infty} |f_{n_\nu}(x) - f_m(x)| \leq \lim_{k,\nu\to\infty} |f_{n_\nu}(x) - f_{n_k}(x)|$ und $\lim_{\nu,m\to\infty} \int |f_{n_\nu} - f_m| \, d\mu \leq \lim_{k,\nu\to\infty} \int |f_{n_\nu} - f_{n_k}| \, d\mu = 0$ folgen. Letzteres impliziert

$$\lim_{n,m\to\infty} \int |f_n - f_m| \, d\mu \leq \lim_{n,\nu\to\infty} \int |f_n - f_{n_\nu}| \, d\mu + \lim_{\nu,m\to\infty} \int |f_{n_\nu} - f_m| \, d\mu = 0,$$

d. h. auch $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ selbst ist Cauchy-Folge im Mittel. Gemäß Teil 1 des Beweises gilt daher die Behauptung. □

Wegen $\int (f - f_n) \, d\mu \leq \int |f - f_n| \, d\mu$ besteht unter den Voraussetzungen des Satzes 1.9.6 (jedoch nicht generell) die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$. Die folgende diesbezügliche Aussage geht auf B. Levi und H.L. Lebesgue zurück, zitiert zuweilen als „Lebesgues' Satz von der monotonen Konvergenz" (vergl. [10, 63, 68, 124]).

**Satz 1.9.7** (Satz von der monotonen Konvergenz) *Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton nicht abnehmende Folge nicht negativer integrabler erweitert-reellwertiger Funktionen, und es sei $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dann gilt*[36]

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

*Beweis* Ist $\lim_{n\to\infty} f_n$ integrabel, so folgt $\int f_k \, d\mu \le \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \le \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Falls $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ nicht integrabel (wegen $f(x) \ge 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ also quasiintegrabel) ist, wird der Integralwert auf der rechten Seite zu $\infty$ festgelegt (vergl. Text im Anschluß an Definition 1.8.2). Im Falle $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \infty$ ist die Satzaussage also trivialerweise richtig. Nachfolgend wird der Fall $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$ betrachtet. Die Monotonie von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_{n+k} - f_n| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_{n+k} \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0,$$

d. h. die $f_n$ bilden eine Cauchy-Folge im Mittel (CFM), die nach Satz 1.9.5 im Mittel und im Maße gegen eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte integrable Funktion $\varphi$ konvergiert. Da die CFM-Eigenschaft bedeutet, daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\mu$-stochastische Cauchy-Folge ist (vergl. etwa Beweis zu Lemma 1.9.4), kann Satz 1.7.4 herangezogen werden, der die fast gleichmäßige Konvergenz gegen $\varphi$ konstatiert; aus dieser wiederum folgt die Konvergenz fast überall. Somit ist $f = \varphi$ f. ü., und wegen $f_n \le \varphi$ liefert Satz 1.9.6 $\int f \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0$. □

**Korollar 1.9.8** *Es sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrabler Funktionen mit der Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$; dann gilt: Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert gegen eine integrable Funktion $f$, und es ist $\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$.*

*Beweis* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n^+(x) = \max\{0, f_n(x)\}$, $f_n^- = \max\{0, -f_n(x)\}$. Mit $g_j^+ = \sum_{n=1}^{j} f_n^+$ erhält man eine monoton nicht abnehmende Folge nicht negativer integrabler Funktionen, für die Satz 1.9.7 $\int \lim_{j\to\infty} g_j^+ \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j^+ d\mu$ liefert, also $\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ \, d\mu$. Die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < \infty$ bedeutet daher $\lim_{j\to\infty} \int g_j^+ \, d\mu < \infty$, und die $g_j^+$ bilden eine Cauchy-Folge im Mittel, die gegen eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte integrable Funktion $g^+$ im Mittel und im Maße konvergiert (vergl. Beweis des vorigen Satzes). Demnach hat man $\lim_{j\to\infty} \left| \int (g_j^+ - g^+) \, d\mu \right| = \lim_{j\to\infty} \int \left| g_j^+ - g^+ \right| d\mu = 0$, also $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^+ \, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int g_j^+ \, d\mu = \int g^+ \, d\mu$.

[36] Wegen $\{x : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \le \eta\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) \le \eta\}$ und $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ für die aufsteigende Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n$ meßbar (vergl. Satz 1.5.3).

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+ = f$; dann folgt $\int_A f_n^+ \, d\mu = \int_A g^+ \, d\mu$ für jedes $A \in \mathcal{A}$, so daß f. ü. $f^+ = g^+$ gilt (Satz 1.8.11). Entsprechendes ist für die Funktionen $f_n^-$ zu konstatieren, mit denen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^- = f^-$ definiert sei. Die integrable Funktion $f = f^+ - f^-$ erfüllt $\sum_{n=1}^{\infty} \int (f_n^+ - f_n^-) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$. □

**Lemma 1.9.9** (Fatous Lemma) *Für jede Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer integrabler erweitert-reellwertiger Funktionen gilt*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

*Beweis* Im Falle $\varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \infty$ ist die Aussage trivial, daher kann o. E.d. A. $\varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$ vorausgesetzt werden. Es sei $\tilde{f}_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)$; dann ist $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton nicht abnehmende Folge nicht negativer – und gemäß Lemma 1.9.2 integrabler – Funktionen, die gegen $\varliminf_{n\to\infty} f_n =: \varphi$ konvergiert und wegen $\tilde{f}_n \le f_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n \, d\mu \le \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ erfüllt. Aufgrund des Satzes 1.9.7 von der monotonen Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int \tilde{f}_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n \, d\mu,$$

wegen $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n$ also die Behauptung. □

**Konkretisierungen** Anwendungen der Sätze 1.9.6 und 1.9.7 bzw. des Lemmas 1.9.9 von Fatou und des Korollars 1.9.8 finden sich insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir geben nachfolgend einige dort benötigte Resultate an. Zuvor jedoch – im Vorgriff auf die Ausführungen in Kap. 2 – verweisen wir auf die unterschiedlichen Arten der Konvergenz von Folgen meßbarer Abbildungen über einem Maßraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$, dessen Maß vollständig und total endlich mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ist (Wahrscheinlichkeitsraum).

### Typen der Konvergenz in Wahrscheinlichkeitsräumen

- Es seien $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbare Funktionen über $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$, bezeichnet als *reellwertige Zufallsvariable*. $L$ sei die Menge aller Punkte $\omega \in \Omega$, in denen die Folge $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einen endlichen Grenzwert erreicht:

$$L = \Big\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega),\ |\xi(\omega)| < \infty\Big\}.$$

  Ist $\mathbb{P}(L) = 1$, d. h. konvergiert $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ f. ü. gegen einen endlichen Wert, so heißt $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-**fast sicher konvergent** oder **konvergent mit Wahrscheinlichkeit 1**, geschrieben $\xi_n \to_{\mathbb{P}\text{-f. s.}} \xi$, d. h.

$$\xi_n \to_{\mathbb{P}\text{-f. s.}} \xi \iff \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi < \infty\Big) = 1. \tag{1.28}$$

- Existiert zu der Folge $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zufallsvariable $\xi$ derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$, so heißt $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **$\mathbb{P}$-stochastisch konvergent** oder **konvergent in Wahrscheinlichkeit**, geschrieben $\xi_n \to_{\text{i. W.}} \xi$, d. h.

$$\xi_n \to_{\text{i. W.}} \xi \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0 \ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{1.29}$$

- Eine Folge $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit endlichen Erwartungswerten $\mathbb{E}[\xi_n^p]$ (endlichen $p$-ten Momenten, s. Abschn. 2.13) für $1 \leq p < \infty$ heißt **im $p$-ten Mittel konvergent** oder auch **$\mathcal{L}^p$-konvergent**, wenn es eine Zufallsvariable $\xi$ derart gibt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[|\xi_n - \xi|^p\big] = 0 \quad \forall\, p \in [1, \infty) \tag{1.30}$$

  gilt.
- Es seien $F_{\xi_n}$ die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen $\xi_n$ (s. Kap. 2). Gibt es eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_\xi$ derart, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$, in dem $F_\xi$ stetig ist, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ existiert, so heißt $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent in der Verteilung** oder auch **schwach konvergent** gegen eine Zufallsvariable $\xi$, in Zeichen $\xi_n \to_{\text{i. V.}} \xi$ oder $\xi_n \to_{\text{w}} \xi$:

$$\xi_n \to_{\text{i. V.}} \xi \iff \lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x). \tag{1.31}$$

  Der Leser möge zum Vergleich die Definitionen in Abschn. 2.8 des Kap. 2 sowie die Zusammenfassung in Abschn. 2.8 heranziehen.

**Anwendungsbeispiele**

1. Die Aussage des Satzes 1.9.6 für unendliche Summen: Es sei $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge stetiger Funktionen in $x$, so daß für $x_n \to x$ stets auch gilt $f_k(x_n) \to f_k(x)$. Man definiere $f_{k;n}(x) := f_k(x + \frac{1}{n})$; ist dann $|f_{k;n}(x)| \leq \varphi_k$ mit $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \varphi_k < \infty$, so besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} |f_k(x) - f_{k;n}(x)| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_{k;n}(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k(x).$$

   Entsprechendes gilt für $g_{k;n}(x) = f_k(x - \frac{1}{n}) \to_{n\to\infty} f_k(x)$. Grenzübergang und Summenoperation sind also vertauschbar, und die Summe $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} f_k(x)$ ist eine stetige Funktion in $x$.
2. $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen über dem Maßraum $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ mit $\mathbb{E}\big[\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|\big] < \infty$. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$f_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad f = \sum_{k=1}^\infty \xi_k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|$$

besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty}\int |f - f_n|\, d\mathbb{P} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mathbb{P} = \int \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mathbb{P}$$

(da alle $f_n$ von $\varphi$ majorisiert werden und $\int \varphi\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}\big[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|\big] < \infty$ ist). Mit

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\, d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\xi_k] = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[\xi_k]$$

hat man also

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}[\xi_k] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right]$$

(s. Korollar 1.9.8). Insbesondere ist Folgendes zu konstatieren: Sind $\xi_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, nicht negative Zufallsvariablen, und existiert der Erwartungswert der Summe $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$, so gleicht dieser Erwartungswert der Summe der Einzel-Erwartungswerte.

3. Es sei $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Familie von – durch eine nicht negative Zufallsvariable $\varphi$ mit $\mathbb{E}[\varphi] < \infty$ absolut beschränkten – Zufallsvariablen mit der Eigenschaft $\mathbb{P}$-fast sicherer Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n(\omega) = \xi(\omega) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega.$$

Dann garantiert der Satz von der majorisierten Konvergenz die Gültigkeit der Gleichung

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi].$$

4. Die Folge $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ von Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen $F_{\xi_n}$ konvergiere *stochastisch zunehmend* schwach gegen eine Verteilung $F_\xi$. Stochastisch zunehmend für die Folge der *Zufallsvariablen* bedeutet, daß die Folge $\{F_{\xi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ der *Verteilungen* nicht zunehmend in $n$ ist, so daß andererseits die Folge $\{1 - F_{\xi_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht abnehmend ist. Dann besagt der Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty}\int \big(1 - F_{\xi_n}(t)\big)dt = \int \lim_{n\to\infty}\big(1 - F_{\xi_n}(t)\big)dt = \int \big(1 - F_\xi(t)\big)dt,$$

und die Integration von 0 bis $\infty$ bedeutet $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}[\xi]$.

## 1.10 Der Satz von Radon-Nikodym

Wir haben gesehen, daß jeder erweitert-reellwertigen Funktion $f$ mit der Eigenschaft, daß nicht gleichzeitig $\int f^+\, d\mu$ und $\int f^-\, d\mu$ den Wert unendlich annehmen, nach Definition 1.8.4 ein Integralwert $\int f\, d\mu$ zukommt. Die Mengen $\{x : f(x) \geq 0\} = P$ und $\{x :$

$f(x) \leq 0\} = N$ formen offenbar eine Jordan-Zerlegung des Raumes $X$ bzgl. des signierten Maßes $\nu_f : [X, \mathcal{A}_\sigma, \mu] \to \bar{\mathbb{R}}$, das durch $\nu_f(A) = \int_A f\, d\mu$ definiert wird, denn

$$\nu_f(A) = \int_A f^+\, d\mu - \int_A f^-\, d\mu = \nu_{f^+}(A) - \nu_{f^-}(A) \tag{1.32}$$

impliziert $\nu_f(A \cap P) \geq 0$ und $\nu_f(A \cap N) \leq 0 \ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma$. Gleichung (1.32) definiert daher die Jordan-Hahn-Zerlegung des signierten Maßes $\nu_f$ (vergl. Satz 1.2.5). Die Frage nach der Integrierbarkeit kann man also auch so beantworten: Eine meßbare erweitert-reellwertige Funktion $f$ besitzt d. u. n. d. einen Integralwert, wenn die Maß-Summe $\nu_{f^+}(X) + \nu_{f^-}(X) < \infty$ ist. In diesem Falle repräsentiert $\nu_{f^+}(X) + \nu_{f^-}(X)$ die absolute Variation $|\nu_f|$ eines signierten Maßes $\nu_f$ mit $\nu_f(A) = \nu_{f^+}(A) - \nu_{f^-}(A)$. Man bezeichnet $f$ als **Dichte des signierten Maßes $\nu$ bezüglich des Maßes $\mu$** oder auch als **Ableitung von $\nu$ nach $\mu$**. Die umgekehrte Frage, nämlich wann ein signiertes Maß eine derartige Dichte bzw. Ableitung besitzt, wird mit dem Satz von J. Radon und O.M. Nikodym beantwortet. Zur Vorbereitung des Beweises betrachten wir zunächst den speziellen Fall total endlicher Maße.

**Hilfssatz 1.10.1** (Radon-Nikodym) *Es seien $\mu$ und $\nu$ total endliche Maße über der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_\sigma$, und $\nu$ sei absolut stetig bzgl. $\mu$ ($\nu \ll \mu$); dann gibt es eine $\mu$-fast überall eindeutig bestimmte $\mu$-meßbare Funktion $f$ derart, daß*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \quad \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma. \tag{1.33}$$

*Beweis* Es sei $\mathcal{H}$ die Menge alle $\mu$-integrablen nicht negativen Funktionen, für die in obiger Beziehung nur das „≥“-Zeichen gilt:

$$\mathcal{H} = \left\{ h : X \to \bar{\mathbb{R}} : h \geq 0,\ h \text{ integrabel},\ \nu(A) \geq \int_A h\, d\mu \ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma \right\}.$$

$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ sei eine Folge von Funktionen, deren Integrale gegen das Supremum $\sup_{h\in\mathcal{H}} \int h\, d\mu$ konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n\, d\mu = \sup_{h\in\mathcal{H}} \int h\, d\mu.$$

Die gesuchte $\mu$-meßbare Funktion $f$ konstruieren wir mittels der Folge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n(x).$$

Zu zeigen ist die Integrabilität von $f$ sowie das Bestehen der Gleichung (1.33). Sei

$$g_n(x) = \max\{h_1(x), \ldots, h_n(x)\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist in $\mathcal{H}$ enthalten, denn zu jedem $A \in \mathcal{A}_\sigma$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ kann eine Partition $\{E_1^{(n)}, \ldots, E_n^{(n)}\}$ von $A$ gefunden werden, so daß $g_n(x) = h_j(x)$ für $x \in E_j^{(n)}$ ist. Man setze nämlich

$$\begin{aligned}
E_1^{(n)} &= \big\{x \in A : h_1(x) \geq h_i(x),\ i = 2, \ldots, n\big\}, \\
E_2^{(n)} &= \big\{x \in A : h_2(x) \geq h_i(x),\ i = 3, \ldots, n\big\} \setminus E_1, \\
&\ \ \vdots \\
E_{n-1}^{(n)} &= \big\{x \in A : h_{n-1}(x) \geq h_n(x)\big\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-2} E_i, \\
E_n^{(n)} &= A \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i = \big\{x : h_n(x) > h_j(x)\ \forall\, j \leq n-1\big\},
\end{aligned}$$

so daß ein Punkt $x \in A$ d. u. n. d. zu einer Menge $E_j^{(n)}$ gehört, wenn $h_j(x) \geq h_i(x)\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Wegen $A = \bigcup_{i=1}^n E_i^{(n)}$ mit $E_i^{(n)} \cap E_j^{(n)} = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt $g_n(x) = h_j(x)$ für $x \in E_j^{(n)}$. Insbesondere ist $g_n \in \mathcal{H}$, da

$$\int_A g_n\, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} g_n\, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} h_j\, d\mu \leq \sum_{j=1}^n \int_{E_j^{(n)}} \nu(E_j^{(n)}) = \nu(A) < \infty.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\big(\max\{h_1(x), \ldots, h_n(x)\}\big) = \sup_n h_n(x) = f(x)$ liefert der Satz 1.9.7 von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu \leq \nu(A) < \infty \quad \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma,$$

d. h. $f \in \mathcal{H}$ mit $\int f\, d\mu = \sup_n \int h_n\, d\mu$. Um $\int_A f\, d\mu = \nu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ nachzuweisen, betrachte man das Maß $\theta : \mathcal{A}_\sigma \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $\theta(A) = \nu(A) - \int_A f\, d\mu$. Zu zeigen ist $\theta(A) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$. Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ betrachte man das signierte Maß $\nu_k = \theta - \frac{1}{k}\mu$, bezüglich dessen die meßbaren Mengen $P_k$ und $N_k$ eine Hahn-Zerlegung bilden: $P_k \cup N_k = X$, $P_k \cap N_k = \emptyset$, $\nu_k(A \cap P_k) \geq 0$, $\nu_k(A \cap N_k) \leq 0$ für $A \in \mathcal{A}_\sigma$. Die beiden meßbaren Mengen $P = \bigcup_{k=1}^\infty P_k$ und $N = \bigcap_{k=1}^\infty N_k$ bilden dann – wie leicht nachzuprüfen – ebenfalls eine Partition von $X$: $X = P \cup N$, $P \cap N = \emptyset$. Für jeden Index $\ell$ erhält man $0 \leq \theta(N) = \nu_\ell(N) + \frac{1}{\ell}\mu(N) \leq \frac{1}{\ell}\mu(N)$, woraus vermöge $\ell \to \infty$ auf $\theta(N) = 0$ zu schließen ist. Laut Vor. ist $\nu \ll \mu$ und daher auch $\theta \ll \mu$ (Lemma 1.8.7), so daß die Annahme, $\theta(P)$ sei größer Null, zu $\mu(P) > 0$ führen würde. $\mu(P) > 0$ impliziert $\mu(P_k) > 0$ für mindestens ein $k$. Wir zeigen, daß dies im Widerspruch zur Supremumseigenschaft des Integrals $\int f\, d\mu$

stände. Man betrachte die Funktion $\psi = f + (1/k)\,1_{P_k}$, deren Integral im Falle $\mu(P_k) > 0$ offensichtlich größer als $\int f\,d\mu$ ist (d. h. $\psi$ kann nicht in $\mathcal{H}$ enthalten sein). $\psi$ erfüllt

$$\int_A \psi\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \frac{1}{k}\,\mu(A \cap P_k) = \int_{A \setminus P_k} f\,d\mu + \int_{A \cap P_k} f\,d\mu + \frac{1}{k}\,\mu(A \cap P_k).$$

Aus $\nu_k(A) + \frac{1}{k}\mu(A) = \theta(A) = \nu(A) - \int_A f\,d\mu$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ und $\nu_k(A \cap P_k) \geq 0$ folgt die Ungleichung $\frac{1}{k}\,\mu(A \cap P_k) \leq \nu(A \cap P_k) - \int_{A \cap P_k} f\,d\mu$, mit der

$$\begin{aligned}\int_A \psi\,d\mu &= \int_{A \setminus P_k} f\,d\mu + \int_{A \cap P_k} f\,d\mu + \frac{1}{k}\,\mu(A \cap P_k)\\ &\leq \int_{A \setminus P_k} f\,d\mu + \nu(A \cap P_k) \leq \nu(A \setminus P_k) + \nu(A \cap P_k) = \nu(A),\end{aligned}$$

wird, was $\psi \in \mathcal{H}$ impliziert. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\mu(P) > 0$ und daher auch $\theta(P) > 0$ nicht möglich ist, so daß $\theta(A) = \nu(A) - \int_A f\,d\mu = 0\ \forall\, A \in \mathcal{A}_\sigma$ folgt. □

**Satz 1.10.1** (Radon-Nikodym) *Es sei $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum, und $\nu$ bezeichne ein $\sigma$-endliches signiertes Maß über $\mathcal{A}_\sigma$. Ist $\nu$ absolut stetig bzgl. $\mu$, so gibt es eine meßbare erweitert-reellwertige Funktion $f : [X, \mathcal{A}_\sigma] \to [\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})]$, die für jede meßbare Menge $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $|\nu|(A) < \infty$ den Integralwert $\nu(A)$ besitzt:*

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu.$$

*Beweis* Aufgrund der $\sigma$-Endlichkeit von $\mu$ und $|\nu|$ gibt es eine abzählbare Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $X$ mit wechselseitig disjunkten Mengen endlichen Maßes $\mu(U_i)\ \forall\, i \in \mathbb{N}$ derart, daß jede dieser Mengen $U_i$ selbst als abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen $V_{ij}$ mit $|\nu|(V_{ij}) < \infty\ \forall\, j \in \mathbb{N}$ darstellbar ist:

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad \mu(U_i) < \infty\ \forall\, i \in \mathbb{N}, \quad U_{i_1} \cap U_{i_2} = \varnothing \quad \text{für } i_1 \neq i_2,\\ U_i &= \bigcup_{j=1}^{\infty} V_{ij}, \quad |\nu|(V_{ij}) < \infty\ \forall\, j \in \mathbb{N}, \quad V_{ij_1} \cap V_{ij_2} = \varnothing \quad \text{für } j_1 \neq j_2.\end{aligned}$$

Durch geeignete Numerierung kann die Familie der $V_{ij}$ als einfach indiziert dargestellt werden[37], d. h. $\{V_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \{W_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, $X = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} W_\ell$. Es sei nun $X = P \cup N$ eine Jordan-Hahn-Zerlegung des Raumes $X$ bezüglich des signierten Maßes $\nu$, d. h. $P \cap N = \varnothing$ mit $\nu(A \cap P) \geq 0$ und $\nu(A \cap N) \leq 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ (Hahn-Zerlegung des Raumes), sowie $\nu = \nu^+ - \nu^-$ mit

$$\nu^+(A) = \nu(A \cap P), \quad \nu^-(A) = -\nu(A \cap N)$$

[37] Man setze etwa $\ell = K(i,j) - i$, falls $i + j$ = gerade, und $\ell = K(i,j) - j$, falls $i + j$ = ungerade, $K(i,j) = 1 + \frac{(i+j)^2 - (i+j)}{2}$.

(Jordan-Zerlegung von $\nu$). Wir betrachten zunächst nur $P$ und setzen $E_\ell = W_\ell \cap P$, so daß $\sum_{\ell=1}^\infty E_\ell = P$ wird. Wegen $\mu(E_\ell) < \infty$ und $\nu^+(E_\ell) < \infty$ garantiert Hilfssatz 1.10.1 zu jedem $\ell$ die Existenz einer $\mu$-fast überall eindeutig bestimmten $\mu$-integrablen Funktion $f_\ell$, mit der $\int_{A\cap E_\ell} f_\ell \, d\mu = \nu^+(A \cap E_\ell) = \nu(A \cap E_\ell)$ für jedes $A \in \mathcal{A}_\sigma$ wird. Es sei $A$ eine $\mu$-meßbare Menge mit $|\nu|(A) < \infty$; dann gilt

$$\sum_{\ell=1}^\infty \int_{A\cap E_\ell} f_\ell \, d\mu = \sum_{\ell=1}^\infty \nu^+(A\cap E_\ell) = \sum_{\ell=1}^\infty \nu(A\cap E_\ell) \le |\nu|(A) < \infty .$$

Sei $f^{(P)}(x) = f_\ell(x)$ für $x \in A \cap E_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$; dann ist zum einen $\int_{A\cap E_\ell} f^{(P)} \, d\mu = \int_{A\cap E_\ell} f_\ell \, d\mu$, und zum anderen – wegen $\int_{A\cap E_\ell} f_\ell \, d\mu = \int_{A\cap E_\ell} f_\ell^+ \, d\mu - \int_{A\cap E_\ell} f_\ell^- \, d\mu \ge 0$ – auch $\sum_{\ell=1}^\infty \int_{A\cap E_\ell} |f_\ell| \, d\mu < \infty$. Setzt man $h_\ell(x) = 1_{A\cap E_\ell}(x) \cdot f_\ell(x)$, so ist $\int_{A\cap E_\ell} f_\ell \, d\mu = \int_A h_\ell \, d\mu$, und das Korollar 1.9.8 besagt, daß es eine $\mu$-integrable Funktion $h$ gibt mit $\sum_{\ell=1}^\infty h_\ell = h$, $\int_{A\cap P} h \, d\mu = \sum_{\ell=1}^\infty \int_{A\cap P} h_\ell \, d\mu = \int_{A\cap P} f^{(P)} \, d\mu$. Da die letzte Gleichheit für jede meßbare Teilmenge in $A \cap P$ gilt, folgt $h = f^{(P)}$ fast überall in $A \cap P$ (Satz 1.8.11). Demnach ist $f^{(P)}$ integrabel über jeder meßbaren Menge $A \cap P$ mit $|\nu|(A) < \infty$, und dabei gilt $\int_{A\cap P} f^{(P)} \, d\mu = \nu^+(A \cap P) = \nu(A \cap P)$. Ist $g^{(P)}$ eine weitere Funktion über $P$ mit der Eigenschaft $\int_{A\cap P} g^{(P)} \, d\mu = \nu^+(A \cap P)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $|\nu|(A) < \infty$, so gilt dies auch für jede meßbare Teilmenge einer solchen Menge $A \cap P$, so daß $g^{(P)}(x) = f^{(P)}(x)$ $\mu$-fast überall in $A \cap P$ folgt. Dies impliziert $g^{(P)}(x) = f^{(P)}(x)$ $\mu$-fast überall in $P$ aufgrund der $\sigma$-Endlichkeit von $\nu$ .

Eine völlig analoge Überlegung führt zum Auffinden einer $\mu$-eindeutig bestimmten Funktion $f^{(N)}$, für die $\int_{A\cap N} f^{(N)} \, d\mu = \nu^-(A \cap N) = -\nu(A \cap N)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\sigma$ mit $|\nu|(A) < \infty$ gilt. Setzt man daher

$$f(x) = \begin{cases} f^{(P)}(x) & \text{für } x \in P, \\ -f^{(N)}(x) & \text{für } x \in N, \end{cases}$$

so ist $f$ eine $\mu$-eindeutig bestimmte Funktion über $X$, die über jeder meßbaren Menge $A$ mit $|\nu|(A) < \infty$ $\mu$-integrabel ist und dort

$$\int_A f \, d\mu = \int_{A\cap P} f^{(P)} \, d\mu - \int_{A\cap N} f^{(N)} \, d\mu = \nu^+(A\cap P) - \nu^-(A \cap N) = \nu(A)$$

erfüllt. Damit ist alles bewiesen. □

**Definition 1.10.1** *$[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ sei $\sigma$-endlicher Maßraum, $\nu \ll \mu$ ein $\sigma$-endliches signiertes Maß über $\mathcal{A}_\sigma$. Die $\mu$-eindeutig bestimmte meßbare Funktion $f$, für die $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ für jede meßbare Menge $A$ mit $|\nu|(A) < \infty$ gilt, heißt **Radon-Nikodym-Ableitung von ν bzgl. μ**, und man schreibt*

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad d\nu = f \, d\mu .$$

*$f$ ist die **Dichte von $\nu$ bezüglich des Maßes $\mu$.** $f$ ist d. u. n. d. integrabel, wenn $|\nu|(X) < \infty$ ist; in diesem Falle repräsentiert $\nu$ das **unbestimmte Integral von $f$ bzgl. $\mu$.***

Es läßt sich zeigen, daß der Satz 1.10.1 von Radon-Nikodym auch für signierte Maße $\mu$ gilt, sofern man das Integral einer Funktion $f$ bzgl. eines solchen signierten Maßes mit Hilfe seiner Jordan-Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ vermöge

$$\int f\,d\mu = \int f\,d\mu^+ - \int f\,d\mu^-$$

definiert [10, 63].

## 1.11 Produktmaße und der Satz von Fubini

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ seien nicht leere Mengen[38]. Die Gesamtheit aller Elemente der Form $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ mit $x_i \in X_i$ heißt **cartesisches Produkt** der $X_i$, geschrieben $\prod_{i=1}^m X_i = X_1 \times \ldots \times X_m$.

Für Teilmengen $M_i \subseteq X_i$ heißt $\mathcal{Q} = \prod_{i=1}^m M_i$ (verallgemeinerter) **Quader**[39] mit den **Seiten** $M_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. (vergl. Abschn. A.2). Sind einige der $M_i$ identisch mit der jeweiligen Gesamtmenge, also $M_i = X_i$, so spricht man auch von **Zylindermengen** (s. auch Abschn. 1.12). Ein Element von $\prod_{i=1, i\neq k}^m X_i$ kennzeichnen wir durch $\boldsymbol{x}_{-k}$, d. h.

$$\boldsymbol{x}_{-k} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1, \ldots} x_m).$$

**Definition 1.11.1** *Ist $M \subseteq \prod_{i=1}^m X_i$ eine beliebige nicht leere Teilmenge der Produktmenge, so bezeichnet man die Menge*

$$p_{\{k\}}[M] = \left\{ x_k \in X_k : \exists \boldsymbol{x}_{-k} \in \prod_{i=1, i\neq k}^m X_i \quad \mathit{mit}\ (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m) \in M \right\} \subset X_k$$

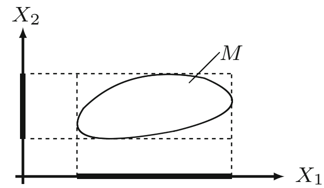
*als **Projektion von $M$ auf $X_k$**. Mit der Notation $\boldsymbol{x}_{(k_1,\ldots,k_\ell)}$ für Vektoren aus $\prod_{i\neq k_j, j\in\{1,\ldots \ell\}} X_i$ (für $\ell < m$) ist die Projektion von $M$ auf ein $\ell$-dimensionales cartesisches Teilprodukt $X_{k_1} \times \ldots \times X_{k_\ell}$ in der Form*

$$\begin{aligned} p_{\{k_1\ldots k_\ell\}}[M] = \big\{ (x_{k_1}, \ldots x_{k_\ell}) \in X_{k_1} \times \ldots \times X_{k_\ell} :& \\ \exists \boldsymbol{x}_{-(k_1,\ldots,k_\ell)} \mathit{mit}\ (x_1, \ldots, x_{k_1} \ldots, x_{k_\ell} \ldots, x_m) \in M \big\}& \end{aligned} \tag{1.34}$$

*definiert.*

[38] Im allgemeinen wird man von strukturierten Mengen ausgehen, etwa von topologischen Räumen.
[39] Im Englischen *„generalized rectangle"*.

**Abb. 1.1** Projektionen




Mit $K = \{1, \dots, m\}$ und $L = \{k_1, \dots, k_\ell\} \subset K$ wird im Falle $M = \prod_{i\in K} X_i$ anstelle von $p_{\{k_1 \dots k_\ell\}}\left[\prod_{i\in K} X_i\right]$ die Notation $p_L^K$ benutzt. $p_L^K$ ist also die Projektion des cartesischen Produktes der Mengen $X_1, \dots, X_m$ in das cartesische Produkt der Mengen $X_{k_1}, \dots, X_{k_\ell}$. Die Projektionsmenge (1.34) fällt i. a. *nicht* mit dem cartesischen Produkt der Einzelprojektionen zusammen, vielmehr ist die Inklusion

$$p_{\{k_1 \dots k_\ell\}}[M] \subset \prod_{j=1}^{\ell} p_{\{k_j\}}[M]$$

i. a. echt, es sei denn, $M$ wäre ein Quader mit den Seiten $M_k = p_{\{k\}}[M]$, $k \in K$ (Abb. 1.1).

**Definition 1.11.2** *Für meßbare Räume $[X_t, \mathcal{A}_t]$ heißt die von allen Quadern $Q_A = \prod_{t=1}^m A_t$ mit $A_t \in \mathcal{A}_t$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\sigma\left(\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t\right) = \bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ die* ***$\sigma$-Algebra des Produktraumes der meßbaren Räume $[X_t, \mathcal{A}_t]$*** *oder kurz die* ***Produkt-$\sigma$-Algebra*** *von $\prod_{t=1}^m X_t$.*

Man beachte, daß das cartesische Produkt $\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ der $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}_t$ selbst i. a. keine $\sigma$-Algebra ist, vielmehr bildet es ein sog. **zerlegbares Mengensystem**, d. h. ein durchschnittsstabiles System von Teilmengen, in dem die Differenz zweier Elemente als endliche Vereinigung disjunkter Elemente darstellbar ist (vergl. Abschn. 1.1). Ein über einem zerlegbaren Mengensystem definierter Inhalt[40] ist ein **elementares Maß**.

Das Urbild $\left(p_{\{j\}}^K\right)^{-1}(A_j) = A_j \times \prod_{\substack{t\in K\\ t\neq j}} X_t$ einer jeden meßbaren Menge $A_j \in \mathcal{A}_j$ ist als Zylindermenge (mit den meßbaren Seiten $X_t$ für $t \neq j$ und $A_j$) in $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ enthalten, d. h. jede der Projektionen $p_{\{j\}}^K$ ist meßbar; Analoges gilt offenbar für Projektionen $p_L^K$ mit $L \subset K$. $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ ist daher die kleinste $\sigma$-Algebra, bzgl. der alle Projektionen meßbar sind. Die $\sigma$-Algebren

$$\mathcal{M}_j = \left\{ A_j \subset X_j : \left( A_j \times \prod_{t\in K,\ t\neq j} X_t \right) \in \bigotimes_{t\in K} \mathcal{A}_t \right\}, \quad j \in K,$$

werden als **Marginal-$\sigma$-Algebren** von $\bigotimes_{t\in K} \mathcal{A}_t$ bezeichnet.

Im Folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber (und bzgl. *endlich-dimensionaler* cartesischer Produkte ohne Einschränkung der Allgemeinheit) auf den Fall $m = 2$. Es sei $M \subset X_1 \times X_2$. Für fest gewählte Elemente $\hat{x}_i \in X_i$ setzen wir $M|_{\hat{x}_1} = \{(\hat{x}_1, x_2) \in M :$

[40] Also eine erweitert-reellwertige und endlich additive Mengenfunktion $\eta \geq 0$ mit $\eta(\varnothing) = 0$.

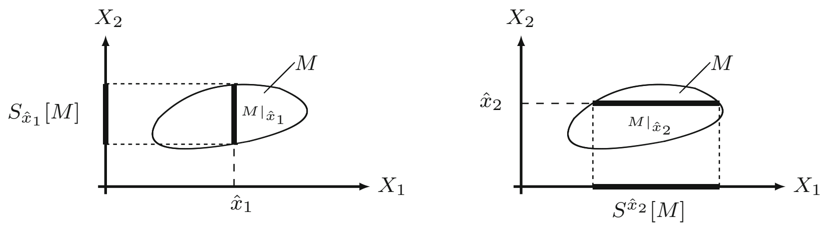



**Abb. 1.2** Schnitte

$x_2 \in X_2\}$ und $M|_{\hat{x}_2} = \{(x_1, \hat{x}_2) \in M : x_1 \in X_1\}$. Die Projektionen dieser Teilmengen von $M$ bezeichnet man als **Schnitte**. Genauer heißt die Teilmenge $S_{\hat{x}_1}[M] = p_{\{2\}}[M|_{\hat{x}_1}] \subset X_2$ ein **$X_1$-Schnitt von $M$ in $X_2$**, und die Teilmenge $S^{\hat{x}_2}[M] = p_{\{1\}}[M|_{\hat{x}_2}] \subset X_1$ ein **$X_2$-Schnitt von $M$ in $X_1$** (vergl. Abb. 1.2). Ist insbesondere $Q = Q_1 \times Q_2$ ein verallgemeinerter Quader, so hat man

$$S_{\hat{x}_1}[Q] = \begin{cases} Q_2, & \text{falls } \hat{x}_1 \in Q_1, \\ \varnothing, & \text{falls } \hat{x}_1 \notin Q_1, \end{cases} \qquad S^{\hat{x}_2}[Q] = \begin{cases} Q_1, & \text{falls } \hat{x}_2 \in Q_2, \\ \varnothing, & \text{falls } \hat{x}_2 \notin Q_2. \end{cases}$$

Man erkennt leicht, daß die Familie $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{P}(X_1 \times X_2)$ aller derjenigen Elemente der $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, die die Eigenschaft besitzen, daß jeder $X_1$-Schnitt einer Menge aus $\mathfrak{F}$ in $\mathcal{A}_2$ enthalten ist, eine $\sigma$-Algebra in $X_1 \times X_2$ bildet. Da diese Familie in der minimal umfassenden $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ enthalten ist, folgt $\mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$. Entsprechendes gilt mutatis mutandis für $X_2$-Schnitte; daher können wir feststellen, daß alle Schnitte von Elementen $A$ aus $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ meßbare Mengen sind, d. h. jeder $X_1$-Schnitt $S_{\hat{x}_1}(A)$ ist Element von $\mathcal{A}_2$, jeder $X_2$-Schnitt $S^{\hat{x}_2}(A)$ ist Element von $\mathcal{A}_1$.

Es seien nun $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ $(i = 1, 2)$ $\sigma$-endliche Maßräume; der Produktraum $X_1 \times X_2$ (und damit auch jede Teilmenge dieses Raumes) kann dann durch eine abzählbare Vereinigung disjunkter Quader $A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ überdeckt werden; dazu sind nämlich lediglich entsprechende disjunkte Überdeckungen $X_i = \bigcup_{k_i=1}^{\infty} A_i^{(k_i)}$ mit $A_i^{(k_i)} \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2)$ der einzelnen Maßräume heranzuziehen, aus denen eine Überdeckung $\bigcup_{k_1=1}^{\infty} \bigcup_{k_2=1}^{\infty} \left(A_1^{(k_1)} \times A_2^{(k_2)}\right) = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \left(B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)}\right)$ mit disjunkten Quadern $B_i^{\ell} \in \mathcal{A}_i$ bildbar ist[41].

**Lemma 1.11.1** *Es sei $Q = Q_1 \times Q_2 \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ ein verallgemeinerter Quader mit $\mu_i(Q_i) < \infty$ $(i = 1, 2)$. Die Familie $\mathcal{V}_Q$ aller endlichen disjunkten Vereinigungen von meßbaren Quadern, die in $Q$ enthalten sind, bildet einen Ring.*

[41] Man setze etwa $\ell = \ell(k_1, k_2) = K(k_1, k_2) - k_1$ für $k_1 + k_2 =$ gerade, $\ell(k_1, k_2) = K(k_1, k_2) - k_2$ für $k_1 + k_2 =$ ungerade und $B_i^{(\ell(k_1,k_2))} = A_i^{(k_i)}$, worin $K(k_1, k_2) = 1 + \frac{k_1+k_2}{2}(k_1 + k_2 - 1)$ ist.

*Beweis* $\mathcal{V}_Q$ enthält die leere Menge. Die Differenz zweier Quader $A = A_1 \times A_2$ und $B = B_1 \times B_2$ ist offenbar stets als Vereinigung zweier disjunkter Quader darstellbar:

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = \big((A_1 \setminus B_1) \times A_2\big) \cup \big((B_1 \cap A_1) \times (A_2 \setminus B_2)\big).$$

Daraus ist zu schließen, daß die Differenz zweier endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern wieder eine disjunkte Vereinigung von Quadern ergibt (ein detaillierter Beweis dieses Faktums ist etwa in [63] nachzulesen). Folglich enthält $\mathcal{V}_Q$ mit je zwei Elementen auch deren Differenz und – eine gemäß Definition von $\mathcal{V}_Q$ unmittelbar ersichtliche Eigenschaft – auch deren Vereinigung. Also ist $\mathcal{V}_Q$ ein Ring. □

Zu einer beliebigen im Produktraum $X_1 \times X_2$ meßbaren Menge $A \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ definiere man die Funktionen $f_A^{(i)} : X_i \to \bar{\mathbb{R}}$ $(i = 1,2)$ durch

$$f_A^{(1)}(x_1) = \mu_2\big(S_{x_1}[A]\big), \quad f_A^{(2)}(x_2) = \mu_1\big(S^{x_2}[A]\big). \tag{1.35}$$

**Lemma 1.11.2** *Ist $A = A_1 \times A_2 \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$, $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(i = 1,2)$, ein meßbarer Quader mit Seiten endlichen Maßes, so sind die Funktionen (1.35) integrabel und erfüllen die Beziehung*

$$\int_{X_1} f_{A_1 \times A_2}^{(1)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} f_{A_1 \times A_2}^{(2)}\, d\mu_2 = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2). \tag{1.36}$$

*Beweis* Wegen $S_{x_1}(A_1 \times A_2) = A_2$ für $x_1 \in A_1$ und $S^{x_2}(A_1 \times A_2) = A_1$ für $x_2 \in A_2$ (anderenfalls sind die Schnitte leer) hat man $f_{A_1 \times A_2}^{(1)}(x_1) = 1_{A_1}(x_1) \cdot \mu_2(A_2)$ und $f_{A_1 \times A_2}^{(2)}(x_2) = 1_{A_2}(x_2) \cdot \mu_1(A_1)$ mit $\mu_1(A_1) < \infty$, $\mu_2(A_2) < \infty$. Daraus folgt die Behauptung. □

Die folgende Verallgemeinerung repräsentiert eine Kernaussage dieses Abschnittes.

**Satz 1.11.3** $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ $(i = 1,2)$ *seien Maßräume mit $\sigma$-endlichen Maßen $\mu_1, \mu_2$. Die zu einer meßbaren Menge $A \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ definierten Funktionen (1.35) sind meßbar, und es gilt*

$$\int_{X_1} f_A^{(1)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} f_A^{(2)}\, d\mu_2.$$

*Beweis* Es sei $\mathcal{W}$ die Familie aller meßbaren Mengen $M \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$, für die die Satzaussage zutrifft. Zu zeigen ist $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \subseteq \mathcal{W}$.

1. Gemäß Lemma 1.11.2 sind alle verallgemeinerten Quader $A_1 \times A_2$ aus $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ mit $\mu_i(A_i) < \infty$ in $\mathcal{W}$ $(i = 1,2)$.

2. Gehört eine Folge $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ wechselseitig disjunkter Mengen aus $X_1 \times X_2$ zu $\mathcal{W}$, so gilt dies auch für die Vereinigung $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, also $V \in \mathcal{W}$. Das ist wie folgt einzusehen: Wegen $f_V^{(1)}(x_1) = \mu_2\big(S_{x_1}[V]\big) = \mu_2\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_{x_1}[E_k]\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2\big(S_{x_1}[E_k]\big)\ \forall\, x_1 \in X_1$ und $f_V^{(2)}(x_2) = \mu_1\big(S^{x_2}[V]\big) = \mu_1\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} S^{x_2} v\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1\big(S^{x_2}[E_k]\big)\ \forall\, x_2 \in X_2$ hat man

$f_V^{(i)}(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{E_k}^{(i)}(x_i)$ $(i = 1,2)$ mit nicht negativen meßbaren Funktionen. Setzt man $g_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} f_{E_k}^{(i)}$, so bilden die $g_n^{(i)}$ monoton nicht abnehmende Folgen, so daß der Satz 1.9.7 über die monotone Konvergenz die Relationen $\sum_{k=1}^{\infty} \int f_{E_k}^{(i)}\, d\mu_i = \int \sum_{k=1}^{\infty} f_{E_k}^{(i)}\, d\mu_i$ liefert $(i = 1,2)$[42]. Laut Vor. ist hierin $\int f_{E_k}^{(1)}\, d\mu_1 = \int f_{E_k}^{(2)}\, d\mu_2\ \forall\, k \in \mathbb{N}$, womit $\int f_V^{(1)}\, d\mu_1 = \int f_V^{(2)}\, d\mu_2$ folgt.

3. Da jede Teilmenge von $X_1 \times X_2$ – einschließlich des Produktraumes selbst – durch wechselseitig disjunkte Quader $A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ überdeckt werden kann, folgt $X_1 \times X_2 \in \mathcal{W}$.

4. Zum Beweis des Satzes haben wir $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \subseteq \mathcal{W}$ zu zeigen. Hierzu betrachten wir einen meßbaren Quader $Q = Q_1 \times Q_2$ mit Seiten endlicher Maße $\mu_i(Q_i) < \infty$ $(i = 1,2)$, sowie die folgenden Mengenfamilien:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_Q &= \{M \in \mathcal{W} : M \subset Q\},\\
\mathcal{V}_Q &= \Bigg\{ \bigcup_{n=1}^{m} Q^{(n)} : m \in \mathbb{N},\ Q^{(n)} = \big(Q_1^{(n)} \times Q_2^{(n)}\big) \subset Q\ \forall\, n \in \{1,\dots,m\},\\
&\qquad\qquad Q_1^{(n)} \in \mathcal{A}_1,\ Q_2^{(n)} \in \mathcal{A}_2,\ Q^{(n_1)} \cap Q^{(n_2)} = \varnothing \text{ für } n_1 \neq n_2 \Bigg\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{W}_Q$ ist eine monotone Familie[43], denn für jede monotone Mengenfolge $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{W}$ mit $\lim_{n\to\infty} E_n = L$ gilt einerseits $L \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ (Eigenschaft der $\sigma$-Algebra) und $\lim_{n\to\infty} S_{x_1}[E_n] = S_{x_1}[L]$, $\lim_{n\to\infty} S^{x_2}[E_n] = S^{x_2}[L]$ (da Monotonie „vererbbar"), zum anderen hat man für die Funktionen $\varphi_n^{(1)}(x_1) = \mu_2\big(S_{x_1}[E_n]\big)$, $\varphi_n^{(2)}(x_2) = \mu_1\big(S^{x_2}[E_n]\big)$ die Abschätzungen $0 \le \varphi_n^{(1)}(x_1) \le \mu_2\big(Q_2\big) < \infty$, $0 \le \varphi_n^{(2)}(x_2) \le \mu_1\big(Q_1\big) < \infty$, so daß aufgrund des Satzes 1.9.6 von der majorisierten Konvergenz die Funktionen $\varphi^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(1)}$ und $\varphi^{(2)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(2)}$ integrabel sind und die Relation

$$\int \varphi^{(1)}\, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^{(1)}\, d\mu_1 \stackrel{!}{=} \int \varphi^{(2)}\, d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n^{(2)}\, d\mu_2$$

erfüllen, was $L = \lim_{n\to\infty} E_n \in \mathcal{W}_Q$ impliziert.

Nach Lemma 1.11.1 ist $\mathcal{V}_Q$ ein Ring, und dieser ist nach dem unter 1. und 2. Gesagten in $\mathcal{W}_Q$ enthalten. Daher besagt das Korollar 1.1.7 aus Abschn. 1.2, daß die von $\mathcal{V}_Q$ erzeugte monotone Familie $\mathcal{M}(\mathcal{V}_Q)$ mit dem von $\mathcal{V}_Q$ erzeugten $\sigma$-Ring zusammenfällt und in $\mathcal{W}_Q$ enthalten ist:

$$\mathcal{M}(\mathcal{V}_Q) = \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_Q) \subseteq \mathcal{W}_Q. \tag{1.37}$$

Weiterhin hat man offenbar die Relation

$$(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap Q \subseteq \mathcal{V}_Q \subseteq \mathcal{W}_Q \subseteq \mathcal{W},$$

[42] Die Kennzeichnung der Integrationsbereiche $X_1, X_2$ ist der Einfachheit halber weggelassen.

[43] Vergl. Abschn. 1.1.

aus der unter Beachtung von Lemma 1.1.1

$$\mathcal{R}_\sigma\big((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap Q\big) = \mathcal{R}_\sigma\big((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)\big) \cap Q \stackrel{!}{=} \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \cap Q \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_Q)$$

folgt. Beachtet man (1.37), so besagt diese Beziehung

$$\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \cap Q \subseteq \mathcal{W}_Q \subseteq \mathcal{W}, \tag{1.38}$$

mit deren Hilfe schließlich $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \subseteq \mathcal{W}$ wie folgt nachzuweisen ist: Es sei $M$ ein beliebiges Element aus $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$. Da jede solche Teilmenge des Raumes $X_1 \times X_2$ durch eine abzählbare Vereinigung disjunkter Quader $Q^{(k)} = A_1^{(k)} \times A_2^{(k)} \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ mit $\mu_i(A_i^{(k)}) < \infty\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ überdeckt werden kann, ist gemäß (1.38) $M \cap Q^{(k)} \in \mathcal{W}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (man interpretiere in (1.38) $Q^{(k)}$ als $Q$). Unter 2. hatten wir jedoch gezeigt, daß damit auch die (disjunkte) Vereinigung aller dieser Elemente aus $\mathcal{W}$ in $\mathcal{W}$ liegt, d. h. wir haben

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\big(M \cap Q^{(k)}\big) = M \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} Q^{(k)} = M \in \mathcal{W},$$

und damit $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \subseteq \mathcal{W}$. □

**Satz 1.11.4** $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ $(i = 1, 2)$ *seien Maßräume mit $\sigma$-endlichen Maßen $\mu_1, \mu_2$; dann ist die Mengenfunktion $\nu : \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big) \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch*

$$\nu\big(A\big) = \int_{X_1} f_A^{(1)}\, d\mu_1 = \int_{X_2} f_A^{(2)}\, d\mu_2 \quad \forall\, A \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big), \tag{1.39}$$

*ein $\sigma$-endliches Maß, das für Quader $A = A_1 \times A_2 \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ in der Form*

$$\nu\big(A_1 \times A_2\big) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \tag{1.40}$$

*darstellbar ist. $\nu$ ist durch (1.40) eindeutig bestimmt.*

*Beweis* Die Funktionen $f_A^{(i)}$ sind nicht negativ und meßbar; daher ist $\nu$ eine nicht negative Mengenfunktion über $\sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)$ mit $\nu(\varnothing) = 0$, wobei $\nu(A)$ im Falle der Integrabilität der $f_A^{(i)}$ endlich ist und im Falle der Nicht-Integrabilität den Wert $\infty$ annimmt. Es sei $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \sigma\big(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\big)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Da ein Schnitt von $A$ gleich der Vereinigung der entsprechenden Schnitte der $A_n$ ist, folgt aufgrund der $\sigma$-Additivität der Maße $\mu_i$

$$f_A^{(1)}(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}^{(1)}(x_1), \quad f_A^{(2)}(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n}^{(2)}(x_2).$$

Setzt man $g_k^{(i)} = \sum_{n=1}^k f_{A_n}^{(i)}$, so besagt der Satz 1.9.7 von der monotonen Konvergenz, daß $\lim_{k\to\infty} \int g_k^{(i)}\, d\mu_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^k \int f_{A_n}^{(i)}\, d\mu_i = \sum_{n=1}^\infty \int f_{A_n}^{(i)}\, d\mu_i \overset{!}{=} \int f_A^{(i)}\, d\mu_i$ ist, d. h. $\nu$ ist $\sigma$-additiv, also ein Maß über $\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$.

Da die Maße $\mu_i$ $\sigma$-endlich sind, gibt es eine Überdeckung $\bigcup_{\ell=1}^\infty \left(B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)}\right)$ des Raumes $X_1 \times X_2$ mit $B_i^{(\ell)} \in \mathcal{A}_i$ und $\mu_i(B_i^{(\ell)}) < \infty\ \forall\, \ell \in \mathbb{N}\ (i = 1, 2)$. Für diese gilt nach Lemma 1.11.2 $\nu\left(B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)}\right) = \mu_1\left(B_1^{(\ell)}\right) \cdot \mu_2\left(B_2^{(\ell)}\right) < \infty\ \forall\, \ell \in \mathbb{N}$, d. h. $\nu$ ist $\sigma$-endlich.

Zu zeigen bleibt die eindeutige Bestimmtheit von $\nu$ durch Gleichung (1.40). Angenommen, ein Maß $\theta$ wäre ebenfalls vermöge (1.40) festgelegt. Unter Rückgriff auf die eben genannte Überdeckung $\bigcup_{\ell=1}^\infty \left(B_1^{(\ell)} \times B_2^{(\ell)}\right) =: \bigcup_{\ell=1}^\infty B^{(\ell)}$ des Raumes $X_1 \times X_2$ definiere man für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Mengenfamilien $\mathcal{H}_\ell$ und $\mathcal{V}_\ell$ durch[44]

$$\mathcal{H}_\ell = \left\{M : M \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \cap B^{(\ell)},\ \nu(M) = \theta(M)\right\},$$
$$\mathcal{V}_\ell = \Bigg\{\bigcup_{n=1}^m Q^{(n)} : m \in \mathbb{N},\ Q^{(n)} = \left(Q_1^{(n)} \times Q_2^{(n)}\right) \subset B^{(\ell)}\ \forall\, n \in \{1, \ldots, m\},$$
$$Q_1^{(n)} \in \mathcal{A}_1,\ Q_2^{(n)} \in \mathcal{A}_2,\ Q^{(n_1)} \cap Q^{(n_2)} = \varnothing \text{ für } n_1 \neq n_2\Bigg\}.$$

Jedes $\mathcal{H}_\ell$ ist eine monotone Familie, da bekanntlich für monotone Folgen $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \nu(M_n) = \nu(\lim_{n\to\infty} M_n)$ (und ebenso mit $\theta$). Jedes $\mathcal{V}_\ell$ andererseits ist ein Ring (s. Lemma 1.11.1), und man hat offenbar $\mathcal{V}_\ell \subset \mathcal{H}_\ell$. Nach Korollar 1.1.7 in Abschn. 1.2 enthält $\mathcal{H}_\ell$ daher den von $\mathcal{V}_\ell$ erzeugten $\sigma$-Ring $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_\ell)$. Da jedes Element $U = (A_1 \times A_2) \cap B^{(\ell)}$ aus $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)}$ in der Form $U = (A_1 \cap B_1^{(\ell)}) \times (A_2 \cap B_2^{(\ell)})$ als zu $\mathcal{V}_\ell$ gehörig erkennbar ist, folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)} \subseteq \mathcal{V}_\ell \subset \mathcal{M}(\mathcal{V}_\ell) &= \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_\ell) \subseteq \mathcal{H}_\ell, \\
\mathcal{R}_\sigma\left((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)}\right) &= \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)} \\
&= \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)} \subseteq \mathcal{R}_\sigma(\mathcal{V}_\ell) \subseteq \mathcal{H}_\ell,
\end{aligned}$$

deren letzte $\mathcal{H}_\ell = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1) \cap B^{(\ell)}$ impliziert. Demnach besteht für jede meßbare Menge $A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ und jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Gleichheit $\nu(A \cap B^{(\ell)}) = \theta(A \cap B^{(\ell)})$. Da weiterhin aufgrund der Überdeckungseigenschaft der Familie aller $B^{(\ell)}$ jedes solche $A$ auch in der Form $A = \bigcup_{\ell=1}^\infty (A \cap B^{(\ell)})$ schreibbar ist, folgt $\nu(A) = \sum_{\ell=1}^\infty \nu(A \cap B^{(\ell)}) = \sum_{\ell=1}^\infty \theta(A \cap B^{(\ell)}) = \theta(A)$ für jedes $A \in \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, d. h. $\nu = \theta$. □

**Definition 1.11.3** *Das vermöge (1.39) definierte Maß* $\nu : \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) \to \bar{\mathbb{R}}$ *wird als das* ***Produkt der σ-endlichen Maße*** $\boldsymbol{\mu_1, \mu_2}$ *oder als* ***Produktmaß der Räume*** $[\boldsymbol{X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i}]$ *(*$i = 1, 2$*) bezeichnet. Man schreibt* $\boldsymbol{\nu = \mu_1 \otimes \mu_2}$ *oder auch* $\nu = \mu_1 \times \mu_2$.

[44] Diese Beweisführung ähnelt der zu Satz 1.11.3, s. dort Beweispunkt 4.

**Bemerkung 1.11.1** *Die Wichtigkeit dieser Aussagen möge an folgendem Beispiel verdeutlicht werden: Es sei* $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum über* $\bar{\mathbb{R}}$, *also ein Maßraum mit vollständigem und total endlichem Maß (und* $\mathbb{P}(\bar{\mathbb{R}}) = 1$*). Wir betrachten zwei Zufallsvariable* $\xi_1, \xi_2$ *über* $\Omega$, *d. h. zwei f. ü. endliche meßbare Abbildungen* $\xi_i : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, *(s. Abschn. 2). Ein meßbarer verallgemeinerter Quader* $Q = B_1 \times B_2$ *führt damit zur Definition der Funktionen* $f_Q^{(i)} : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$,

$$f_Q^{(1)}(x_1) = \mathbb{P}_{\xi_2}\big(S_{x_1}[Q]\big) = \mathbb{P}_{\xi_2}(B_2), \quad f_Q^{(2)}(x_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}\big(S_{x_2}[Q]\big) = \mathbb{P}_{\xi_1}(B_1)$$

*für* $x_i \in B_i$, *worin die* $\mathbb{P}_{\xi_i}$ *die vermöge* $\mathbb{P}_{\xi_i}(B) = \mathbb{P}\big(\xi_i^{-1}[B]\big)$ *für* $B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ *induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße sind* $(i = 1, 2)$. *Diese Maße sind über der* $\sigma$*-Algebra* $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ *des* $\bar{\mathbb{R}}$ *definiert und führen nach Satz 1.11.4 zur Definition eines* $\sigma$*-endlichen – hier sogar total endlichen – Maßes* $\nu : \sigma\big(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\big) \to [0, 1]$,

$$\nu(M) = \int f_M^{(1)} d\mathbb{P}_{\xi_1} = \int f_Q^{(2)} d\mathbb{P}_{\xi_2} \quad \forall\, M \in \sigma(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})),$$

*welches das Produktmaß* $\mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2}$ *der Maße* $\mathbb{P}_{\xi_i}$ *repräsentiert und für verallgemeinerte Quader* $Q = B_1 \times B_2$ *aus* $\sigma\big(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\big)$ *die Form*

$$\big(\mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2}\big)(B_1 \times B_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{\xi_2}(B_2)$$

*annimmt. Sei* $\boldsymbol{\xi}$ *der aus den Komponenten-Variablen* $\xi_1, \xi_2$ *gebildete Zufallsvektor über* $\Omega$ *mit Werten in* $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$:

$$\boldsymbol{\xi}(\omega) = \big(\xi_1(\omega), \xi_1(\omega)\big) \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

*Das Urbild* $\boldsymbol{\xi}^{-1}[Q]$ *eines verallgemeinerten Quaders* $Q = B_1 \times B_2 \in \sigma\big(\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) \times \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})\big)$ *hat die Form* $\boldsymbol{\xi}^{-1}[Q]\big) = \xi_1^{-1}[B_1] \cap \xi_2^{-1}[B_2]$, *so daß für das durch* $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}(B) = \mathbb{P}\big(\boldsymbol{\xi}^{-1}[B]\big)\ \forall\, B \in \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ *definierte induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ *folgt*

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}(B_1 \times B_2) = \mathbb{P}\big(\boldsymbol{\xi}^{-1}[B_1 \times B_2]\big) = \mathbb{P}\big(\xi_1^{-1}[B_1] \cap \xi_2^{-1}[B_2]\big).$$

*Zwei Zufallsvariablen* $\xi_1, \xi_2$ *werden als stochastisch unabhängig bezeichnet, wenn*

$$\mathbb{P}\big(\xi_1^{-1}[B_1] \cap \xi_2^{-1}[B_2]\big) = \mathbb{P}\big(\xi_1^{-1}[B_1]\big) \cdot \mathbb{P}\big(\xi_2^{-1}[B_2]\big)$$

*für* $B_1, B_2$ *aus* $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ *gilt. Somit ist das Produktmaß der beiden Bildmaße* $\mathbb{P}_{\xi_1}, \mathbb{P}_{\xi_2}$ *im Falle der stochastischen Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen* $\xi_1, \xi_2$ *nichts anderes als das Bildmaß* $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ *des aus* $\xi_1, \xi_2$ *gebildeten Zufallsvektors:*

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}} = \mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_2}. \qquad \square$$

Es sei $\phi : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ eine über dem Produktraum $[X_1 \times X_2, \sigma(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2), \mu_1 \times \mu_2]$ integrable oder zumindest nicht negative (erweitert-integrable)[45] Funktion. Das Integral $\int \phi \, d(\mu_1 \times \mu_2)$ heißt **Doppelintegral von $\phi$**.

Es ist naheliegend, die Eigenschaften der über einem Produkt von Maßräumen definierten Funktionen hinsichtlich ihrer Einschränkungen auf jeweils einen der beteiligten Maßräume zu untersuchen. Hierzu betrachtet man sog. Funktionsschnitte.

**Definition 1.11.4** *Es sei $\phi : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$. Für fest gewählte Punkte $\hat{x}_i \in X_i$ heißt $\phi_{\hat{x}_1} : X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $\phi_{\hat{x}_1}(x_2) = \phi(\hat{x}_1, x_2)$ (bzw. $\phi^{\hat{x}_2} : X_1 \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $\phi^{\hat{x}_2}(x_1) = \phi(x_1, \hat{x}_2)$) ein **$\mathbf{X_1}$-Funktionsschnitt von $\phi$** (bzw. ein **$\mathbf{X_2}$-Funktionsschnitt** von $\phi$).*

Ist $\phi : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ meßbar, so gilt für das Urbild einer offenen Menge $O$ aus $\bar{\mathbb{R}}$

$$
\begin{aligned}
(\phi_{\hat{x}_1})^{-1}[O] &= \{x_2 : \phi(\hat{x}_1, x_2) \in O\} = S_{\hat{x}_1}\left[\phi^{-1}[O]\right], \\
(\phi^{\hat{x}_2})^{-1}[O] &= \{x_1 : \phi(x_1, \hat{x}_2) \in O\} = S^{\hat{x}_2}\left[\phi^{-1}[O]\right].
\end{aligned}
$$

Da Schnitte meßbarer Mengen meßbar sind (s. o.), folgt damit auch die Meßbarkeit der Funktionen $\phi_{\hat{x}_1}$ und $\phi^{\hat{x}_2}$. Ist zudem $\phi$ integrabel oder erweitert-integrabel, so sind auch die Funktionsschnitte $\phi_{\hat{x}_1}$ und $\phi^{\hat{x}_2}$ integrabel bzw. erweitert-integrabel (das folgt leicht aus den Eigenschaften der entsprechenden Funktionsschnitte einer Folge integrabler einfacher Funktionen über $X_1 \times X_2$, die f. ü. oder im Maße gegen $\phi$ konvergiert). In diesem Falle können wir die Funktionen $f_\phi^{(i)} : X_i \to \bar{\mathbb{R}}$ $(i = 1, 2)$ vermöge

$$
f_\phi^{(1)}(\hat{x}_1) = \int \phi_{\hat{x}_1} \, d\mu_2, \quad f_\phi^{(2)}(\hat{x}_2) = \int \phi^{\hat{x}_2} \, d\mu_1 \tag{1.41}
$$

definieren. Falls die $f_\phi^{(i)}$ integrabel oder nicht negativ sind, existieren auch die Integrale

$$
\begin{aligned}
\int f_\phi^{(1)}(x_1) \, d\mu_1(x_1) &= \int \left( \int \phi_{x_1}(x_2) \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1), \\
\int f_\phi^{(2)}(x_2) \, d\mu_2(x_2) &= \int \left( \int \phi^{x_2}(x_1) \, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2),
\end{aligned}
$$

die als **iterierte Integrale der Funktion $\phi$** bezeichnet werden; man schreibt kurz

$$
\int f_\phi^{(1)} \, d\mu_1 = \iint \phi \, d\mu_2 \, d\mu_1, \quad \int f_\phi^{(2)} \, d\mu_2 = \iint \phi \, d\mu_1 \, d\mu_2.
$$

Den Zusammenhang zwischen iterierten Integralen und Doppelintegral klärt ein Satz von Fubini.

[45] Zur Erinnerung: Einer nicht integrablen nicht negativen Funktion wird der Integralwert $\infty$ zugeordnet.

**Satz 1.11.5** (Fubini) *Es sei $\phi$ eine meßbare erweitert-reellwertige Funktion über $X_1 \times X_2$. Ist $\phi$ nicht negativ oder ist $\int |\phi|\, d(\mu_1 \times \mu_2) < \infty$, so gilt: Die vermöge (1.41) definierten Funktionen $f_\phi^{(i)} : X_i \to \bar{\mathbb{R}}$ $(i = 1, 2)$ sind meßbar, und es ist*

$$\int \phi\, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \iint \phi\, d\mu_2\, d\mu_1 = \iint \phi\, d\mu_1\, d\mu_2. \tag{1.42}$$

*Beweis* 1. Sei $\phi$ nicht negativ. Im einfachsten Fall ist $\phi : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ Indikatorfunktion einer meßbaren Menge $M \subset X_1 \times X_2$, d. h. $\phi(\boldsymbol{x}) = 1_M(\boldsymbol{x})$ für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$. Damit folgt für festgehaltene $\hat{x}_i$ $(i = 1, 2)$ $\phi_{\hat{x}_1}(x_2) = 1_{S_{\hat{x}_1}[M]}(x_2)$ und $\phi^{\hat{x}_2}(x_1) = 1_{S^{\hat{x}_2}[M]}(x_1)$, so daß die Funktionen $f^{(i)}$ von der Form $f^{(1)}(\hat{x}_1) = \mu_2\left(S_{\hat{x}_1}[M]\right)$ bzw. $f^{(2)}(\hat{x}_2) = \mu_1\left(S^{\hat{x}_2}[M]\right)$ sind. Nach Satz 1.11.3 und Gleichung (1.39) hat man für diesen Fall sofort die Beziehung (1.42). Demnach gilt die Behauptung auch für jede einfache Funktion (als Linearkombination charakteristischer Funktionen). Nach Satz 1.7.1 (Abschn. 1.7) gibt es eine monoton nicht abnehmende Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher nicht negativer Funktionen, die überall gegen $\phi$ konvergiert. Für diese besagt der Satz 1.9.7 von der monotonen Konvergenz, daß $\lim_{n\to\infty} \int s_n\, d(\mu_1 \times \mu_2) = \int \phi\, d(\mu_1 \times \mu_2)$ ist. Die analog zu (1.41) definierten Funktionen $f_{s_n}^{(1)}(\hat{x}_1) = \int s_n(\hat{x}_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)$ und $f_{s_n}^{(2)}(\hat{x}_2) = \int s_n(x_1, \hat{x}_2)\, d\mu_1(x_1)$ mit festen $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ führen zu

$$\begin{aligned}\int f_{s_n}^{(1)}(\hat{x}_1)\, d\mu_1(\hat{x}_1) &= \iint s_n(\hat{x}_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(\hat{x}_1)\\ \int f_{s_n}^{(2)}(\hat{x}_2)\, d\mu_2(x_2) &= \iint s_n(x_1, \hat{x}_2)\, d\mu_1(\hat{x}_1)\, d\mu_2(x_2),\end{aligned}$$

wobei nach dem vorher Gesagten für die einfachen Funktionen $s_n(x_1, x_2)$ gilt

$$\iint s_n(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1) = \iint s_n(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2). \tag{1.43}$$

Da die $\{f_{s_n}^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ihrerseits nicht abnehmende Folgen nicht negativer integrabler Funktionen sind $(i = 1, 2)$, bestehen – wieder gemäß Satz 1.9.7 – die Gleichungen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int f_{s_n}^{(1)}(x_1)\, d\mu_1(x_1) &= \lim_{n\to\infty} \int \left(\int s_n(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)\\ &= \int \lim_{n\to\infty} \left(\int s_n(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) = \iint \phi(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1),\\ \lim_{n\to\infty} \int f_{s_n}^{(2)}(x_2)\, d\mu_2(x_2) &= \lim_{n\to\infty} \int \left(\int s_n(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2)\\ &= \int \lim_{n\to\infty} \left(\int s_n(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2) = \iint \phi(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2).\end{aligned}$$

Mit (1.43) folgt daher (1.42).

2. Ist $|\phi|$ integrabel, so auch $\phi$, und es gibt eine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ einfacher integrabler Funktionen, die fast überall gegen $\phi$ konvergiert und deren Absolutwerte durch

eine integrable Funktion majorisiert werden. In diesem Falle kann also der Satz 1.9.6 von der majorisierten Konvergenz herangezogen werden (Abschn. 1.9), um analoge Schlüsse zu ziehen. Das beweist die Behauptung. □

**Bemerkung 1.11.2** *Wir wollen diese Aussagen wieder am Beispiel geeigneter Zufallsabbildungen illustrieren: Es seien* $[\Omega, \mathcal{A}_\sigma, \mathbb{P}]$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $\Phi : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ *eine meßbare Funktion und* $\boldsymbol{\xi} : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$ *ein Zufallsvektor, der die Zufallsvariablen* $\xi_1, \xi_2$ *vermöge* $\boldsymbol{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ *bestimmt. Die Komposition* $\phi \circ \boldsymbol{\xi}$ *sei* $\mathbb{P}$*-quasi-integrabel (also* $\mathbb{P}$*-integrabel oder* $\mathbb{P}$*-erweitert-integrabel). Wie im Abschn. 2 gezeigt wird, gilt dann*

$$\int_\Omega \Phi \circ \boldsymbol{\xi} \, d\mathbb{P} = \int_{\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}} \Phi \, d\mathbb{P}_\xi$$

*(vergl. Ausdruck (2.31), Abschn. 2.8). Sind* $\xi_1$ *und* $\xi_2$ *stochastisch unabhängig, so folgt* $\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_{\xi_1} \times \mathbb{P}_{\xi_1}$ *(s. Bemerkung 1.11.1). Aufgrund des Satzes von Fubini hat man daher im Falle stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen folgende Darstellung:*

$$\int_\Omega \Phi \circ \boldsymbol{\xi} d\mathbb{P} = \int \left( \int \Phi(x_1, x_2) d\mathbb{P}_{\xi_1} \right) d\mathbb{P}_{\xi_2} = \int \left( \int \Phi(x_1, x_2) d\mathbb{P}_{\xi_2} \right) d\mathbb{P}_{\xi_1}. \tag{1.44}$$

*Entsprechendes gilt offensichtlich auch für* $d > 2$ *Dimensionen.* □

Wohl am häufigsten wird der Satz von Fubini dann herangezogen, wenn es um die Frage geht, ob eine Summation mit einer Integration vertauschbar ist. So ist der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen zuweilen leichter bestimmbar, wenn man statt der Berechnung des Integrals über diese Summe die Erwartungswerte der Summanden addieren kann. Hierzu nennen wir das

**Korollar 1.11.6** *Es sei* $X_1 = \mathbb{N}_0$*. Die Mengenfunktion* $\mu_1 : \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{N}_0$*, die jeder Teilmenge* $B \in \mathbb{N}_0$ *die Anzahl* $|B|$ *der in* $B$ *enthaltenen nicht negativen ganzen Zahlen zuordnet, ist offensichtlich ein Maß über* $\mathfrak{P}(\mathbb{N}_0) =: \mathcal{A}_1$*, und* $[\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0), \mu_1] =: [X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1]$ *formt einen Maßraum.* $[X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2]$ *sei ein weiterer Maßraum, und es bezeichne* $[X, \mathcal{A}_\sigma, \mu]$ *den Produktraum der* $[X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i]$ $(i = 1, 2)$*. Über* $X$ *werde die reellwertige Funktion* $g(\boldsymbol{x}) = g(x_1, x_2)$ *(mit* $x_i \in X_i$*) definiert. Falls für jede meßbare Menge* $M \subset X$ *mindestens eine der Relationen*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left( \int_{S_n[M]} |g(n, x_2)| \, d\mu_2 \right) < \infty, \qquad \int_{X_2} \left( \sum_{n \in S_{\hat{x}_2}[M]} |g(n, \hat{x}_2)| \right) d\mu_2 < \infty$$

*gilt, so ist* $g$ *bzgl.* $\mu$ *quasiintegrabel, und der Satz von Fubini liefert*

$$\int_M g(\boldsymbol{x}) \, d(\mu_1 \times \mu_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left( \int_{S_n[M]} g(n, x_2) \, d\mu_2 \right) = \int_{X_2} \left( \sum_{n \in S_{\hat{x}_2}[M]} g(n, \hat{x}_2) \right) d\mu_2.$$

Zu diesen Aussagen vergleiche man auch [10] und [84]. Eine im obigen Sinne oft anwendbare Konkretisierung lautet[46]

**Korollar 1.11.7** *Sind $\xi_n$ ($n \in \mathbb{N}$) nicht negative Zufallsvariablen, und besteht mindestens eine der Beziehungen $\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right] < \infty$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_n] < \infty$, so gilt*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_n]. \tag{1.45}$$

## 1.12 Formale Verallgemeinerungen

Die Resultate des Abschn. 1.11 sind leicht auf den Fall endlich vieler Mengen $X_1, \ldots, X_m$ übertragbar. Für $m = 3$ etwa ist ein $X_1$-Schnitt $S_{\hat{x}_1}[M]$ einer Menge $M \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ als Projektion $p_{\{2,3\}}\left[M|_{\hat{x}_1}\right] \subset X_2 \times X_3$ definiert, wobei $M|_{\hat{x}_1}$ für festes $\hat{x}_1$ in der Form $M|_{\hat{x}_1} = \{(\hat{x}_1, x_2, x_3) \in M : (x_2, x_3) \in X_2 \times X_3\}$ gegeben ist. Sind $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$ Maßräume ($t \in \{1, 2, 3\}$), so ist über der Produktalgebra $\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$ entsprechend den früheren Resultaten in eindeutiger Weise ein Maß $\mu_2 \otimes \mu_3$ definiert, das für Quader $Q = A_2 \times A_3$ mit $A_2 \in \mathcal{A}_2$, $A_3 \in \mathcal{A}_3$ die Relation $\mu_2 \otimes \mu_3(Q) = \mu_2(A_2) \cdot \mu_3(A_3)$ erfüllt. Gemäß Satz 1.11.4 gibt es dann ein Maß $\nu$ über der Produkt-$\sigma$-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$, das mit $f_A^{(1)}(x_1) := \mu_2 \otimes \mu_3\left(p_{\{2,3\}}\left[A|_{x_1}\right]\right)$ vermöge

$$\nu(A) = \int_{X_1} f_A^{(1)}(x_1)\, d\mu_1$$

definiert ist ($A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}$). Dieses Maß ist eindeutig bestimmt[47] und erfüllt für Quader $Q_A = A_1 \times A_2 \times A_3$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i \ \forall\, i \in \{1, 2, 3\}$ die Relation

$$\nu(Q_A) = \bigotimes_{t=1}^{3} \mu_t(A_t).$$

Analog dazu kann man die Existenz eines Maßes $\nu$ über der Produkt-$\sigma$-Algebra $\bigotimes_{t=1}^{m} \mathcal{A}_t$ des cartesischen Produktes endlich vieler Maßräume $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$, $t = 1, \ldots, m$, konstatieren, das eindeutig bestimmt ist und für Quader aus $\prod_{t=1}^{m} \mathcal{A}_t$ dem Produkt des Einzelmaße gleicht.

Die Definition endlicher cartesischer Produkte läßt sich nun – ebenso wie der Begriff der Zylindermengen – leicht auf nicht endliche Indexmengen verallgemeinern. Dazu beachte man, daß ein Produkt der Form $\prod_{t=1}^{m} X_t$ isomorph ist zur Menge aller Abbildungen $f$ der Indexmenge $T = \{1, \ldots, m\}$ in die Vereinigung $\bigcup_{t=1}^{m} X_t$ mit $f(t) \in X_t \ \forall\, t \in T$, so daß

[46] Siehe dazu die Bemerkung vor Beginn des Abschn. 1.10.

[47] Beweise sind ähnlich wie im vorigen Abschnitt zu führen.

man als alternative Schreibweise

$$\prod_{t=1}^{m} X_t = \left\{ f : \{1, \ldots, m\} \to \bigcup_{t=1}^{m} X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \ \forall\, t \in \{1, \ldots, m\} \right\}$$

verwenden kann. Diese Schreibweise ist auch für nicht endliche Indexmengen geeignet: Zu einer beliebigen (ggf. überabzählbaren) nicht leeren Indexmenge $T$ bezeichne $X_t$ für jedes $t \in T$ eine beliebige Menge. Das **cartesisches Produkt der Mengen $X_t$** ist dann die Abbildungsmenge

$$\prod_{t\in T} X_t = \left\{ f : T \to \bigcup_{t\in T} X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \ \forall\, t \in T \right\}. \tag{1.46}$$

Im allgemeinen geht man von topologischen Räumen aus, daher sprechen wir im Folgenden auch meist von *Räumen* $X_t$.

**Definition 1.12.1** *Es bezeichne $T$ eine Indexmenge und $\prod_{t\in T} X_t = F$ die vermöge (1.46) definierte Menge aller Abbildungen von $T \to \bigcup_{t\in T} X_t$ mit $f(t) \in X_t \ \forall\, t \in T$. Sind dann zu endlich vielen Indices $t_1, \ldots, t_\ell$ aus $T$ die Mengen $M_{t_j} \subset X_{t_j}$, $j = 1, \ldots, \ell$, Teilmengen der zugehörigen Räume und bezeichnet $Q_M \subset \prod_{j=1}^{\ell} X_{t_j}$ den verallgemeinerten Quader mit den Seiten $M_{t_1}, \ldots, M_{t_\ell}$, so wird*

$$Z_{t_1,\ldots,t_\ell}(Q_M) = \left\{ f \in \prod_{t\in T} X_t : f(t_j) \in M_{t_j} \ \forall\, j \in \{t_1, \ldots, t_\ell\} \right\}$$

*als **Zylindermenge in $\prod_{t\in T} X_t$ mit der Basis $Q_M$ über den Koordinaten $t_1, \ldots, t_\ell$** bezeichnet. Für eine beliebige Menge $B^{(\ell)} \subset \prod_{j=1}^{\ell} X_{t_j}$ (die also nicht notwendig einen verallgemeinerten Quader darstellt) heißt entsprechend*

$$Z_{t_1,\ldots,t_\ell}\left(B^{(\ell)}\right) = \left\{ f \in \prod_{t\in T} X_t : \left(f(t_1), \ldots, f(t_\ell)\right) \in B^{(\ell)} \right\}$$

***Zylindermenge in $\prod_{t\in T} X_t$ mit der Basis $B^{(\ell)}$ über den Koordinaten $t_1, \ldots, t_\ell$**.*

Im Falle einer abzählbaren Indexmenge $T \subset \mathbb{N}$ und der Festlegung $X_t = X \ \forall\, t \in T$ stellt $\prod_{t\in T} X_t = F$ den Raum aller Folgen $\{x_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $X$ dar. Ein Beispiel hierfür liefert der Elementarereignisraum $\Omega = \prod_{t\in T} \tilde{\Omega}_t$ mit $\tilde{\Omega}_t = \{1, \ldots, 6\} \ \forall\, t \in T$ eines Experimentes, in dem ein Würfel abzählbar oft geworfen wird – etwa mit dem Ziel, eine „6“ zu würfeln (wozu ja ggf. ein beliebig häufiges Würfeln erforderlich wird).

Es seien nun $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$ Maßräume ($t \in T$). In direkter Verallgemeinerung des Falles $T = \{1, 2\}$ können wir für jedes *endliche* $T = \{1, \ldots, m\}$ Folgendes sagen:

1. Die von allen Quadern $\prod_{t\in T} A_t$ mit $A_t \in \mathcal{A}_t$ erzeugte $\sigma$-Algebra $\sigma\left(\prod_{t=1}^m \mathcal{A}_t\right) = \bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ ist die Produkt-$\sigma$-Algebra des cartesischen Produktes $\prod_{t\in T} X_t$ der Räume $X_1, \ldots, X_m$, so daß $[\prod_{t\in T} X_t,\ \sigma\left(\prod_{t\in T} \mathcal{A}_t\right)]$ ein meßbarer Raum ist.
2. Das vermöge $\nu\left(A_1 \times \ldots \times A_m\right) = \mu_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mu_m(A_m)$ für $A_t \in \mathcal{A}_t,\ t \in T$ nach Satz 1.11.4 eindeutig bestimmte $\sigma$-endliche Maß $\nu = \bigotimes_{t\in T} \mu_t$ über $\sigma\left(\prod_{t\in T} \mathcal{A}_t\right)$ macht diesen meßbaren Raum zu einem Produkt-Maßraum
$$\left[\prod_{t\in T} X_t,\ \bigotimes_{t\in T} \mathcal{A}_t,\ \bigotimes_{t\in T} \mu_t\right] =: \bigotimes_{t\in T} [X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]\,,$$
den man als den **Produktraum der Maßräume $[X_t, \mathcal{A}_t, \mu_t]$** $(t = 1, \ldots, m)$ bezeichnet.
3. Die $\sigma$-Algebra $\bigotimes_{t\in T} \mathcal{A}_t$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra, bzgl. der alle Projektionen $p_K^T$ für $K \subset T$ meßbar sind.

Auch für eine *beliebige*, nicht notwendig endliche, Indexmenge $T$ bezeichne $p_K^T$ für $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ die Projektion des cartesischen Produktes $\prod_{t\in T} X_t$ in das cartesische Produkt der Mengen $X_{k_1}, \ldots, X_{k_m}$. Man realisiert leicht, daß mit einer weiteren Teilsequenz $L \subset K$ mit $|L| = \ell < |K| = m$ die Verknüpfung (Hintereinanderausführung)
$$p_L^T = p_L^K \circ p_K^T$$
gilt. Des weiteren können wir Folgendes feststellen.

**Lemma 1.12.1** *Für $K = \{1, \ldots, m\}$ gilt*
$$\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t = \sigma\left(\bigcup_{t=1}^m \left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]\right) = \sigma\left(\bigcup_{L\subset K} \left(p_L^K\right)^{-1}\left[\prod_{t\in L} \mathcal{A}_t\right]\right). \tag{1.47}$$

*Beweis* Jede Menge der Form $\left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[A_t]$ ist offenbar eine Zylindermenge, und der Durchschnitt solcher Mengen bestimmt Quader in Teilräumen von $\prod_{t=1}^m X_t$. Daraus folgt, daß $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ in der von der Vereinigung $\bigcup_{t=1}^m \left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]$ erzeugten $\sigma$-Algebra enthalten ist ($K = \{1, \ldots, m\}$). Andererseits kann jede Zylindermenge $\left(p_{\{t_0\}}^K\right)^{-1}[A_{t_0}]$ als (verallgemeinerter) Quader mit Seiten $\left(p_{\{t_0\}}^K\right)^{-1}[A_{t_0}]$ sowie $\left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[X_t]$ für $t \neq t_0$ angesehen werden, d. h. jedes Element aus $\bigcup_{t=1}^m \left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]$ ist im Falle $A_t \in \mathcal{A}_t\ \forall\, t$ auch in $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t$ enthalten. Es gilt also $\bigotimes_{t=1}^m \mathcal{A}_t = \sigma\left(\bigcup_{t=1}^m \left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]\right)$. Für $L \subset K$ sind die Zylindermengen $\left(p_L^K\right)^{-1}[\prod_{t\in L} A_t] = \left(p_L^K\right)^{-1}[Q_A]$ auch darstellbar als $\left(p_L^K\right)^{-1}\left[\prod_{t\in L} A_t\right] = \left\{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{t=1}^m X_t : x_{t_j} \in A_{t_j}\ \forall\, t_j \in L\right)$, und jede solche Zylindermenge ist Durchschnitt von Mengen der Form $\left(p_{\{t\}}^K\right)^{-1}[A_t]$. □

Diese Zusammenhänge werden für nicht endliche Indexmengen $T$ zur Definition der Produkt-$\sigma$-Algebra eines nicht endlichen cartesischen Produktes herangezogen. Dabei beachte man, daß aus (1.12.1) die Meßbarkeit aller Projektionen $p_L^K$ für $|K| > |L| > 1$ folgt. Wir beweisen zunächst folgende Aussage.

**Satz 1.12.2** *Es bezeichne $T$ eine beliebige Indexmenge. Für alle $t \in T$ seien $[X_t, \mathcal{A}_t]$ meßbare Räume. $F = \{f : T \to \bigcup_{t\in T} X_t \text{ mit } f(t) \in X_t \ \forall\, t \in T\}$ sei die zum cartesischen Produkt $\prod_{t\in T} X_t$ der $X_t$ isomorphe Abbildungsmenge, und $\mathcal{Z}$ bezeichne das System aller Zylindermengen der Form*

$$Z_{\{t_1,\ldots,t_m\}}(Q_A) = \left\{f \in F : f(t_j) \in A_{t_j} \ \forall\, j \in \{1,\ldots,m\}\right\} \tag{1.48}$$

*mit $0 < m < \infty$, $A_{t_j} \in \mathcal{A}_{t_j}$ für $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $Q_A = \prod_{j=1}^m A_{t_j}$; dann gilt: Die von dem System $\bigcup_{t\in T}\left(p^T_{\{t\}}\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]$ erzeugte $\sigma$-Algebra ist mit der von allen Zylindermengen der Form (1.48) erzeugten $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{Z})$ identisch.*

*Beweis* $\sigma(\mathcal{Z})$ fällt mit der von dem Mengensystem $\bigcup_{\substack{K\subset T\\ 0<|K|<\infty}} \left(p^T_K\right)^{-1}[\bigotimes_{t\in K}\mathcal{A}_t]$ erzeugten $\sigma$-Algebra zusammen; dies ist unmittelbar aus der Bedeutung der jeweiligen Elementmengen ersichtlich. Zu beweisen bleibt daher die Gleichung

$$\sigma\left(\bigcup_{t\in T}\left(p^T_{\{t\}}\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]\right) = \sigma\left(\bigcup_{\substack{K\subset T\\ 0<|K|<\infty}} \left(p^T_K\right)^{-1}\left[\bigotimes_{t\in K}\mathcal{A}_t\right]\right).$$

Da auf der rechten Seite alle endlichen Teil-Indexmengen berücksichtigt sind, ist die links stehende $\sigma$-Algebra in der rechts stehenden enthalten. Um die umgekehrte Relation zu zeigen, betrachte man eine Zylindermenge

$$U \in \bigcup_{\substack{K\subset T\\ 0<|K|<\infty}} \left(p^T_K\right)^{-1}\left[\bigotimes_{t\in K}\mathcal{A}_t\right],$$

also eine Menge $U$ der Form $U = \left(p^T_K\right)^{-1}[V]$ mit $V \in \bigotimes_{t\in K}\mathcal{A}_t$ (für eine nichtleere endliche Teil-Indexmenge $K \subset T$). Da $\bigcup_{t=1}^m \left(p^K_{\{t\}}\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]$ Erzeugendensystem von $\bigotimes_{t\in K}\mathcal{A}_t$ ist, hat man $V \in \bigcup_{t=1}^m \left(p^K_{\{t\}}\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]$. Demnach gibt es ein $t_0 \in K$ und ein $A_{t_0} \in \mathcal{A}_{t_0}$ mit $V = \left(p^K_{t_0}\right)^{-1}[\mathcal{A}_{t_0}]$. Das bedeutet

$$U = \left(p^T_K\right)^{-1}[V] = \left(p^K_{t_0}\circ p^T_K\right)^{-1}[A_{t_0}] = \left(p^T_{t_0}\right)^{-1}[A_{t_0}],$$

aufgrund der Meßbarkeit aller Projektionen also

$$U = \left(p^T_{t_0}\right)^{-1}[V] \in \sigma\left(\bigcup_{t\in T}\left(p^T_{\{t\}}\right)^{-1}[\mathcal{A}_t]\right). \qquad \square$$

Damit kann für eine nicht endliche Indexmenge $T$ die zum Produkt der Mengen $X_t$, $t \in T$, gehörende Produkt-$\sigma$-Algebra ähnlich wie im endlich-dimensionalen Falle wie folgt definiert werden.

**Definition 1.12.2** *Es bezeichne $T$ eine beliebige Indexmenge. Für alle $t \in T$ seien $[X_t, \mathcal{A}_t]$ meßbare Räume. $F = \{f : T \to \bigcup_{t \in T} X_t$ mit $f(t) \in X_t\ \forall\, t \in T\}$ sei die zum cartesischen Produkt $\prod_{t \in T} X_t$ der $X_t$ isomorphe Abbildungsmenge, und $\mathcal{Z}$ bezeichne das System aller Zylindermengen*

$$Z_{\{t_1,\ldots,t_\ell\}}(Q_A) = \left\{f \in F : f(t_j) \in A_{t_j}\ \forall\, j \in \{1,\ldots,\ell\}\right\} \tag{1.49}$$

*mit $\ell \in \mathbb{N}$, $A_{t_j} \in \mathcal{A}_{t_j}$ für $j \in \{1,\ldots,\ell\}$ und $Q_A = \prod_{j=1}^{\ell} A_{t_j}$. Dann heißt die von $\mathcal{Z}$ erzeugte $\sigma$-Algebra die* ***Produkt-$\sigma$-Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ des cartesischen Produktes*** *der meßbaren Räume $[X_t, \mathcal{A}_t]$, und es gilt aufgrund der Aussagen des Lemmas 1.12.1 und des Satzes 1.12.2*

$$\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t = \sigma\left(\prod_{t=1}^{m} \mathcal{A}_t\right) = \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \left(p_{\{t\}}^{T}\right)^{-1} [\mathcal{A}_t]\right). \tag{1.50}$$

*Der meßbare Raum*

$$\left[\prod_{t \in T} X_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t\right] =: \bigotimes_{t \in T} [X_t, \mathcal{A}_t]$$

*heißt* ***Produktraum*** *der $[X_t, \mathcal{A}_t]$.*

**Bemerkung 1.12.1** *$\mathcal{Z}$ bezeichnet die Gesamtheit aller derjenigen verallgemeinerten Quader $\prod_{t \in T} A_t$ aus $\prod_{t \in T} X_t$, deren Seiten $A_t \in \mathcal{A}_t$ bis auf endlich viele gleich $X_t$ sind, die also $A_t = X_t$ für $t \in T \setminus \{t_1,\ldots,t_\ell\}$ mit $\ell \in \mathbb{N}$ erfüllen und daher Zylindermengen sind. Die $\sigma$-Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ wird von $\mathcal{Z}$ erzeugt. Diese Eigenschaften sind von besonderer Wichtigkeit für die wahrscheinlichkeitstheoretische Einordnung von solchen Zufallsexperimenten, bei denen ein Ereignis aus unendlich vielen unabhängigen Einzelereignissen besteht, wie etwa im Falle des bereits erwähnten Beispiels abzählbar oft geworfener Würfel (…mit dem Ziel, eine „6" zu würfeln, s. Abschn. 1.12): Führen z. B. die meßbaren Elementarereignismengen[48] $A_t \in \mathcal{A}_t$ für $t = 1,\ldots,\ell-1$ zu Einzelergebnissen $\neq 6$, während beim $\ell$-ten Wurf eine 6 erzielt wurde (Einzelereignis $A_\ell$), so ist $\prod_{j=1}^{\ell-1} A_i \times A_\ell \times \prod_{t>\ell} \tilde{\Omega}_t$ ein Ereignis aus $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ für $\Omega = \prod_{t \in T} \tilde{\Omega}_t$, $\tilde{\Omega}_t = X_t$.* □

Das in dieser Bemerkung angesprochene Beispiel legt den Wunsch nahe, im Falle von Wahrscheinlichkeitsräumen $\left[\tilde{\Omega}_t, \mathcal{A}_t, \mathbb{P}_t\right]$ und abzählbarer Indexmenge $T$ einem Ereignis der Form

$$E = \tilde{\Omega}_1 \times \ldots \times \tilde{\Omega}_{t_1-1} \times A_{t_1} \times \tilde{\Omega}_{t_1+1} \times \ldots \times \tilde{\Omega}_{t_\ell-1} \times A_{t_\ell} \times \tilde{\Omega}_{t_\ell+1} \times \tilde{\Omega}_{t_\ell+2} \times \ldots$$

die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(E) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}\left(A_{t_j}\right)$ zuzuordnen. Daß dies möglich ist, daß also ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ über der $\sigma$-Algebra $\bigotimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ von $\Omega = \prod_{t \in T} \tilde{\Omega}_t$ existiert, welches als Fortsetzung eines vermöge $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_\ell}(A) = \bigotimes_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}(A_{t_j})$ für alle $A \in \bigotimes_{j=1}^{\ell} \mathcal{A}_{t_j}$ definierten Maßes interpretierbar und eindeutig bestimmt wäre, ist keineswegs trivial. Zwar

[48] Die Konkretisierung der Begriffe erfolgt in Kap. 2.

sind die Werte $\mathbb{P}_{t_1,\ldots,t_\ell}(A)$ im Sinne induktiv erweiterter Aussage des Satzes 1.11.4 wohldefiniert, und man kann (im Falle von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_t$) anstelle von $\mathbb{P}(E) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}\left(A_{t_j}\right)$ wegen $\mathbb{P}_t\left(\tilde{\Omega}_t\right) = 1$ auch $\mathbb{P}(E) = \prod_{\substack{t\in T, t\neq t_j,\\ j=1,\ldots,\ell}} \mathbb{P}_t\left(\tilde{\Omega}_t\right) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}_{t_j}\left(A_{t_j}\right)$ schreiben, doch bedarf es eines Beweises für die Existenz und Eindeutigkeit von $\mathbb{P}$ bei nicht endlicher Indexmenge $T$. Die Unmöglichkeit der Konstruktion eines entsprechenden Maßes $\mu$ im Falle nicht total-endlicher Maße $\mu_t$ ist offensichtlich, denn $\mu(E)$ als Maß einer Zylindermenge der Form (1.48) wäre stets unendlich. Wir gehen auf diese Fragen im nächsten Kapitel ein (s. Abschn. 2.4).

http://www.springer.com/978-3-642-39631-1

Grundlagen der Warteschlangentheorie
Baum, D.
2013, XI, 602 S. 37 Abb., Hardcover
ISBN: 978-3-642-39631-1