Kapitel 2

Markov-Ketten

2

2

Markov-Ketten

Definition und Grundlagen

2.1

Ein zeit-diskreter stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit abzählbarem Zustandsraum I heißt **Markov-Kette**, wenn für alle Zeitpunkte $n \in \mathbb{N}_0$ und alle Zustände $i_0,\ldots,i_{n-1},i_n,i_{n+1} \in I$ die folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0,\ldots,X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i_n) \\ &\quad = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

erfüllt ist. Sie wird als **Markov-Eigenschaft** bezeichnet und drückt die Gedächtnislosigkeit des Prozesses aus. Sie besagt, dass die zukünftige Entwicklung des Prozesses nur von dem zuletzt beobachteten Zustand abhängt und von der sonstigen Vorgeschichte unabhängig ist. Liegen demzufolge die Werte $i_0,\ldots,i_n$ der Zufallsvariablen $X_0,\ldots,X_n$ vor, so hängt die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsvariable X_{n+1} den Wert i_{n+1} annimmt, nur von i_n und nicht von $i_0,\ldots,i_{n-1}$ ab.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$, mit der bei Vorliegen von i_n der Nachfolgezustand i_{n+1} angenommen wird, heißt **Übergangswahrscheinlichkeit** des Prozesses. Sind die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig vom Zeitpunkt n des Übergangs, so spricht man von einer **homogenen** Markov-Kette; andernfalls von einer **inhomogenen** Markov-Kette.

Das folgende Glücksspiel ist ein einfaches Beispiel einer homogenen Markov-Kette.

Beispiel (Glücksspiel) **2.1**

Zwei Spieler (Spieler 1 und 2) vereinbaren folgendes Glücksspiel: Ergibt der Wurf mit einer Münze Kopf (Wahrscheinlichkeit p), so erhält Spieler 1 eine Geldeinheit (GE) von Spieler 2, andernfalls (Wahrscheinlichkeit $1-p$) zahlt er eine GE an Spieler 2. Spieler 1 verfügt über ein Anfangskapital von 4 GE, Spieler 2 über ein Anfangskapital von 2 GE. Das Spiel ist beendet, sobald einer der beiden Spieler ruiniert ist (d.h. das Kapital 0 besitzt).

Bei der Darstellung des Spiels können wir uns auf die Sicht des Spielers 1 beschränken. Hat dieser nach n Spielrunden das Kapital X_n, so hat Spieler 2 das Kapital $Y_n = 6 - X_n$, da beide Spieler zusammen in jeder Runde über ein Kapital von 6 GE verfügen.

Karl-Heinz Waldmann, U. M. Stocker, *Stochastische Modelle,* EMIL@A-stat,
DOI 10.1007/978-3-642-32912-8_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Wir zeigen nun, dass die Folge $X_0, X_1, \ldots$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{0, 1, \ldots, 6\}$ ist. Dabei gehen wir in zwei Schritten vor.

Zunächst beschreiben wir das Ergebnis des n-ten Münzwurfs durch eine Zufallsvariable Z_n, die den Wert $+1$ annimmt, wenn das Ergebnis Kopf ist, und den Wert -1, wenn das Ergebnis Zahl ist. Die Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ der Münzwürfe bildet den eigentlichen stochastischen Kern des Spiels; sie ist unabhängig und identisch verteilt mit $P(Z = 1) = p$ und $P(Z = -1) = 1 - p$.

Ausgehend vom Anfangskapital $X_0 = 4$ (d.h. $P(X_0 = 4) = 1$) verfügt Spieler 1 nach n Spielrunden über das Kapital $X_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} Z_j$, sofern das Spiel nicht vorher schon beendet ist. Man überprüft leicht, dass sich X_n zusammensetzt aus dem Kapital X_{n-1} nach $n-1$ Spielrunden und dem Ergebnis Z_n des n-ten Spiels. Hieraus folgt für X_n die rekursive Beziehung $X_n = X_{n-1} + Z_n$. Ein möglicher Spielverlauf (und damit eine Realisation des Prozesses $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ist in Abb. 2.1 dargestellt.

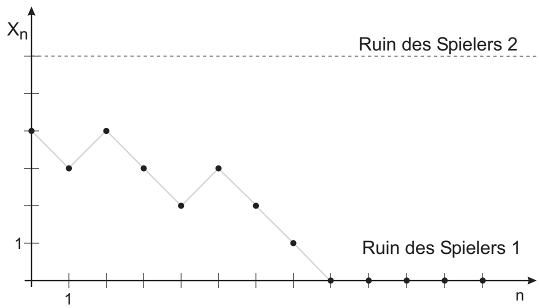


Abb. 2.1. Eine Realisation des Prozesses $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Das Spiel ist nach der Spielrunde beendet, nach der X_n erstmals einen der beiden Werte 0 oder 6 annimmt. Sei N diese Spielrunde. N hängt vom Spielverlauf ab und ist damit selbst eine Zufallsvariable. Formal lässt sich N in der Form $N = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in \{0, 6\}\}$ darstellen. N nimmt Werte in $\mathbb{N}$ an (Dauer des Spiels) oder ist ∞, wenn das Spiel nicht abbricht.

Mit Hilfe von N lässt sich der Spielverlauf durch die Folge $X_0, X_1, \ldots, X_N$ beschreiben. Andererseits besteht eine Markov-Kette aus einer unendlichen Folge $X_0, X_1, \ldots$ von Zufallsvariablen. Die Fortsetzung können wir leicht erreichen, indem wir das eigentlich beendete Spiel weiterlaufen lassen und dabei sicherstellen, dass ein einmal angenommener Zustand 0 oder 6 nicht mehr verlassen und damit für immer beibehalten wird.

Kommen wir nun zum Übergangsverhalten des Prozesses. Wir haben bereits gesehen, dass das Kapital X_{n+1} nach $n+1$ Spielrunden lediglich vom Kapital X_n nach n Spielrunden und dem Ausgang Z_{n+1} des $(n+1)$-ten Spiels abhängt.

Damit ist die Markov-Eigenschaft (vgl. (2.1)) erfüllt und wir müssen nur noch die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$ festlegen:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p & \text{für } i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ und } j = i+1 \\ 1-p & \text{für } i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ und } j = i-1 \\ 1 & \text{für } i \in \{0, 6\} \text{ und } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei laufendem Spiel (Zustände 1-5) entspricht die Erhöhung um 1 (Wahrscheinlichkeit p) einem Gewinn, die Verringerung um 1 (Wahrscheinlichkeit $1-p$) einem Verlust. Bei abgeschlossenem Spiel (Zustände 0, 6) geht die Markov-Kette mit Wahrscheinlichkeit 1 in denselben Zustand über. $\Diamond$

Wir kommen nun zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Markov-Kette. Vorbereitend zeigen wir

Satz **2.2**

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i_0, \ldots, i_{n-1}, i_n \in I$ gilt

$$P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)$$
$$= P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $A_0, \ldots, A_{n-1}, A_n \subset I$ gilt

$$P(X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n) = \sum_{i_0 \in A_0} \ldots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0) \cdot$$
$$\cdot P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $j \in I$ gilt

$$P(X_n = j) = \sum_{i_0 \in I} P(X_0 = i_0) \cdot$$
$$\cdot \sum_{i_1 \in I} \ldots \sum_{i_{n-1} \in I} P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) \ldots P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).$$

Beweis: Durch Bedingen nach $\{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$ und Ausnutzen der Markov-Eigenschaft erhält man zunächst

$$\begin{aligned} &P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \\ &\quad = P(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}) \\ &\quad = P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}). \end{aligned}$$

(i) folgt nun durch wiederholte Anwendung dieses Schrittes.

Überträgt man die Vorgehensweise auf Ereignisse $A_0, \ldots, A_n \subset I$, so erhält man (ii) aus (i) und

$$P(X_0 \in A_0, \ldots, X_n \in A_n) = \sum_{i_0 \in A_0} \ldots \sum_{i_n \in A_n} P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n).$$

Wendet man (ii) speziell auf $A_0 = I, \ldots, A_{n-1} = I, A_n = \{j\}$ an, so folgt (iii). $\square$

Startet eine Markov-Kette in einem festen Zustand i_0, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $P(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)$, mit der sich die Realisation $i_0, i_1, \ldots, i_n$ einstellt, nach Satz 2.2(i) als Produkt der zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten $P(X_j = i_j \mid X_{j-1} = i_{j-1})$. Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit $P(X_n = i_n)$, mit der sich die Markov-Kette zum Zeitpunkt n im Zustand i_n aufhält, interpretierbar als die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Realisationen $i_0, i'_1, \ldots, i'_{n-1}, i_n$, die, ausgehend von i_0, nach n Schritten in i_n enden. Zur Veranschaulichung dient wieder

2.3 **Beispiel** (Bsp. 2.1 - Forts. 1)

Der in Abb. 2.1 dargestellte Spielverlauf hat nach Satz 2.2(i) die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &P(X_0 = 4, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 2, X_7 = 1, X_8 = 0) \\ &\quad = (1-p)p(1-p)(1-p)p(1-p)(1-p)(1-p), \end{aligned}$$

die man der Übersichtlichkeit halber zusammenfassen kann zu $p^2(1-p)^6$. Ist man lediglich an der Wahrscheinlichkeit $P(X_8 = 0)$ eines Ruins von Spieler 1 nach 8 Spielrunden interessiert, so hat man nach Satz 2.2(iii) die Wahrscheinlichkeiten aller Spielverläufe $(i_0, \ldots, i_8)$ mit $i_8 = 0$ zu berechnen und diese zu addieren. Abb. 2.2 zeigt das Wegenetz, das von links nach rechts zu durchlaufen ist.

Diese Form der Berechnung von $P(X_8 = 0)$ wird allerdings erschwert durch die Vielzahl (insgesamt 18) der auszuwertenden Spielverläufe. Behelfen kann

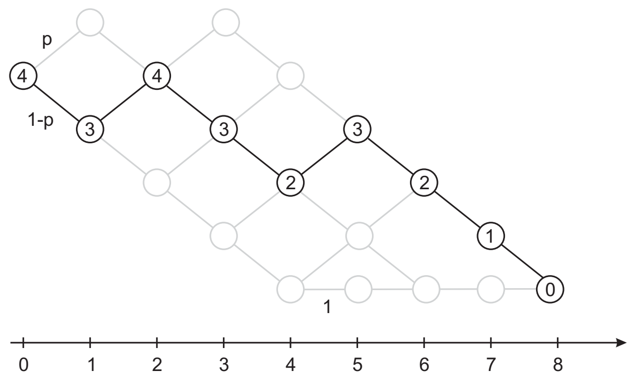


Abb. 2.2. Darstellung der möglichen Spielverläufe mit $X_8 = 0$

man sich durch die Zusatzüberlegung, dass von den acht Münzwürfen höchstens zwei Kopf ergeben dürfen. Mit Hilfe der Binomialverteilung erhält man dann $P(X_8 = 0) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^5 + 13p^2(1-p)^6$. Aber auch solche Zusatzüberlegungen sind nur in Spezialfällen geeignet, das zeitliche Verhalten einer Markov-Kette zu beschreiben. Wesentlich einfacher ist die Beschreibung mit Hilfe von Matrizen, der wir uns nun zuwenden. $\Diamond$

Wir erinnern uns, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ einer homogenen Markov-Kette unabhängig von n sind. Zusammen mit Satz 2.2 folgt dann, dass sich die zeitliche Entwicklung einer homogenen Markov-Kette vollständig beschreiben lässt durch ihre **Anfangswahrscheinlichkeiten** $\pi_i(0) := P(X_0 = i)$, $i \in I$, und ihre **Übergangswahrscheinlichkeiten** $p_{ij} := P(X_1 = j \mid X_0 = i)$, $i, j \in I$. Diese fasst man gewöhnlich zu einer Matrix $P = (p_{ij})$ (mit $p_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in I$ und $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1$) zusammen. P heißt **Übergangsmatrix** der Markov-Kette.

Sei P^n das n-fache Produkt der Matrix P mit sich selbst, also $P^1 = P$ und $P^n = P^{n-1}P$ für $n > 1$. Die Elemente $p_{ij}^{(n)}$ von P^n stimmen nach Satz 2.2 mit $P(X_n = j \mid X_0 = i)$ überein und werden als **n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten** bezeichnet,

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{i_1 \in I} \cdots \sum_{i_{n-1} \in I} p_{i,i_1} \cdots p_{i_{n-1},j}.$$

Seien $\pi_j(n) = P(X_n = j)$, $j \in I$, die **Zustandswahrscheinlichkeiten** der Markov-Kette zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt mit $P(X_n = j) =$

$\sum_{i \in I} P(X_0 = i) P(X_n = j \mid X_0 = i)$

$$\pi_j(n) = \sum_{i \in I} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}. \tag{2.2}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten $\pi_j(n)$ fassen wir zu einem Zeilenvektor $\pi(n)$, der **Verteilung der Zustände zum Zeitpunkt** n, zusammen. Dann geht (2.2) über in

$$\pi(n) = \pi(0) P^n \tag{2.3}$$

oder in die rekursive Form

$$\pi(n) = \pi(n-1) P.$$

Die Verteilung $\pi(n)$ der Zustände einer homogenen Markov-Kette zum Zeitpunkt n ergibt sich somit aus der Anfangsverteilung $\pi(0)$ multipliziert mit der n-Schritt Übergangsmatrix P^n oder rekursiv aus der Verteilung $\pi(n-1)$ zum Zeitpunkt $n-1$ multipliziert mit der Übergangsmatrix P. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $P(X_n = j)$ ergeben sich dann wieder aus der elementweisen Betrachtung $P(X_n = j) = \pi_j(n) = (\pi(0) P^n)_j$ dieser Zeilenvektoren.

2.4 **Beispiel** (Bsp. 2.1 - Forts. 2)

Das Startkapital von 4 GE legt die Anfangsverteilung fest:

$$\pi(0) = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Die Übergangsmatrix $P = (p_{ij})$ lautet

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Liegt dem Glücksspiel eine faire Münze ($p = 1/2$) zugrunde, so ergibt sich für $\pi(n)$ der in Tab. 2.1 dargestellte Verlauf.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X_8 = 0) = \pi_0(8)$ eines Ruins von Spieler 1 nach 8 Spielrunden ist somit 0.18. Weiter lässt sich bereits erahnen, dass das Spiel

i	$\pi_i(0)$	$\pi_i(1)$	$\pi_i(2)$	$\pi_i(3)$	$\pi_i(4)$	$\pi_i(5)$	$\pi_i(6)$	$\pi_i(7)$	$\pi_i(8)$
6	0.00	0.00	0.25	0.25	0.38	0.38	0.45	0.45	0.51
5	0.00	0.50	0.00	0.25	0.00	0.16	0.00	0.11	0.00
4	1.00	0.00	0.50	0.00	0.31	0.00	0.22	0.00	0.16
3	0.00	0.50	0.00	0.38	0.00	0.28	0.00	0.21	0.00
2	0.00	0.00	0.25	0.00	0.25	0.00	0.20	0.00	0.16
1	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.13	0.00	0.10	0.00
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.06	0.06	0.13	0.13	0.18

i	$\pi_i(9)$	$\pi_i(10)$	$\pi_i(15)$	$\pi_i(20)$	$\pi_i(25)$	$\pi_i(30)$	$\pi_i(40)$	$\pi_i(50)$	$\pi_i(100)$
6	0.51	0.55	0.60	0.64	0.65	0.66	0.67	0.67	0.67
5	0.08	0.00	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.12	0.00	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
3	0.16	0.00	0.07	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.12	0.00	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
1	0.08	0.00	0.03	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
0	0.18	0.21	0.27	0.31	0.32	0.33	0.33	0.33	0.33

Tabelle 2.1. Berechnung von $\pi(n)$ für $n = 1, \ldots, 100$

mit Wahrscheinlichkeit 0.33 mit dem Ruin von Spieler 1 endet und mit Wahrscheinlichkeit 0.67 mit dem Ruin von Spieler 2. Eine Überprüfung (und Präzisierung) erfolgt in Abschnitt 2.2. Siehe auch Abschnitt 2.6. $\diamondsuit$

Die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette ist eine **stochastische Matrix** (siehe auch Abschnitt A.4): die Einträge p_{ij} sind nichtnegativ, die Zeilensummen $\sum_{j \in I} p_{ij}$ sind 1. Aufgrund dieser Eigenschaften sind die Einträge $p_{ij} = 0$ redundant und können bei einer Veranschaulichung der Übergänge des Prozesses weggelassen werden. Eine solche Veranschaulichung erfolgt mit Hilfe eines **Übergangsgraphen**. Jeder Knoten (Punkt) des Graphen stellt einen Zustand der Markov-Kette dar, jeder Pfeil einen Übergang mit positiver Wahrscheinlichkeit. Die Bewertung des Pfeils ergibt sich aus der zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeit.

2.5 **Beispiel** (Bsp. 2.1 - Forts. 3)

Für unser Glücksspiel erhalten wir den folgenden Übergangsgraphen

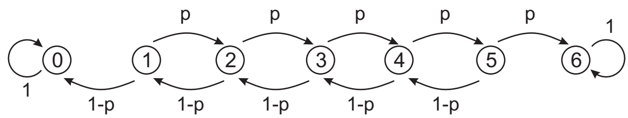


Abb. 2.3. Übergangsgraph des Glücksspiels

Man erkennt unmittelbar, dass die Zustände 0 und 6 nicht mehr verlassen werden können und dass sie von jedem der übrigen Zustände in einem oder mehreren Schritten erreicht werden können; eine Struktur, auf die wir später noch näher eingehen werden. $\Diamond$

In den nächsten Abschnitten werden wir uns überwiegend mit homogenen Markov-Ketten befassen. Daher sprechen wir im folgenden kurz von einer Markov-Kette, wenn wir eine homogene Markov-Kette meinen. Des weiteren wird die Markov-Kette häufig in einem festen Anfangszustand $i \in I$ starten. Daher schreiben wir abkürzend

$$P_i(A) := P(A \mid X_0 = i)$$

für beliebige Ereignisse A der Markov-Kette (mit $P(X_0 = i) > 0$). Entsprechend sei $E_i(T) := E(T \mid X_0 = i)$ der bedingte Erwartungswert einer Zufallsvariablen T bei Start der Markov-Kette im Zustand $i \in I$. Siehe auch Abschnitt A.1.

2.2 Ersteintrittszeiten und Absorptionsverhalten

Einen Zustand $j \in I$ mit $p_{jj} = 1$ bezeichnet man als **absorbierend**. Wird ein absorbierender Zustand einmal angenommen, so wird er nicht mehr verlassen. In dem einführenden Beispiel 2.1 sind die Zustände 0 und 6 absorbierend.

Absorbierende Zustände stellen häufig kritische Zustände eines Systems dar. Daher ist man an der Wahrscheinlichkeit interessiert, mit der ein solcher kritischer Zustand im Prozessverlauf eintritt. Tritt ein kritischer Zustand mit Wahrscheinlichkeit 1 ein, so ist zudem die Verteilung der Dauer bis zum Eintritt (oder Kenngrößen wie die mittlere Eintrittsdauer) von Interesse.

Sei $J \subset I$ eine Menge von absorbierenden Zuständen und T_J die Dauer bis zum erstmaligen Eintritt in einen Zustand $j \in J$. T_J ist eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die man formaler auch in der Form

$$T_J = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in J\} \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

darstellt. Dabei ist $T_J = n$, wenn die Markov-Kette (X_n) zum Zeitpunkt n erstmals einen Wert in J annimmt und $T_J = \infty$, wenn über den gesamten Prozessverlauf kein Wert in der Menge J angenommen wird.

In Abhängigkeit vom Anfangszustand $i \notin J$ der Markov-Kette sei $P_i(T_J > t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eintritt der Markov-Kette (X_n) in die Menge J erst nach dem Zeitpunkt t erfolgt. Insbesondere ist $P_i(T_J = t) = P_i(T_J > t-1) - P_i(T_J > t)$, $t \in \mathbb{N}$, und

$$P_i(T_J = \infty) = \lim_{t\to\infty} P_i(T_J > t).$$

Gilt $P_i(T_J = \infty) = 0$ und damit $P_i(T_J < \infty) = 1$, so wird die absorbierende Menge J mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlicher Zeit erreicht. In diesem Falle ist T_J eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und wir können den Erwartungswert

$$E_i(T_J) = \sum_{t=0}^{\infty} t P_i(T_J = t),$$

also die mittlere Dauer bis zum Eintritt in die absorbierende Menge J, unter Berücksichtigung von Aufgabe 2.43 in der Form

$$E_i(T_J) = \sum_{t=0}^{\infty} P_i(T_J > t)$$

angeben. Diese und weitere Kenngrößen lassen sich unmittelbar mit Satz 2.6 berechnen.

Satz **2.6**

Sei J eine Menge von absorbierenden Zuständen und $i \notin J$. Dann gilt

(i) Ausgehend von $P_i(T_J > 0) = 1$ für alle $i \notin J$ lässt sich $P_i(T_J > t)$ für alle $i \notin J$ und alle $t \in \mathbb{N}$ rekursiv berechnen gemäß

$$P_i(T_J > t) = \sum_{k \notin J} p_{ik} P_k(T_J > t-1).$$

(ii) $P_i(T_J < \infty)$ ist die kleinste Lösung $u_i \in [0,1]$, $i \in I$, des Gleichungssystems

$$u_i = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k.$$

(iii) $E_i(T_J)$ ist (im Falle $P_k(T_J < \infty) = 1$, $k \notin J$) die kleinste Lösung $u_i \geq 0$, $i \in I$, des Gleichungssystems

$$u_i = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k.$$

Beweis: Abkürzend sei $\alpha_i(t) := P_i(T_J > t)$ für $i \notin J$, $t \in \mathbb{N}_0$. Unter Berücksichtigung von $\alpha_i(0) = P(X_0 \notin J \mid X_0 = i) = 1$ für alle $i \notin J$, erhält man dann für $i \notin J$, $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\alpha_i(t) &= P(X_0 \notin J, \ldots, X_t \notin J \mid X_0 = i) \\
&= P(X_1 \notin J, \ldots, X_t \notin J \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k \in I} P(X_1 \notin J, \ldots, X_t \notin J \mid X_0 = i, X_1 = k) p_{ik} \\
&= \sum_{k \in I} P(X_1 \notin J, \ldots, X_t \notin J \mid X_1 = k) p_{ik} \\
&= \sum_{k \notin J} P(X_1 \notin J, \ldots, X_t \notin J \mid X_1 = k) p_{ik} \\
&= \sum_{k \notin J} \alpha_k(t-1) p_{ik}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Somit gilt (i). Die $\alpha_i(t)$ sind monoton fallend in t und konvergieren gegen ein $\alpha_i := \lim_{t\to\infty} \alpha_i(t) = \lim_{t\to\infty} P_i(T_J > t) = P(T_J = \infty)$ und die Rekursionsbeziehung (2.4) geht über in $\alpha_i = \sum_{k \notin J} p_{ik} \alpha_k$, $i \notin J$ (eine Vertauschung von Grenzübergang und Summation ist nach Satz A.12 möglich). Angewandt auf $1 - \alpha_i$ erhält man dann

$$\begin{aligned}
1 - \alpha_i &= \sum_{k \in I} p_{ik} - \sum_{k \notin J} p_{ik} \alpha_k \\
&= \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} (1 - \alpha_k).
\end{aligned}$$

Folglich ist $P_i(T_J < \infty) = 1 - \alpha_i$ Lösung des Gleichungssystems

$$u_i = \sum_{k \in J} p_{ik} + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k.$$

Sei nun $u_i \in [0, 1]$, $i \notin J$, eine beliebige Lösung des Gleichungssystems. Ausgehend von $\alpha_i(0) = 1 \geq 1 - u_i$ für alle $i \notin J$, erhält man dann durch vollständige Induktion nach t die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\alpha_i(t) &= \sum_{k \notin J} \alpha_k(t-1) p_{ik} \\
&\geq \sum_{k \notin J} (1-u_k) p_{ik} \\
&= \sum_{k \notin J} p_{ik} - \sum_{k \notin J} u_k p_{ik} \\
&= 1 - \sum_{k \in J} p_{ik} - \sum_{k \notin J} u_k p_{ik} \\
&= 1 - u_i
\end{aligned}$$

und schließlich $1 - \alpha_i \leq u_i$, $i \notin J$. Damit ist (ii) bewiesen. Unter Berücksichtigung von (i) erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
E_i(T_J) &= \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_i(t) \\
&= \alpha_i(0) + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k \notin J} p_{ik} \alpha_k(t-1) \\
&= 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} \sum_{t=1}^{\infty} \alpha_k(t-1) \\
&= 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} E_k(T_J).
\end{aligned}$$

Somit ist $E_i(T_J)$ Lösung des Gleichungssystems

$$u_i = 1 + \sum_{k \notin J} p_{ik} u_k.$$

Ist $u_i \geq 0$, $i \notin J$, eine beliebige Lösung des Gleichungssystems, so erhält man, ausgehend von $\alpha_i(0) = 1 \leq u_i$, $i \notin J$, durch vollständige Induktion nach n, dass $\sum_{t=0}^{n} \alpha_i(t) \leq u_i$, $i \notin J$, gilt. Hieraus folgt Behauptung (iii). □

Für die numerische Berechnung erweist es sich als nachteilig, dass die linearen Gleichungssysteme in Satz 2.6 nicht eindeutig lösbar sind. Abhilfe schafft ein wichtiger Spezialfall, der in der folgenden Bemerkung zusammengefasst ist.

2.7 Bemerkung

Sei $Q = (p_{ij})_{i,j \notin J}$ die Matrix, die aus P durch Streichen der Zeilen und Spalten aller zu J gehörenden Zustände entsteht. Ist der betragsmäßig größte Eigenwert von Q kleiner als 1, so besitzen die Gleichungssysteme aus Satz 2.6 *eindeutige* Lösungen. Außerdem ist in Satz 2.6(ii) $u_i = 1$ für alle i. Weitere Einzelheiten ergeben sich aus den Sätzen A.13 und A.14. $\Diamond$

2.8 Beispiel (Bsp. 2.1 - Forts. 4)

Mit Hilfe des Satzes 2.6 lassen sich die folgenden Kenngrößen unseres Glücksspiels auf elementare Weise bestimmen

- Wahrscheinlichkeit eines Ruins von Spieler 1: $P_4(T_{\{0\}} < \infty)$

  Die absorbierende Menge J besteht aus dem Zustand 0, die Markov-Kette startet im Zustand $i = 4$. Die Wahrscheinlichkeit $P_4(T_{\{0\}} < \infty)$, mit der das Spiel mit dem Ruin von Spieler 1 endet, ergibt sich dann nach Satz 2.6 (ii) mit $J = \{0\}$ als kleinste Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1-p) + pu_2 \\
u_2 &= (1-p)u_1 + pu_3 \\
u_3 &= (1-p)u_2 + pu_4 \\
u_4 &= (1-p)u_3 + pu_5 \\
u_5 &= (1-p)u_4 + pu_6 \\
u_6 &= u_6 \\
0 \le\ & u_i \le 1
\end{aligned}$$

  (oder als eindeutige Lösung durch Setzen von $u_6 = 0$ und Streichen der letzten Gleichung) und hat den Wert $u_4 = 0.33$.

- Wahrscheinlichkeit einer endlichen Spieldauer: $P_4(T_{\{0,6\}} < \infty)$

  Die absorbierende Menge J besteht aus den Zuständen 0 und 6, die Markov-Kette startet im Zustand $i = 4$. Die Wahrscheinlichkeit $P_4(T_{\{0,6\}} < \infty)$, mit der das Spiel eine endliche Dauer hat, ergibt sich dann nach Satz 2.6 (ii) mit $J = \{0, 6\}$ als (kleinste und in Verbindung mit Bemerkung 2.7 eindeutige) Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
u_1 &= (1-p) + pu_2 \\
u_2 &= (1-p)u_1 + pu_3 \\
u_3 &= (1-p)u_2 + pu_4 \\
u_4 &= (1-p)u_3 + pu_5 \\
u_5 &= p + (1-p)u_4 \\
0 \le\ & u_i \le 1
\end{aligned}$$

und hat den Wert $u_4 = 1$.

- mittlere Spieldauer (unter der Voraussetzung einer endlichen Spieldauer): $E_4(T_{\{0,6\}})$

  Die absorbierende Menge J besteht aus den Zuständen 0 und 6, die Markov-Kette startet im Zustand $i = 4$, und es gilt $P_4(T_{\{0,6\}} < \infty) = 1$. Die mittlere Dauer $E_4(T_{\{0,6\}})$ des Spiels ergibt sich dann nach Satz 2.6 (iii) mit $J = \{0, 6\}$ als (kleinste und in Verbindung mit Bemerkung 2.7 eindeutige) Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + pu_2 \\ u_2 &= 1 + (1-p)u_1 + pu_3 \\ u_3 &= 1 + (1-p)u_2 + pu_4 \\ u_4 &= 1 + (1-p)u_3 + pu_5 \\ u_5 &= 1 + (1-p)u_4 \\ u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

  und hat den Wert $u_4 = 8$. $\Diamond$

Klassifikation der Zustände 2.3

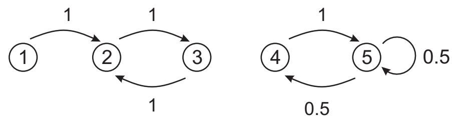
Häufig hat die Übergangsmatrix einer Markov-Kette eine über die allgemeine Struktur einer stochastischen Matrix hinausgehende Struktur, die es erlaubt, Teile herauszunehmen und separat zu betrachten. Dies führt auf die Zerlegung der Übergangsmatrix in stochastische Teilmatrizen, die wiederum als Übergangsmatrizen von Markov-Ketten mit kleinerem Zustandsraum aufgefasst werden können.

Beispiel **2.9**

Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Die Übergangsmatrix enthält zwei stochastische Teilmatrizen, die es uns erlauben, die Markov-Kette in zwei Markov-Ketten mit den (Teil-) Zustandsräumen $I_1 = \{1, 2, 3\}$ und $I_2 = \{4, 5\}$ zu zerlegen. Der Übergangsgraph verdeutlicht noch einmal die Situation.



Startet die Markov-Kette in einem (festen) Zustand $i_0 \in I_1$ oder $i_0 \in I_2$, so kann man sich auf die Markov-Kette mit dem Teil-Zustandsraum I_1 bzw. I_2 beschränken. Für den Fall, dass eine Startverteilung $\pi(0)$ vorliegt mit $\pi_i(0) > 0$ und $\pi_j(0) > 0$ für mindestens ein $i \in I_1$ und $j \in I_2$, so kann man beide Teilprobleme separat lösen und über die Anfangsverteilung $\pi(0)$ zusammenführen, was gegenüber der Lösung der ursprünglichen Markov-Kette immer noch zu einer erheblichen Einsparung an Rechenzeit führt. $\Diamond$

Ein Zustand j heißt von einem Zustand i aus **erreichbar** (in Zeichen $i \to j$), wenn

$$P_i(X_n = j \text{ für ein } n \geq 0) > 0$$

gilt. Ist j von i und i von j aus erreichbar, sagt man, dass i und j **verbunden** sind (in Zeichen $i \leftrightarrow j$).

2.10 **Satz**

Seien $i, j \in I$, $i \neq j$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $i \to j$.

(ii) Es gibt eine Folge von Zuständen $i_0 = i, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n = j$ mit $p_{i_0 i_1}, p_{i_1 i_2}, \ldots, p_{i_{n-1} i_n} > 0$.

(iii) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Beweis: Aus $p_{ij}^{(n)} \leq P_i(X_n = j \text{ für ein } n \geq 0) \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$ folgt die Äquivalenz von (i) und (iii). Da $p_{ij}^{(n)} = \sum_{i_1,\ldots,i_{n-1}} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{n-1} i_n}$ gilt, sind auch (ii) und (iii) äquivalent. $\square$

Ein Zustand j ist somit von i aus erreichbar, wenn im Übergangsgraphen von i ein direkter Pfeil nach j führt oder i und j über eine Pfeilfolge verbunden sind. In Beispiel 2.9 sind die Zustände 2 und 3 von 1, 2 und 3 aus erreichbar; die Zustände 2 und 3 sind verbunden, ebenso die Zustände 4 und 5.

Die Relation $\leftrightarrow$ erfüllt die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation (vgl. Taylor/Karlin (1994), page 202) und führt so zu einer Zerlegung von I in disjunkte Teilmengen verbundener Zustände. Jede solche Teilmenge, in der also jeder Zustand von jedem Zustand aus erreichbar ist, heißt **Klasse** der Markov-Kette. Da jeder Zustand (per Definition) mit sich selbst verbunden ist, bilden möglicherweise auch einzelne Zustände eine Klasse. In Beispiel 2.9 gibt es drei Klassen, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$ und $C_3 = \{4, 5\}$. Auch jeder absorbierende Zustand ist eine eigene Klasse. Bestimmte Klassen sind abgeschlossen, andere nicht. Dabei heißt eine Klasse C **abgeschlossen**, wenn jeder Zustand j, der von $i \in C$ aus erreichbar ist, auch in C liegt. In Beispiel 2.9 sind die Klassen C_2 und C_3 abgeschlossen, nicht aber die Klasse C_1, da ein Übergang von C_1 nach C_2 stattfindet und damit die Klasse verlassen wird.

Abgeschlossenheit bedeutet somit, dass von einem Zustand $i \in C$ lediglich Zustände $j \in C$ erreichbar sind. Das ist, wie man sich leicht überlegen kann, gleichbedeutend mit $\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$ für alle $i \in C$.

Eine Markov-Kette, die nur eine Klasse besitzt, bei der also jeder Zustand von jedem Zustand aus erreichbar ist, heißt **irreduzibel**. Eine Markov-Kette mit mehreren Klassen heißt **reduzibel**. Die Markov-Kette in Beispiel 2.9 ist damit reduzibel.

2.4 Rekurrenz und Transienz

Ein Zustand i einer Markov-Kette heißt **rekurrent**, falls

$$P_i(X_n = i \text{ für unendliche viele } n) = 1$$

gilt, und **transient**, falls

$$P_i(X_n = i \text{ für unendliche viele } n) = 0$$

gilt. Ein rekurrenter Zustand wird somit im Laufe der Zeit unendlich oft angenommen, ein transienter Zustand nur endlich oft.

Wir werden sehen, dass ein Zustand entweder transient oder rekurrent ist. Zur Herleitung bedienen wir uns wieder der Ersteintrittszeiten. Die Zufallsvariable

$$T_j = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = j\} \qquad (\inf \emptyset = \infty)$$

bezeichne den Zeitpunkt n, zu dem der Zustand j erstmals angenommen werde. T_j heißt **Ersteintrittszeit in den Zustand** j. Sie nimmt Werte in $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ an. Dabei ist $T_j = n$, wenn die Markov-Kette (X_n) zum Zeitpunkt n erstmals den Wert j annimmt und $T_j = \infty$, wenn der Zustand j über den gesamten Prozessverlauf nicht angenommen wird.

In Abhängigkeit vom Anfangszustand i der Markov-Kette sei $P_i(T_j > t)$, $t \in \mathbb{N}_0$, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eintritt der Markov-Kette (X_n) in den Zustand j erst nach dem Zeitpunkt t erfolgt. Insbesondere ist

$$f_{ij} := P_i(T_j < \infty) = 1 - \lim_{t \to \infty} P_i(T_j > t)$$

die Wahrscheinlichkeit, mit der, ausgehend vom Zustand i, der Zustand j in endlicher Zeit erreicht wird. Speziell für $i = j$ bezeichnet

$$f_{ii} := P_i(T_i < \infty) = 1 - \lim_{t \to \infty} P_i(T_i > t)$$

die **Rückkehrwahrscheinlichkeit** in den Zustand i.

Eng verbunden mit der Ersteintrittszeit T_j in den Zustand j ist die **Häufigkeit**

$$N_j = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}$$

mit der der Zustand j im Prozessverlauf angenommen wird. Da die Indikatorfunktion $1_{\{X_n = j\}}$ nur die Werte 0 (falls $X_n \neq j$) oder 1 (falls $X_n = j$) annimmt, zählt N_j, wie häufig der Zustand j im Prozessverlauf angenommen wird. N_j ist somit eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

In Abhängigkeit vom Anfangszustand i der Markov-Kette sei $P_i(N_j > m)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand j mehr als m-mal angenommen wird. Dann bezeichnet

$$E_i(N_j) = \sum_{m=0}^{\infty} P_i(N_j > m) \tag{2.5}$$

die erwartete Anzahl der Besuche in j. Mit den Rechenregeln für Erwartungswerte $E_i(N_j) = E_i(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} E_i\left(1_{\{X_n=j\}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_i(X_n = j)$ folgt eine weitere nützliche Darstellung:

$$E_i(N_j) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}. \tag{2.6}$$

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Charakterisierung der Zustände einer Markov-Kette.

Satz **2.11**

Für alle $i, j \in I$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

(i) $P_i(N_j > m) = f_{ij}(f_{jj})^m$.

(ii) $E_i(N_j) = \dfrac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)}$.

Beweis: Seien $T_j^{(1)} = T_j$ und $T_j^{(m)} = \inf\{n > T_j^{(m-1)} \mid X_n = j\}$ für $m > 1$ die Zeitpunkte, zu denen die Markov-Kette zum m-ten Mal im Zustand j ist (vgl. auch Abb. 2.4).

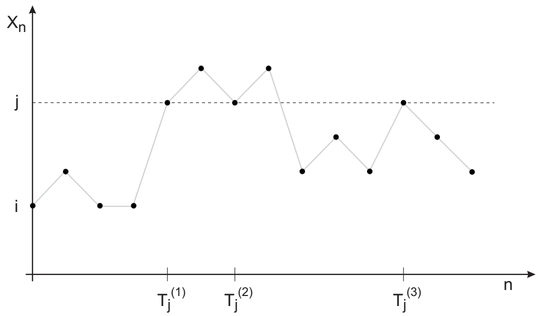


Abb. 2.4. Rückkehrzeitpunkte einer Markov-Kette

Wir beweisen nun (i) durch vollständige Induktion nach m. Für $m = 0$ ist $P_i(N_j > 0) = P_i(T_j < \infty) = f_{ij}$. Daher gelte

$$P_i(N_j > m) = P_i(T_j^{(m+1)} < \infty) = f_{ij}(f_{jj})^m$$

für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $P_i(N_j > m + 1) = P_i(T_j^{(m+2)} < \infty)$ und bedingt nach $\{T_j^{(m+1)} = n\}$

$$\begin{aligned} &P_i(N_j > m + 1) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(T_j^{(m+2)} - T_j^{(m+1)} = k \mid T_j^{(m+1)} = n\right) P_i\left(T_j^{(m+1)} = n\right). \end{aligned}$$

Um die bedingten Wahrscheinlichkeiten weiter vereinfachen zu können, benötigen wir eine Markov-Eigenschaft bei der der Zeitpunkt der letzten Beobachtung auch eine Zufallsvariable sein kann. Diese sog. **starke Markov-Eigenschaft** gilt (vgl. z.B. Norris (1997), Theorem 1.4.2) und wir erhalten schließlich (i) aus

$$\begin{aligned}
P_i(N_j > m+1) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P\left(T_j = k \mid X_0 = j\right) P_i\left(T_j^{(m+1)} = n\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P_j\left(T_j = k\right) \sum_{n=1}^{\infty} P_i\left(T_j^{(m+1)} = n\right) \\
&= P_j(T_j < \infty) \cdot P_i\left(T_j^{(m+1)} < \infty\right) \\
&= f_{jj} \cdot f_{ij}(f_{jj})^m .
\end{aligned}$$

(ii) folgt aus (i), (2.5), den Eigenschaften der geometrischen Reihe und (2.6). □

2.12 **Satz**

Jeder Zustand $i \in I$ einer Markov-Kette ist entweder rekurrent oder transient. Weiter gilt:

(i) i ist rekurrent genau dann, wenn $P_i(T_i < \infty) = 1$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ gilt.

(ii) i ist transient genau dann, wenn $P_i(T_i < \infty) < 1$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ gilt.

Beweis: Gilt $P_i(T_i < \infty) = 1$ und damit $f_{ii} = 1$, so ist nach Satz 2.11 (i) $P_i(N_i > m) = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt

$$P_i(X_n = i \text{ für unendliche viele } n) = 1.$$

Somit ist i rekurrent. Die Umkehrung folgt analog. Mit $f_{ii} = 1$ gilt nach Satz 2.11 $f_{ii}/(1 - f_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ und umgekehrt. Damit ist (i) bewiesen. Ist $P_i(T_i < \infty) < 1$ und damit $f_{ii} < 1$, so folgt aus Satz 2.11, dass $P_i(X_n = i \text{ für unendliche viele } n) = P_i(N_i = \infty) = \lim_{m\to\infty} P_i(N_i > m) = \lim_{m\to\infty} f_{ii}^{m+1} = 0$. Damit ist i transient. Die Umkehrung folgt analog. Mit $f_{ii} < 1$ gilt schließlich $f_{ii}/(1 - f_{ii}) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ und umgekehrt. Damit ist (ii) bewiesen und insgesamt die Behauptung des Satzes. □

Fassen wir das Ergebnis der letzten beiden Sätze zusammen: Ein Zustand i ist entweder transient oder rekurrent. Ist er transient, so ist die Rückkehrwahrscheinlichkeit $f_{ii} < 1$. Die Häufigkeit N_i, mit der der Prozess zurückkehrt, ist geometrisch verteilt (auf $\mathbb{N}_0$, vgl. Bemerkung A.7) mit Erwartungswert

$E_i(N_i) = f_{ii}/(1 - f_{ii})$. Als weitere wichtige Charakterisierung erhalten wir $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$. Ist i rekurrent, so ist $f_{ii} = 1$ und der Prozess kehrt (mit Wahrscheinlichkeit 1) unendlich oft in den Zustand i zurück. Als weitere nützliche Charakterisierung können wir $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ heranziehen.

Satz **2.13**

Sei i rekurrent und j von i aus erreichbar. Dann ist auch j rekurrent und i von j aus erreichbar.

Beweis: Sei $j \neq i$. Ist j von i aus erreichbar, so existiert nach Satz 2.10 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p_{ij}^{(m)} > 0$. Nach Voraussetzung ist i rekurrent und damit $P_i(X_n = i \text{ für unendliche viele } n) = 1$. Hieraus folgt $P_i(X_n = i \text{ für ein } n > m) = 1$. Bedingen wir nun bzgl. $\{X_m = k\}$, so folgt zusammen mit der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in I} P(X_n = i \text{ für ein } n > m \mid X_0 = i, X_m = k) p_{ik}^{(m)} \\ &= \sum_{k \in I} P(X_n = i \text{ für ein } n > m \mid X_m = k) p_{ik}^{(m)} \\ &= \sum_{k \in I} f_{ki} p_{ik}^{(m)}. \end{aligned}$$

Damit ist $f_{ji} = 1$. Denn wäre $f_{ji} < 1$, so wäre wegen $p_{ij}^{(m)} > 0$ der Ausdruck $\sum_{k \in I} f_{ki} p_{ik}^{(m)} < 1$.

Wegen $f_{ji} = 1$ und $f_{ii} = 1$ (nach Satz 2.12) ist $E_j(N_i) = \infty$ (nach Satz 2.11). Damit existiert ein $m' \in \mathbb{N}$ mit $p_{ji}^{(m')} > 0$. Somit ist i von j aus erreichbar.

Ausgehend von $P^{m'+k+m} = P^{m'} P^k P^m$, $k \in \mathbb{N}$, erhält man zunächst

$$p_{jj}^{(m'+k+m)} \geq p_{ji}^{(m')} p_{ii}^{(k)} p_{ij}^{(m)}.$$

Summation über k ergibt zusammen mit Satz 2.11(ii)

$$\frac{f_{jj}}{1 - f_{jj}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} p_{jj}^{(m'+k+m)} \geq p_{ji}^{(m')} p_{ij}^{(m)} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(k)} = p_{ji}^{(m')} p_{ij}^{(m)} \frac{f_{ii}}{1 - f_{ii}}.$$

Wegen $p_{ji}^{(m')} > 0$, $p_{ij}^{(m)} > 0$ und $f_{ii} = 1$ ist die rechte Seite der Ungleichung unendlich. Damit muss auch die linke Seite unendlich sein. Dies ist aber nur für $f_{jj} = 1$ möglich. Somit ist j rekurrent. $\square$

Nach Satz 2.13 sind Rekurrenz und Transienz Klasseneigenschaften: Entweder sind alle Zustände einer Klasse rekurrent oder alle Zustände einer Klasse transient.

Die Teilmenge $I_R \subset I$ aller rekurrenten Zustände ist nach Satz 2.13 abgeschlossen (Übungsaufgabe). Ist die Menge I_R irreduzibel, ist also jeder rekurrente Zustand von jedem anderen rekurrenten Zustand aus erreichbar, so spricht man von einer Markov-Kette mit nur einer rekurrenten Klasse.

Ist I_R reduzibel, so zerfällt I_R in disjunkte, irreduzible Teilmengen I_{R_ν}. Jede dieser abgeschlossenen Teilmengen I_{R_ν} bezeichnet man als **rekurrente Klasse**. Enthält eine Markov-Kette m rekurrente Klassen $I_{R_1}, \ldots, I_{R_m}$, so ergibt sich zusammen mit der Menge I_T der transienten Zustände eine disjunkte Überdeckung des Zustandsraums I gemäß

$$I = I_{R_1} \cup I_{R_2} \cup \cdots \cup I_{R_m} \cup I_T.$$

Startet demzufolge der Prozess in einem Zustand $i \in I_{R_\nu}$, so kann er die rekurrente Klasse I_{R_ν} nicht mehr verlassen und es ist ausreichend, die reduzierte Markov-Kette mit Zustandsraum I_{R_ν} zu betrachten. Startet der Prozess jedoch in einem Zustand $i \in I_T$, so ist die gesamte Markov-Kette zu betrachten, da nicht feststeht, in welche rekurrente Klasse I_{R_ν} der Prozess gelangen wird.

Durch Umordnung der Zustände erhält man die folgende Darstellung

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} I_{R_1} & I_{R_2} & I_{R_3} & \ldots & I_{R_m} & I_T \end{array} \\
\begin{array}{c} I_{R_1} \\ I_{R_2} \\ I_{R_3} \\ \vdots \\ I_{R_m} \\ I_T \end{array} &
\begin{pmatrix}
P_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & P_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & P_3 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & P_m & 0 \\
Q_1 & Q_2 & Q_3 & \ldots & Q_m & Q
\end{pmatrix}
\end{array}.$$

Satz 2.14 fasst die Übergangsstruktur aus der Sicht der $f_{ij} = P_i(T_j < \infty)$ zusammen.

2.14 **Satz**

Seien i, j und k beliebige Zustände. Dann gilt

(i) Gehören i und j derselben rekurrente Klasse an, so ist $f_{ij} = f_{ji} = 1$.

(ii) Gehören i und j unterschiedlichen rekurrenten Klassen an, so ist $f_{ij} = f_{ji} = 0$.

(iii) Ist i rekurrent und j transient, so ist $f_{ij} = 0$.

(iv) Ist i transient und gehören j und k derselben rekurrenten Klasse I_{R_ν} an, so ist $f_{ij} = f_{ik} =: f_{iR_\nu}$. Dabei ist $f_{iR_\nu}, i \in I_T$, die (kleinste und in Verbindung mit Bemerkung 2.7 eindeutige) Lösung $u_i \in [0,1]$ des Gleichungssystems

$$u_i = \sum_{\ell \in I_{R_\nu}} p_{i\ell} + \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell} u_\ell.$$

Beweis: (i) wurde bereits im Beweis zu Satz 2.13 gezeigt, (ii) und (iii) folgen unmittelbar aus der Abgeschlossenheit der rekurrenten Klassen.

(iv). Mit $J = \{j\}$ geht das Gleichungssystem in Satz 2.6(ii) über in

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell} f_{\ell j} + \sum_{\substack{\ell \in I_{R_\nu} \\ \ell \neq j}} p_{i\ell} f_{\ell j} + \sum_{\ell \in I_R \setminus I_{R_\nu}} p_{i\ell} f_{\ell j}.$$

Unter Berücksichtigung von (i) und (ii) erhält man die Vereinfachung

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell} f_{\ell j} + \sum_{\substack{\ell \in I_{R_\nu} \\ \ell \neq j}} p_{i\ell} = \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell} f_{\ell j} + \sum_{\ell \in I_{R_\nu}} p_{i\ell}. \tag{2.7}$$

Setzt man (für feste j und k) $g_i = f_{ij} - f_{ik}$, so folgt, falls I_T endlich ist (der allgemeine Fall ist aufwändiger zu zeigen), für alle $i \in I_T$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$g_i = \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell} g_\ell = \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell} \left[\sum_{\ell' \in I_T} p_{\ell\ell'} g_{\ell'} \right] = \ldots = \sum_{\ell \in I_T} p_{i\ell}^{(n)} g_\ell.$$

Zusammen mit $p_{i\ell}^{(n)} \to 0$ für $n \to \infty$ (nach Satz 2.11(ii)) folgt dann $g_i = 0, i \in I_T$, durch Vertauschung von Summation und Grenzübergang. Somit existiert ein f_{iR_ν} mit $f_{iR_\nu} = f_{ij} = f_{ik}$. Das Gleichungssystem zur Berechnung der f_{iR_ν} ergibt sich nun unmittelbar aus (2.7). □

Sei i ein transienter und j ein rekurrenter Zustand. Nach Satz 2.14(iv) ist es sinnvoll, nicht mehr vom Erreichen des Zustandes j zu sprechen, sondern vom Erreichen der rekurrenten Klasse, der j angehört.

Erinnern wir uns: Eine Markov-Kette, die einen rekurrenten Zustand i annimmt, kehrt wegen $P_i(T_i < \infty) = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1 in endlicher Zeit zurück. Eine weitergehende Charakterisierung rekurrenter Zustände ergibt sich aus der mittleren Rückkehrzeit, die sowohl endlich als auch unendlich sein kann.

Ist $P_i(T_j < \infty) = 1$, so kann man

$$\mu_{ij} = E_i(T_j)$$

als **mittlere Ersteintrittszeit** in den Zustand j interpretieren. Im Falle $j = i$ spricht man auch von der **mittleren Rückkehrzeit** in den Zustand i. Ein rekurrenter Zustand i heißt **positiv-rekurrent**, falls $\mu_{ii} < \infty$ gilt; andernfalls (d.h. $\mu_{ii} = \infty$) heißt er **null-rekurrent**.

Satz 2.16 erlaubt uns, rekurrente Klassen weiter zu unterteilen in null-rekurrente und positiv-rekurrente Klassen. Er basiert auf dem folgenden Satz, der für die asymptotische Entwicklung der Markov-Kette von zentraler Bedeutung ist.

2.15 **Satz**

Seien $i, j \in I$. Ist j rekurrent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}.$$

Beweis: Siehe Abschnitt 2.9. $\square$

2.16 **Satz**

Gehören i und j derselben rekurrenten Klasse I_{R_ν} an, so sind beide Zustände entweder positiv-rekurrent oder null-rekurrent.

Beweis: Sei i positiv-rekurrent und j von i aus erreichbar. Wie im Beweis von Satz 2.13(ii) erhält man

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{jj}^{(m'+k+m)} \geq p_{ji}^{(m')} p_{ij}^{(m)} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_{ii}^{(k)}.$$

Grenzübergang $N \to \infty$ liefert dann zusammen mit den Sätzen 2.14(i) und 2.15

$$\frac{1}{\mu_{jj}} \geq p_{ji}^{(m')} p_{ij}^{(m)} \cdot \frac{1}{\mu_{ii}} > 0.$$

Somit ist j positiv-rekurrent. $\square$

Eine endliche Markov-Kette enthält keine null-rekurrenten Zustände und nicht alle Zustände können transient sein. Ein plausibles Ergebnis, das wir im nächsten Satz formal beweisen.

Satz **2.17**

Für eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum gilt:

(i) nicht alle Zustände sind transient.

(ii) es gibt keine null-rekurrenten Zustände.

Beweis: (i) Sei P eine stochastische Matrix. Dann ist auch P^n, $n \in \mathbb{N}$, eine stochastische Matrix. Wären alle Zustände transient, so wäre für alle $j \in I$ $f_{jj} < 1$ (nach Satz 2.12) und damit $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = f_{ij}/(1-f_{jj}) < \infty$ (nach Satz 2.11(ii)). Somit hätten wir $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ für alle $i, j \in I$ und schließlich wäre, da I endlich ist, P^n für hinreichend großes n keine stochastische Matrix mehr. Somit können nicht alle Zustände transient sein.

(ii) Wäre i null-rekurrent, so würde eine rekurrente Klasse I_{R_ν} mit $i \in I_{R_\nu}$ existieren und es wäre

$$\sum_{j\in I_{R_\nu}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in I_{R_\nu}} p_{ij}^{(k)} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit hätten wir

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in I_{R_\nu}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \sum_{j\in I_{R_\nu}} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = 1 \tag{2.8}$$

(die Vertauschung von Summation und Grenzübergang ist aufgrund der Endlichkeit von I möglich). Mit i wäre nach Satz 2.16 auch j null-rekurrent und zusammen mit Satz 2.15 würde $\sum_{j\in I_{R_\nu}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = 0$ folgen im Widerspruch zu (2.8). Somit kann i nicht null-rekurrent sein. $\square$

2.18 Beispiel

(a) Sei $X_0, X_1, \ldots$ ein Random Walk auf $\mathbb{Z}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} p & \text{für } j = i+1 \\ 1-p & \text{für } j = i-1 \end{cases} \qquad (0 \text{ sonst}).$$

Ist $p \neq 1/2$, so sind alle Zustände transient, da $p_{ii}^{(2n+1)} = 0$ und

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \to 0$$

für $n \to \infty$. Die Behauptung folgt aus dem Quotientenkriterium für Reihen:

$$\frac{p_{ii}^{(2n+2)}}{p_{ii}^{(2n)}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} p(1-p) \quad \to \quad 4p(1-p) < 1.$$

Ist $p = 1/2$, so sind alle Zustände rekurrent. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel ($n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$) erhält man nämlich

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \approx \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

und, da $\sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty$, folgt auch $\sum p_{ii}^{(n)} = \infty$. Somit ist i rekurrent.

(b) Sei $X_0, X_1, \ldots$ ein symmetrischer Random Walk auf $\mathbb{Z}^2$,

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/4 & \text{für } |j-i| = 1 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Dann lässt sich ebenfalls mit Hilfe der Stirlingschen Formel zeigen, dass $p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{1}{\pi n}$. Da $\sum \frac{1}{n} = \infty$ ist, sind alle Zustände rekurrent.

(c) Sei $X_0, X_1, \ldots$ ein symmetrischer Random Walk auf $\mathbb{Z}^3$,

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/6 & \text{für } |j-i| = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Stirlingsche Formel liefert hier $p_{ii}^{(2n)} \approx \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{6}{n}\right)^{3/2}$. Bekanntlich ist $\sum n^{-3/2} < \infty$. Damit sind alle Zustände transient.

Überrascht Sie das Ergebnis? $\Diamond$

Stationäre Verteilungen

2.5

Viele Langzeiteigenschaften einer Markov-Kette sind eng verknüpft mit dem Begriff der stationären Verteilung.

Eine Verteilung $\pi = \{\pi_j, j \in I\}$ heißt **stationär**, falls

$$\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}, \quad j \in I. \tag{2.9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Der Definition entnehmen wir unmittelbar, dass die Verteilung $\pi(n)$ der Zustände der Markov-Kette zum Zeitpunkt n, die bekanntlich in der Form $\pi(n) = \pi(0)P^n$ darstellbar ist, bei Wahl von $\pi(0) = \pi$ von n unabhängig ist. Das erklärt noch einmal den Begriff der Stationarität. Die Bedeutung der stationären Verteilung liegt jedoch in dem asymptotischen Verhalten von $\pi(n)$ für $n \to \infty$, was wir häufig als Annäherung an eine stationäre Verteilung beschreiben können.

π ist insbesondere Lösung der Gleichung $\pi = \pi P$ (Spezialfall $n = 1$). Wiederholte Ersetzung von π durch πP liefert $\pi = \pi P^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich π als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$u_j = \sum_{i \in I} u_i p_{ij}, \quad i \in I, \tag{2.10}$$

unter Einhaltung der Nichtnegativitätsbedingung

$$u_i \geq 0, \quad i \in I, \tag{2.11}$$

und der Normierungsbedingung

$$\sum_{i \in I} u_i = 1. \tag{2.12}$$

Beispiel **2.19**

Eine weiße und zwei schwarze (nicht unterscheidbare) Kugeln seien zufällig nebeneinander angeordnet. Die Anordnung ändere sich in jeder Spielrunde nach folgender Regel:

- Eine der drei Kugeln werde zufällig ausgewählt. Die ausgewählte Kugel wird an Position 1 (ganz links) neu angeordnet, die ursprünglich weiter links angeordneten Kugeln rücken eine Position nach rechts, die restlichen Anordnungen bleiben unverändert. Dabei werde die weiße Kugel mit Wahrscheinlichkeit $a \in (0, 1)$ und jede der beiden schwarzen Kugeln mit Wahrscheinlichkeit $(1 - a)/2$ ausgewählt.

Um die Frage zu beantworten, welche Anordnung der Kugeln sich bei langfristiger Betrachtung am häufigsten einstellt, beschreiben wir die Spielentwicklung durch eine Markov-Kette mit Zustandsraum

$$I = \{1, 2, 3\} \equiv \{(\circ, \bullet, \bullet), (\bullet, \circ, \bullet), (\bullet, \bullet, \circ)\}$$

und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} a & 1-a & 0 \\ a & \frac{1-a}{2} & \frac{1-a}{2} \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige stationäre Verteilung $\pi = (a, \frac{2a(1-a)}{1+a}, \frac{(1-a)^2}{1+a})$ ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u_1 &= au_1 + au_2 + au_3 \\ u_2 &= (1-a)u_1 + \frac{1-a}{2}u_2 \\ u_3 &= \frac{1-a}{2}u_2 + (1-a)u_3 \end{aligned}$$

mit den Nichtnegativitätsbedingungen $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$ und der Normierungsbedingung $u_1 + u_2 + u_3 = 1$.

Es lässt die folgende Interpretation zu:

- Ist $a \geq 1/3$, so ist $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \pi_3$. Damit tritt bei langfristiger Betrachtung Anordnung (Zustand) 1 am häufigsten auf (Anteil a) und Anordnung 3 am seltensten (Anteil $\frac{(1-a)^2}{1+a}$).
- Ist $a \leq 1/3$, so kehrt sich die Situation vollständig um. In diesem Falle ist $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \pi_3$ und damit Anordnung 1 am seltensten und Anordnung 3 am häufigsten. $\diamondsuit$

Wir kommen nun zur Existenz und Eindeutigkeit einer stationären Verteilung. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall. Dies ist eine irreduzible Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen.

2.20 Satz

Sei (X_n) eine irreduzible Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum. Dann existiert eine stationäre Verteilung; sie ist eindeutig und es gilt $\pi_i = 1/\mu_{ii} > 0$ für alle $i \in I$.

Beweis: Da (X_n) irreduzibel ist, ist jeder Zustand $i \in I$ nach Satz 2.17 positiv-rekurrent. Das impliziert $\mu_{ii} \geq 1$ (nach Definition von T_i) und $\mu_{ii} < \infty$ (nach Definition der positiven Rekurrenz). Damit ist $\pi_i = 1/\mu_{ii} \in (0, 1]$, $i \in I$. Wir zeigen nun, dass $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$ und damit π eine Verteilung ist. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j \in I} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(m)} = 1.$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann $\sum_{j \in I} (\mu_{jj})^{-1} = 1$ und damit $\sum_{i \in I} \pi_i = 1$. Die Verteilung π ist sogar eine stationäre Verteilung, denn zusammen mit Satz 2.15 gilt weiter

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k \in I} p_{ik}^{(m-1)} p_{kj} = \frac{n-1}{n} \sum_{k \in I} p_{kj} \left(\frac{p_{ik}^{(0)}}{n-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} p_{ik}^{(m)} \right)$$

und für $n \to \infty$ $(\mu_{jj})^{-1} = \sum_{k \in I} p_{kj} (\mu_{kk})^{-1}$, also $\pi = \pi P$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\tilde{\pi}$ eine beliebige stationäre Verteilung und $j \in I$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i \in I} \tilde{\pi}_i p_{ij} = \sum_{i \in I} \tilde{\pi}_i p_{ij}^{(m)} = \sum_{i \in I} \tilde{\pi}_i \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} \right) \tag{2.13}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann $\tilde{\pi}_j = \sum_{i \in I} \tilde{\pi}_i (\mu_{jj})^{-1} = (\mu_{jj})^{-1}$ und damit die Eindeutigkeit. $\square$

Im Falle von abzählbar vielen Zuständen müssen wir zusätzlich unterscheiden, ob die Zustände positiv- oder null-rekurrent sind.

Satz **2.21**

Sei (X_n) eine irreduzible Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum.

(i) Sind die Zustände positiv-rekurrent, so existiert eine stationäre Verteilung; sie ist eindeutig und es gilt $\pi_i = 1/\mu_{ii} > 0$ für alle $i \in I$.

(ii) Sind die Zustände null-rekurrent, so existiert keine stationäre Verteilung.

Satz 2.21 ist eine sehr schöne Charakterisierung positiv-rekurrenter Klassen. Doch wann ist eine Klasse positiv-rekurrent, wann ist sie null-rekurrent? Äußerst hilfreich ist daher die folgende Erweiterung, mit der wir auch ein

Verfahren an die Hand bekommen, eine Klasse auf positive Rekurrenz zu überprüfen.

2.22 Satz

Eine rekurrente Klasse einer Markov-Kette (X_n) ist genau dann positiv-rekurrent, wenn sie eine stationäre Verteilung besitzt.

Beweis: Siehe z.B. Theorem 1.7.7 in Norris (1997). $\square$

Die praktische Konsequenz aus Satz 2.22 ist, das Gleichungssystem zur Berechnung der stationären Verteilung aufzustellen und zu versuchen, es zu lösen. Existiert eine Lösung, so haben wir die stationäre Verteilung gefunden und wissen, dass die Klasse positiv-rekurrent ist. Andernfalls existiert keine stationäre Verteilung und die Klasse ist null-rekurrent.

Angewandt auf den symmetrischen Random Walk (X_n) auf $\mathbb{Z}$ (vgl. Beispiel 2.18), von dem wir wissen, dass er rekurrent ist, bedeutet es, dass er null-rekurrent ist, da die Gleichung $u_i = 0.5u_{i-1} + 0.5u_{i+1}$ keine *positive* Lösung und damit auch keine stationäre Verteilung besitzt.

2.23 Satz

Sei π eine stationäre Verteilung. Ist j ein transienter oder null-rekurrenter Zustand, so ist $\pi_j = 0$.

Beweis: Ist j transient, so folgt die Behauptung aus Satz 2.11(ii). Ist j null-rekurrent, so besitzt das nach Satz 2.22 zu lösende (Teil-)Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\pi \equiv 0$. $\square$

Die bisherigen Aussagen über irreduzible Markov-Ketten gelten natürlich auch für jede rekurrente Klasse I_{R_ν} einer Markov-Kette, die für sich betrachtet irreduzibel ist. Daher kann man die auf dem Teil-Zustandsraum I_{R_ν} berechnete stationäre Verteilung $\pi^{(\nu)} = \{\pi_j^{(\nu)}, j \in I_{R_\nu}\}$ gemäß $\pi_j = \pi_j^{(\nu)}$ für $j \in I_{R_\nu}$ und $\pi_j = 0$ für $j \notin I_{R_\nu}$ zu einer stationären Verteilung π auf I fortsetzen.

Nach Satz 2.23 können die transienten Zustände bei der Betrachtung der asymptotischen Entwicklung der Markov-Kette weitgehend vernachlässigt werden. Aber nicht ganz. Startet die Markov-Kette nämlich in einem transienten Zustand, so wird das Übergangsverhalten in die einzelnen rekurrenten

Klassen durch das Verhalten innerhalb der transienten Zustände bestimmt. In Beispiel 2.29 werden wir die Zusammenhänge ausführlich darstellen. Formal können wir dieses Verhalten durch eine Konvexkombination der stationären Verteilungen der rekurrenten Klassen beschreiben. Wir halten zunächst fest: Eine Konvexkombination

$$\pi^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu \cdot \pi^{(\nu)}$$

(mit $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$) der Fortsetzungen $\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(m)}$ der stationären Verteilungen der rekurrenten Klassen $I_{R_1}, \ldots, I_{R_m}$ ist wieder eine stationäre Verteilung (Übungsaufgabe). Der Parameter λ ergibt sich aus der Anfangsverteilung $\pi(0)$ der Markov-Kette. Auf die konkrete Festlegung gehen wir in Beispiel 2.29 näher ein.

Markov-Kette irreduzibel	Markov-Kette reduzibel
$\pi = \{\pi_j, j \in I\}$ ist Lösung von	$\pi = \{\pi_j, j \in I\}$ ist Konvexkombination
$u_j = \sum_{i \in I} u_i p_{ij}$	$\pi_j = \begin{cases} \sum_\nu \lambda_\nu \pi_j^{(\nu)} & \text{für} \quad j \in I_R \\ 0 & \text{für} \quad i \in I_T \end{cases}$,
$u_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} u_i = 1$	wobei $\lambda_\nu \geq 0$, $\sum \lambda_\nu = 1$ und $\pi^{(\nu)}$ Lösung der irreduziblen Klasse I_{R_ν} ist und 0 außerhalb.

Tabelle 2.2. Berechnung der stationären Verteilung bei endlichem Zustandsraum

Tabelle 2.2 fasst die einzelnen Rechenschritte bei endlichem Zustandsraum noch einmal zusammen. Bei abzählbarem Zustandsraum sind weitere Fallunterscheidungen notwendig:

(a) Besitzt die Markov-Kette keine positiv-rekurrente Klasse, so besitzt sie auch keine stationäre Verteilung.

(b) Existiert genau eine positiv-rekurrente Klasse, so besitzt die Markov-Kette genau eine stationäre Verteilung. Diese ergibt sich als Fortsetzung der stationären Verteilung der Klasse auf die gesamte Markov-Kette.

(c) Existieren mehrere positiv-rekurrente Klassen, so kann für jede positiv-rekurrente Klasse eine solche Fortsetzung der stationären Verteilung vorgenommen werden. Auf diese Weise geht die Eindeutigkeit der stationären Verteilung verloren. Bezeichnet $\pi^{(\nu)}$ die stationäre Verteilung der ν-ten positiv-rekurrenten Klasse, so ist jede Konvexkombination $\pi = \sum_\nu \lambda_\nu \cdot \pi^{(\nu)}$ (mit $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) eine stationäre Verteilung der Markov-Kette.

2.6 Das asymptotische Verhalten der Markov-Kette

Wir stellen nun die Verbindung der stationären Verteilungen einer Markov-Kette zur asymptotischen Entwicklung der Markov-Kette her. Besonders anschaulich wäre eine Konvergenz der Verteilung $\pi(n)$ der Zustände der Markov-Kette zum Zeitpunkt n gegen eine stationäre Verteilung π für $n \to \infty$. Dies trifft für wichtige Spezialfälle auch zu, aber nicht generell.

2.24 Beispiel

Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1, 2\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

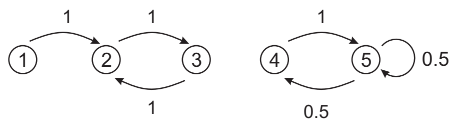
Dann ist $P^2 = E$ (E Einheitsmatrix) und damit gilt $P^{2n} = E$ und $P^{2n+1} = P$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit liegt keine Konvergenz der $p_{ij}^{(n)}$ für $n \to \infty$ vor und im Falle $\pi(0) = (\alpha, 1-\alpha)$ für ein $\alpha \neq 1/2$ auch keine Konvergenz der $\pi(n)$ für $n \to \infty$, da $\pi(2n) = (\alpha, 1-\alpha)$ und $\pi(2n+1) = (1-\alpha, \alpha)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

Unter der **Periode** d_i eines Zustandes $i \in I$ versteht man den größten gemeinsamen Teiler aller $n \in \mathbb{N}$ mit $p_{ii}^{(n)} > 0$. Hat beispielsweise ein Zustand i die Periode $d_i = 2$, so kann die Markov-Kette lediglich nach $2, 4, 6, \ldots$ Schritten in den Zustand i zurückkehren. Ist $p_{ii}^{(n)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so setzt man $d_i = \infty$. Zustände mit der Periode $d_i = 1$ heißen **aperiodisch**. Sind alle Zustände einer Markov-Kette aperiodisch, so spricht man auch von einer aperiodischen Markov-Kette.

Man kann zeigen, dass Zustände derselben Klasse dieselbe Periode haben (vgl. z.B. Brémaud, Theorem 4.2). Beispiel 2.9 verdeutlicht die Zusammenhänge.

Beispiel (Bsp. 2.9 - Forts. 1) **2.25**

Gegeben sei noch einmal die Markov-Kette mit dem Übergangsgraphen



Der (transiente) Zustand 1 hat die Periode ∞, die Zustände 2 und 3 der rekurrenten Klasse $I_{R_1} = \{2, 3\}$ die Periode 2 und die Zustände 4 und 5 der rekurrenten Klasse $I_{R_2} = \{4, 5\}$ die Periode 1. $\Diamond$

Bei der Überprüfung auf Aperiodizität erweist sich das folgende Kriterium als äußerst hilfreich.

Satz **2.26**

Sei (X_n) eine irreduzible Markov-Kette mit $p_{ii} > 0$ für einen Zustand $i \in I$. Dann ist $p_{jk}^{(n)} > 0$ für alle $j, k \in I$ und hinreichend großes n. Insbesondere sind alle Zustände aperiodisch.

Beweis: Zunächst existieren $r, s \in \mathbb{N}$ mit $p_{ji}^{(r)}, p_{ik}^{(s)} > 0$. Damit ist $p_{jk}^{(r+n+s)} \geq p_{ji}^{(r)} p_{ii}^{(n)} p_{ik}^{(s)} \geq p_{ji}^{(r)} (p_{ii})^n p_{ik}^{(s)} > 0$ für hinreichend großes n. $\square$

Satz **2.27**

Sei (X_n) eine irreduzible, aperiodische Markov-Kette, die eine stationäre Verteilung π besitze. Dann gilt $\pi(n) \to \pi$ für $n \to \infty$. Darüber hinaus ist $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = 1/\mu_{jj}$ für alle $i, j \in I$.

Erweitert man die Aussage auf Markov-Ketten mit mehr als einer positiv-rekurrenten Klasse, so erhält man mit Corollary X in Berger (1993):

2.28 **Satz**

Ist jede positiv-rekurrente Klasse der Markov-Kette aperiodisch, so gilt für alle $i, j \in I$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_{jj}}.$$

Damit ist das asymptotische Verhalten einer aperiodischen Markov-Kette vollständig bestimmt durch die $f_{ij} = P_i(T_j < \infty)$ und die $\mu_{jj} = E_j(T_j)$. Die f_{ij} ergeben sich aus Satz 2.14; die $\{1/\mu_{jj}, j \in I_{R_\nu}\}$ als stationäre Verteilungen der positiv-rekurrenten Klassen (vgl Satz 2.27). Die einzelnen Fälle sind noch einmal in Abb. 2.5 dargestellt.

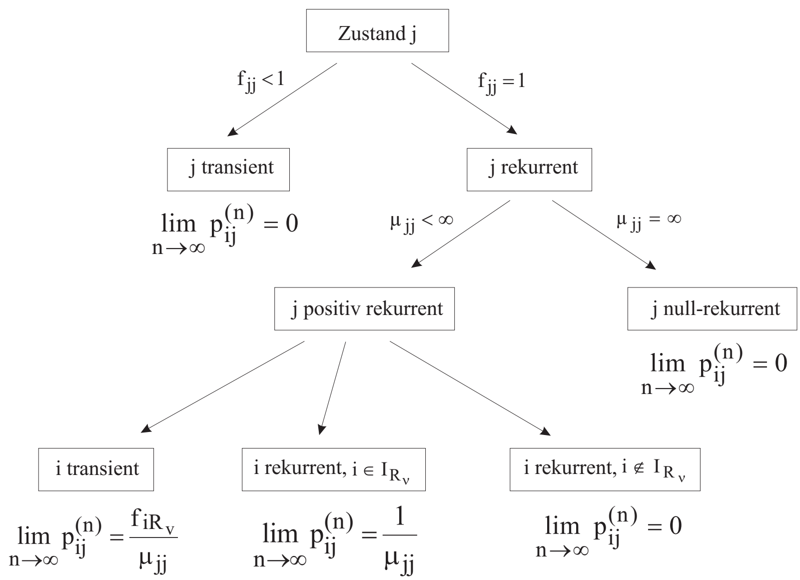


Abb. 2.5. Das asymptotische Verhalten einer aperiodischen Markov-Kette

Wir kommen nun zu dem angekündigten Beispiel, in dem wir die Eigenschaften der stationären Verteilungen mit dem asymptotischen Verhalten der Markov-Kette in Einklang bringen.

Beispiel **2.29**

Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, \ldots, 7\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Die Markov-Kette besitzt die beiden transienten Zustände 6 und 7 ($I_T = \{6, 7\}$) sowie zwei aperiodische, rekurrente Klassen $I_{R_1} = \{1, 2\}$ und $I_{R_2} = \{3, 4, 5\}$.

Die Berechnung der stationären Verteilung der Klasse I_{R_1} führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.2u_1 + 0.7u_2 \\ u_2 &= 0.8u_1 + 0.3u_2 \qquad (u_1, u_2 \geq 0,\ u_1 + u_2 = 1). \end{aligned}$$

Dieses hat die (normierte) Lösung $u_1 = 7/15, u_2 = 8/15$.

Die Berechnung der stationären Verteilung der Klasse I_{R_2} führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_3 &= 0.3u_3 + 0.6u_4 \\ u_4 &= 0.5u_3 + 0.4u_5 \\ u_5 &= 0.2u_3 + 0.4u_4 + 0.6u_5 \qquad (u_3, u_4, u_5 \geq 0,\ u_3 + u_4 + u_5 = 1). \end{aligned}$$

Dieses hat die (normierte) Lösung $u_3 = 6/23, u_4 = 7/23, u_5 = 10/23$.

Startet die Markov-Kette in einer der beiden rekurrenten Klassen, so beschreibt die zugehörige stationäre Verteilung bereits das asymptotische Verhalten. Ist beispielsweise $i_0 = 1$ der Anfangszustand, so hält sich die Markov-Kette nach hinreichend langer Zeit mit Wahrscheinlichkeit 7/15 im Zustand 1 und mit Wahrscheinlichkeit 8/15 im Zustand 2 auf. Weitere Zustände werden nur mit Wahrscheinlichkeit 0 angenommen.

Startet die Markov-Kette jedoch in einem der beiden transienten Zustände, so müssen zunächst die Eintrittswahrscheinlichkeiten f_{6,R_1} und f_{6,R_2} sowie f_{7,R_1} und f_{7,R_2} in die beiden rekurrenten Klassen berechnet werden. Diese ergeben sich nach Satz 2.14 für I_{R_1} als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} u_6 &= 0.1 + 0.3u_6 + 0.1u_7 \\ u_7 &= 0.2 + 0.2u_6 + 0.4u_7 \qquad (u_6, u_7 \in [0,1]) \end{aligned}$$

zu $f_{6,R_1} = u_6 = 0.2$ bzw. $f_{7,R_1} = u_7 = 0.4$. Für I_{R_2} erhält man das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u_6 &= 0.5 + 0.3u_6 + 0.1u_7 \\ u_7 &= 0.2 + 0.2u_6 + 0.4u_7 \qquad (u_6, u_7 \in [0,1]) \end{aligned}$$

mit der Lösung $f_{6,R_2} = u_6 = 0.8$ bzw. $f_{7,R_2} = u_7 = 0.6$.

Startet die Markov-Kette beispielsweise im Zustand $i_0 = 7$, so gelangt sie mit Wahrscheinlichkeit 0.4 in die Klasse 1 und mit der Wahrscheinlichkeit 0.6 in die Klasse 2 und verhält sich dann gemäß der dortigen stationären Verteilung. So wird beispielsweise der Zustand 1 nach hinreichend langer Zeit mit Wahrscheinlichkeit $0.4 \cdot 7/15$ angenommen, während Zustand 3 mit Wahrscheinlichkeit $0.6 \cdot 6/23$ angenommen wird.

Die f_{ij}, $i, j \in I_T$, haben keine Bedeutung (da $\pi_j = 0$, $j \in I_T$). Fasst man die übrigen f_{ij} unter Berücksichtigung von Satz 2.14 zu einer Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & * & * \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & * & * \end{pmatrix}$$

zusammen, beachtet $\mu_{jj}^{-1} = u_j$ für $j \in I_{R_\nu}$ (nach Satz 2.27) und setzt formal $\mu_{jj} = \infty$ für $j \in I_T$, so existiert $P^\infty := \lim_{n\to\infty} P^n = (\frac{f_{ij}}{\mu_{jj}})$ und es ist

$$P^\infty = \begin{pmatrix} 7/15 & 8/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/15 & 8/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/23 & 7/23 & 10/23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/23 & 7/23 & 10/23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/23 & 7/23 & 10/23 & 0 & 0 \\ 7/75 & 8/75 & 24/115 & 28/115 & 8/23 & 0 & 0 \\ 14/75 & 16/75 & 18/115 & 21/115 & 6/23 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeile i der Matrix P^∞ kann man nun interpretieren als die asymptotische Verteilung der Zustände der Markov-Kette bei Start im Zustand i. So ergibt sich bspw. Zeile 7 als Konvexkombination $\lambda_1\pi^{(1)} + \lambda_2\pi^{(2)}$ der beiden stationären Verteilungen $\pi^{(1)}$ und $\pi^{(2)}$ mit $\lambda_1 = 0.4$ und $\lambda_2 = 0.6$. $\Diamond$

Beispiel (Bsp. 2.1 - Forts. 5) **2.30**

Betrachten wir noch einmal das Glücksspiel unter einem etwas anderen Blickwinkel. Die Ruinzustände 0 und 6 bilden zwei rekurrente Klassen $I_{R_1} = \{0\}$ und $I_{R_2} = \{6\}$ mit den stationären Verteilungen $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ und $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Die Eintrittswahrscheinlichkeit $f_{4,I_{R_1}} = 1/3$ in Klasse 1 haben wir bereits im Zusammenhang mit der Ruinwahrscheinlichkeit $P_4(T_0 < \infty)$ berechnet. Entsprechend erhält man $f_{4,I_{R_2}} = 2/3$. Damit ist $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = 4) = \pi_j$, $j \in I$, mit $\pi = (1/3, 0, 0, 0, 0, 0, 2/3)$. $\Diamond$

Bewertete Markov-Ketten **2.7**

Die Zustände X_n einer Markov-Kette unterliegen häufig einer Bewertung $r(X_n)$ in Form erzielter Gewinne oder auch anfallender Kosten. So fallen z.B. in einem Lager Bestell-, Lager- und Fehlmengenkosten in Abhängigkeit vom Lagerbestand an (vgl. Beispiel 5.7). Wesentlich mitgeprägt werden diese Kosten noch von der Bestellpolitik des Lagerverwalters, also den Regeln, nach denen er das Lager wieder auffüllt. Diese lassen sich verändern. Daher ist es naheliegend, Bestellpolitiken zu vergleichen und die beste auszuwählen. Doch welche ist in diesem Zusammenhang die beste? Generell können wir festhalten, dass die Höhe der Gewinne oder Kosten noch von der Auslegung eines Systems abhängt, auf die man Einfluss nehmen kann.

Im Falle einstufiger Gewinne zieht man gewöhnlich eines der beiden folgenden Kriterien zur Bewertung eines Systems heran:

(a) **erwarteter diskontierter Gesamtgewinn:** $(\alpha \in (0,1))$

$$V_\alpha(i) := E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n r(X_n) \mid X_0 = i\right), \quad i \in I.$$

(b) **erwarteter Gewinn pro Zeitstufe:**

$$G(i) := \lim_{N\to\infty} E\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} r(X_n) \mid X_0 = i\right), \quad i \in I.$$

Im Falle einstufiger Kosten bleiben die Formeln erhalten und es ändern sich lediglich die Bezeichnungen. Wir sprechen dann von den **erwarteten diskontierten Gesamtkosten** bzw. den **erwarteten Kosten pro Zeiteinheit**. Bei den weiteren Überlegungen beziehen wir uns daher auch nur auf einstufige Gewinne.

Bei der Betrachtung des diskontierten Gesamtgewinns (Diskontierungsfaktor $\alpha \in (0,1)$) wird der auf der Stufe n anfallende Gewinn $r(X_n)$ mit α^n gewichtet und die gewichteten einstufigen Gewinne $\alpha^n r(X_n)$ werden über alle $n \in \mathbb{N}_0$ aufsummiert. Das Ergebnis $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n r(X_n)$ ist dann eine Zufallsvariable, die von der Folge $X_0, X_1, \ldots$ der Zustände der Markov-Kette abhängt und sich demzufolge mit jeder Realisation $(i_0, i_1, \ldots)$ des Prozesses ändert. Daher geht man zu einem mittleren Wert über, der sich bei unendlich vielen Wiederholungen einstellen würde, also gerade zu dem Erwartungswert $E(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n r(X_n))$ der Summe der diskontierten einstufigen Gewinne.

Bedingt man nun noch bzgl. dem Anfangszustand $X_0 = i_0$, so erhält man mit $V_\alpha(i_0) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n r(X_n) \mid X(0) = i\right)$ den erwarteten diskontierten Gesamtgewinn bei Start im Zustand i_0. Schreibt man $V_\alpha(i)$, $i \in I$, um in

$$
\begin{aligned}
V_\alpha(i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n E\left(r(X_n) \mid X(0) = i\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j \in I} r(j) P(X_n = j \mid X(0) = i) \qquad (2.14) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} r(j),
\end{aligned}
$$

so wird noch einmal deutlich, mit welchem Gewicht die einstufigen Gewinne $r(j)$ in den diskontierten Gesamtgewinn eingehen.

Bei der Betrachtung des durchschnittlichen Gewinns pro Zeitstufe kehrt sich die Gewichtung der einstufigen Gewinne vollständig um. Nicht mehr die in „naher“ Zukunft anfallenden Gewinne werden hoch gewichtet, sondern die in „ferner“ Zukunft anfallenden Gewinne.

Mit Hilfe von $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r(X_n)$ erhält man zunächst den durchschnittlichen Gewinn auf den ersten N Stufen. Dieser hängt von der Folge $X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$ der Zustände der Markov-Kette ab und ändert sich demzufolge mit jeder Realisation $(i_0, i_1, \ldots, i_{N-1})$ des Prozesses. Daher geht man auch hier zu einem mittleren Wert, den Erwartungswert $E(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r(X_n))$, über. Führt man nun den Grenzübergang $N \to \infty$ durch, so erhält man mit $\lim_{N \to \infty} E(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} r(X_n))$ den erwarteten Gewinn pro Zeitstufe.

Bedingt man nun noch bzgl. dem Anfangszustand $X_0 = i_0$, so erhält man mit $G(i_0) = \lim_{N\to\infty} G_N(i_0) = \lim_{N\to\infty} E(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} r(X_n) \mid X_0 = i)$ den erwarteten Gewinn pro Zeitstufe bei Start im Zustand i_0. In Analogie zu (2.14) kann man $G_N(i)$, $i \in I$, umschreiben in

$$\begin{aligned} G_N(i) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E(r(X_n) \mid X(0) = i) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(\sum_{j\in I} r(j)p_{ij}^{(n)}) \qquad (2.15) \\ &= \sum_{j\in I} r(j)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung von $V_\alpha(i)$ und $G(i)$ erweisen sich die folgenden Sätze als äußerst nützlich. Sie präzisieren noch einmal die Voraussetzungen, unter denen die bisherigen Aussagen möglich sind und stellen die zu berechnenden Gleichungssysteme bereit.

Satz **2.31**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum I und $r : I \to \mathbb{R}$ beliebig.

(i) Sei $\alpha \in (0,1)$. Dann ergibt sich $V_\alpha(i)$, $i \in I$, als eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$v(i) = r(i) + \alpha\sum_{j\in I} p_{ij}v(j), \quad i \in I. \qquad (2.16)$$

(ii) Die Markov-Kette besitze genau eine rekurrente Klasse I_R. Dann gilt

$$G(i) = g = \sum_{j\in I_R} \pi_j r(j), \quad i \in I,$$

wobei π die stationäre Verteilung von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

(iii) Die Markov-Kette besitze genau eine rekurrente Klasse. Dann ist $G(i) = g$, $i \in I$, (auch) Lösung des linearen Gleichungssystems

$$v(i) + g = r(i) + \sum_{j\in I} p_{ij}v(j), \quad i \in I,$$

mit $v(i_0) = 0$ für ein $i_0 \in I$.

Beweis: (i) Sei $\hat{r} := \max_{j \in I} |r(j)|$. Zunächst folgt $V_\alpha(i) \in \mathbb{R}$ aus (2.14) und

$$|V_\alpha(i)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} r(j)| \le \hat{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = \hat{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\hat{r}}{1-\alpha} < \infty.$$

Geht man nun zur Vektorschreibweise über, so erhält man

$$V_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P^n r = r + \alpha P(r + \alpha P r + \ldots) = r + \alpha P V_\alpha.$$

Damit ist V_α Lösung von (2.16). Sei $\tilde{V}_\alpha(i) \in \mathbb{R}$, $i \in I$, eine weitere Lösung und $\hat{v} := \max_{j \in I}\{V_\alpha(j) - \tilde{V}_\alpha(j)\}$. Dann ist $\hat{v} < \infty$ und es gilt

$$V_\alpha(i) - \tilde{V}_\alpha(i) = \alpha \sum_{j \in I} p_{ij}(V_\alpha(j) - \tilde{V}_\alpha(j)), \quad i \in I. \tag{2.17}$$

Wiederholte Anwendung von (2.17) führt dann auf

$$V_\alpha(i) - \tilde{V}_\alpha(i) = \alpha^n \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)}(V_\alpha(j) - \tilde{V}_\alpha(j)) \le \alpha^n \hat{v}, \quad i \in I,\ n \in \mathbb{N},$$

und damit auf $V_\alpha(i) - \tilde{V}_\alpha(i) \le 0$, $i \in I$. Entsprechend zeigt man $\tilde{V}_\alpha(i) - V_\alpha(i) \le 0$ für $i \in I$. Somit ist V_α eindeutige Lösung von (2.16) und der Beweis von (i) ist abgeschlossen.

(ii) folgt durch Grenzübergang $N \to \infty$ aus (2.15) in Verbindung mit Satz 2.15 (für j rekurrent) und Satz 2.11 (für j transient); (iii) ergibt sich aus der Theorie der Markovschen Entscheidungsprozesse, der wir uns in Kapitel 6 zuwenden werden (Spezialfall des Satzes 6.20(i) mit nur einer Aktion in jedem Zustand). □

$V_\alpha(i)$, $i \in I$, kann als Lösung des linearen Gleichungssystems (2.16) mit Standardmethoden bestimmt werden. Dasselbe trifft auch für $G(i)$, $i \in I$, zu. Allerdings nur unter der zusätzlichen Annahme, dass die Markov-Kette nur eine rekurrente Klasse hat. In diesem Fall ist $G(i) = g$, $i \in I$, unabhängig vom Anfangszustand der Markov-Kette. Wählt man Darstellung (ii), so ergibt sich g als gewichtete Summe $g = \sum \pi_j r(j)$ der einstufigen Gewinne. Dabei kann man die durch die stationäre Verteilung π festgelegten Gewichte π_j interpretieren als die Wahrscheinlichkeiten, mit denen sich die Zustände der Markov-Kette „nach hinreichend langer Zeit" einstellen.

Satz 2.31(i) lässt sich übertragen auf eine Markov-Kette mit abzählbarem Zustandsraum. Hierzu hat man lediglich die Funktion $r : I \to \mathbb{R}$ als beschränkt anzunehmen. Bei der Übertragung von Satz 2.31(ii) hat man zusätzlich sicherzustellen, dass die rekurrente Klasse positiv-rekurrent ist.

Beispiel **2.32**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine bewertete Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1,2,3\}$, Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

und den einstufigen Gewinnen $r(1) = 8$, $r(2) = 16$, $r(3) = 7$.

(a) Für $\alpha = 0.9$ ergibt sich der diskontierte Gesamtgewinn $V_\alpha(i)$, $i \in I$, als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$v(1) = \ 8 + 0.9[\tfrac{1}{2}v(1) + \tfrac{1}{4}v(2) + \tfrac{1}{4}v(3)]$$

$$v(2) = 16 + 0.9[\tfrac{1}{2}v(1) + \tfrac{1}{2}v(3)]$$

$$v(3) = \ 7 + 0.9[\tfrac{1}{4}v(1) + \tfrac{1}{4}v(2) + \tfrac{1}{2}v(3)]$$

und hat die Werte $V_{0.9}(1) = 91.3$, $V_{0.9}(2) = 97.6$ und $V_{0.9}(3) = 90.0$.

(b) Da (X_n) irreduzibel ist, ergibt sich der durchschnittliche Gewinn g pro Zeitstufe mit Hilfe der stationären Verteilung π zu $g = \sum_{i\in I} r(i)\pi_i = 8\pi_1 + 16\pi_2 + 7\pi_3 = 9.2$, wobei π Lösung von

$$u_1 = \tfrac{1}{2}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{4}u_3$$

$$u_2 = \tfrac{1}{4}u_1 + \tfrac{1}{4}u_3$$

$$u_3 = \tfrac{1}{4}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2 + \tfrac{1}{2}u_3 \qquad (u_1, u_2, u_3 \geq 0,\ u_1 + u_2 + u_3 = 1)$$

ist. Alternativ kann man g als Lösung des Gleichungssystems

$$v(1) + g = \ 8 + \tfrac{1}{2}v(1) + \tfrac{1}{4}v(2) + \tfrac{1}{4}v(3)$$

$$v(2) + g = 16 + \tfrac{1}{2}v(1) + \tfrac{1}{2}v(3)$$

$$v(3) + g = \ 7 + \tfrac{1}{4}v(1) + \tfrac{1}{4}v(2) + \tfrac{1}{2}v(3)$$

mit (z.B.) $v(2) = 0$ bestimmen. $\Diamond$

2.8 Eine weitere Charakterisierung der Markov-Kette

Betrachtet man die Markov-Kette nur zu den Zeitpunkten $T_0 = 0$, T_1, T_2, …, zu denen eine Zustandsänderung stattfindet, so sind diese Zeitpunkte nicht mehr fest, sondern zufällig. Zufallsvariable sind damit auch die **Aufenthaltsdauern** in den einzelnen Zuständen, also die Differenzen $D_1 = T_1 - T_0$, $D_2 = T_2 - T_1$, ... der Zeitpunkte der Zustandsänderungen.

Mit Hilfe der Aufenthaltsdauern $D_1, D_2, \ldots$ erhält man die folgende Charakterisierung der Markov-Kette:

(a) Befindet sich die Markov-Kette zum Zeitpunkt T_n im Zustand $X_{T_n} = i$, so ist für $t \in \mathbb{N}_0$

$$P(D_n > t \mid X_{T_n} = i) = P(X_{T_n+1} = i, \ldots, X_{T_n+t} = i \mid X_{T_n} = i) = (p_{ii})^t.$$

Folglich wird der Zustand i entweder nicht mehr verlassen ($p_{ii} = 1$), nach genau einem Schritt wieder verlassen ($p_{ii} = 0$) oder die Aufenthaltsdauer D_n im Zustand i

$$\begin{aligned} P(D_n = t \mid X_{T_n} = i) &= P(D_n > t-1 \mid X_{T_n} = i) - P(D_n > t \mid X_{T_n} = i) \\ &= (1 - p_{ii})(p_{ii})^{t-1}, \quad t \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ist geometrisch verteilt mit Parameter $1 - p_{ii} \in (0, 1)$.

(b) Ein Übergang vom Zustand i in den nachfolgenden Zustand $j \neq i$ zum Zeitpunkt T_{n+1} erfolgt dann mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X_{T_{n+1}} = j \mid X_{T_n} = i, D_n = t) &= P(X_{T_{n+1}} = j \mid X_{T_{n+1}} \neq i, X_{T_{n+1}-1} = i) \\ &= p_{ij}/(1 - p_{ii}). \end{aligned}$$

Diese ist unabhängig von der Aufenthaltsdauer im Zustand i.

Somit hält sich die Markov-Kette eine geometrisch verteilte Zeit in einem Zustand i auf und geht dann unabhängig von der Aufenthaltsdauer in einen nachfolgenden Zustand $j \neq i$ über.

2.9 Ergänzende Beweise

Beweis zu Satz 2.15

Sei $\psi_{ij}(\alpha) := \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m p_{ij}^{(m)}$ für alle $\alpha \in (0, 1)$. Wir zeigen zunächst, dass $\lim_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) \psi_{ij}(\alpha) = f_{ij}/\mu_{jj}$ gilt. Die Behauptung des Satzes ergibt sich dann zusammen mit Satz A.9(ii) aus

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ij}^{(m)} = \lim_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m p_{ij}^{(m)}.$$

Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Differenziert man

$$\Phi(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n P(X = n),$$

die erzeugende Funktion von X, nach α, so gilt für die Ableitung

$$\Phi'(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} P(X = n)$$

und speziell für $\alpha = 1$

$$\Phi'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = E(X).$$

Angewandt auf T_j (wobei $f_{ij}^{(n)} := P(T_j = n \mid X_0 = i)$) erhält man dann

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n f_{ij}^{(n)} \\
\Phi_{ij}(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij} \\
\Phi'_{ij}(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} f_{ij}^{(n)} \\
\Phi'_{ij}(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} = E(T_j) = \mu_{ij}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}(\alpha)\psi_{jj}(\alpha) &= (\alpha f_{ij}^{(1)} + \alpha^2 f_{ij}^{(2)} + \ldots)\,(1 + \alpha p_{jj} + \ldots) \\
&= \alpha f_{ij}^{(1)} + \alpha^2 f_{ij}^{(2)} + \alpha^2 f_{ij}^{(1)} p_{jj} + \ldots \\
&= \alpha p_{ij} + \alpha^2 p_{ij}^{(2)} + \ldots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m p_{ij}^{(m)} \\
&= \psi_{ij}(\alpha) - \delta_{ij},
\end{aligned}$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 sonst, und damit

$$\psi_{ij}(\alpha) = \begin{cases} (1 - \Phi_{jj}(\alpha))^{-1} & \text{für } i = j \\ \Phi_{ij}(\alpha)\,(1 - \Phi_{jj}(\alpha))^{-1} & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Weiter ist

$$\lim_{\alpha\uparrow 1}\frac{(1-\alpha)}{(1-\Phi_{jj}(\alpha))}=\lim_{\alpha\uparrow 1}\frac{(d/d\alpha)(1-\alpha)}{(d/d\alpha)(1-\Phi_{jj}(\alpha))}=\frac{-1}{-\Phi'_{jj}(1)}=\frac{1}{\mu_{jj}}.$$

Multipliziert man nun $\psi_{ij}(\alpha)$ mit $(1-\alpha)$ und führt den Grenzübergang $\alpha\uparrow 1$ durch, so folgt

$$\lim_{\alpha\uparrow 1}(1-\alpha)\psi_{ij}(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu_{jj}} & \text{für } i=j\\ \dfrac{f_{ij}}{\mu_{jj}} & \text{für } i\neq j.\end{cases}$$

Damit ist Satz 2.15 bewiesen. □

2.10 e-stat Module und Aufgaben

Die in diesem Kapitel verwendeten Module finden Sie im Online-Kurs „Stochastische Modelle (Kapitel 2)“.

2.33 **Modul** **Schmetterling** (Lernziel: Grundlagen)

Lassen Sie den Schmetterling weiterfliegen. Wählen Sie die nächste Blüte aus [Wähle]. Realisieren Sie den Flug zur nächsten Blüte [Fliege]. Wiederholen Sie die Schritte mehrmals [Wähle] [Fliege] ... [Wähle] [Fliege].

Beschreiben Sie nun die Bewegungen des Schmetterlings durch eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I=\{1,\ldots,4\}$ und Übergangsmatrix

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.3 & 0.2 & 0.5\\ 0.1 & 0 & 0.6 & 0.3\\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4\\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0\end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie den Übergangsgraph.

(b) Nach fünf Schritten befinde sich der Schmetterling im Zustand $X_5=1$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er

(1) nach 2 weiteren Schritten wieder im Zustand 1?

(2) noch mindestens 2 Schritte im Zustand 1?

Modul **Glücksspiel** (Lernziel: Absorptionsverhalten) **2.34**

Sie verfügen über ein Startkapital von $\boxed{4}$ GE. Ihr Gegenspieler verfügt über ein Startkapital von $8 - \boxed{4}$ GE. Die Münze sei fair ($p = 1/2$). Simulieren Sie einen Münzwurf und beobachten Sie, wie sich Ihr Kapital (fette Linie) und das Ihres Gegenspielers (punktierte Linie) verändern $\boxed{\text{Münze}}$. Wiederholen Sie die Münzwürfe solange bis Sie oder Ihr Gegenspieler sein Kapital verspielt hat (Spielende) $\boxed{\text{Münze}}$ ... $\boxed{\text{Münze}}$.

Simulieren Sie 10 Spiele. Notieren Sie nach jedem Spiel die Anzahl der Spielrunden.

(a) Schätzen Sie anhand Ihrer Aufzeichnungen den Erwartungswert und die Varianz der Spieldauer T (Zeitpunkt zu dem das Spiel endet) in Abhängigkeit Ihres Startguthabens.

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte mit Hilfe von Satz 2.6 und vergleichen Sie die exakten Werte mit den geschätzten Werten.

(c) Worauf ist die Abweichung der exakten und geschätzten Werte zurückzuführen?

Führen Sie nun 10 weitere Spiele mit einem Startkapital von 3 GE durch. Lassen sich diese Ergebnisse zur Bestimmung der Spieldauer bei einem Startkapital von 5 GE heranziehen?

Aufgabe **2.35**

Spieler A und Spieler B, die beide über ein Startkapital von 2 GE verfügen, vereinbaren das folgende Spiel: In jeder Spielrunde zahlen zunächst beide Spieler 1 GE ein. Der eingezahlte Betrag von 2 GE wird in Abhängigkeit vom Ergebnis des Wurfes mit einem fairen Würfel nach den folgenden Regeln auf beide Spieler aufgeteilt:

Spieler A erhält 1 GE (bzw. 2 GE) des gemeinsamen Einsatzes, wenn der Wurf mit dem fairen Würfel eine 5 (bzw. 6) ergibt und er geht leer aus, wenn der Wurf eine 1, 2, 3 oder 4 ergibt. Den Rest des gemeinsamen Einsatzes erhält Spieler B. Das Spiel ist beendet, sobald einer der beiden Spieler über kein Geld mehr verfügt.

(a) Beschreiben Sie den Spielverlauf durch eine Markov-Kette. Bestimmen Sie insbesondere Zustandsraum, Übergangsmatrix und Übergangsgraph der Markov-Kette.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler A

(1) nach 2 Spielrunden über ein Kapital von 3 GE verfügt.

(2) nach 2 Spielrunden über ein Kapital von weniger als 3 GE verfügt.

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden mindestens 3 Runden gespielt?

(d) Nach wieviel Spielrunden wird im Mittel das Spiel beendet sein?

Das Spiel benachteiligt offensichtlich Spieler A. Wie könnte Ihrer Meinung ein faires Spiel aussehen?

2.36 **Aufgabe**

Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1, \ldots, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die absorbierenden Zustände.

(b) Berechnen Sie, ausgehend von $X_0 = 1$, die Wahrscheinlichkeit, mit der

(1) Zustand 2 in endlicher Zeit erreicht wird.

(2) einer der absorbierenden Zustände in endlicher Zeit erreicht wird.

(c) Ändert sich die Situation, wenn die Markov-Kette im Zustand 5 startet?

2.37 **Modul** **Kugeln** (Lernziel: stationäre Verteilung)

Sie betrachten Beispiel 2.19 für $a = \boxed{0.5}$. Ihr Ziel ist es, die stationäre Verteilung der drei Kugelanordnungen experimentell zu bestimmen. Hierzu ziehen Sie nacheinander 1, 1, 1, 1, 1, 100, 100, 100, 100, 100, 500, 500, ... Kugeln (ohne das System zurückzusetzen) und beobachten die Entwicklung der relativen Häufigkeit der Kugelanordnungen. Entspricht die Entwicklung Ihren Erwartungen?

(a) Gehen Sie nun noch einmal systematisch vor. Ziehen Sie nacheinander 10-mal 10 Kugeln und vergleichen Sie die relativen Häufigkeiten der Kugelanordnungen.

(b) Wiederholen Sie das Experiment mit 100 (1000) Kugeln. Fällt Ihnen ein Unterschied zu (a) auf?

(c) Vergleichen Sie schließlich die relative Häufigkeit der aus allen Einzelziehungen zusammengesetzten Ziehung mit der stationären Verteilung der Kugelanordnungen. Wie groß ist die Abweichung?

Aufgabe **2.38**

(a) Bestimmen Sie für eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alle transienten, rekurrenten, positiv-rekurrenten und null-rekurrenten Zustände sowie alle rekurrenten, positiv-rekurrenten und null-rekurrenten Klassen.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, ausgehend vom Zustand 5 den Zustand 2

(1) zum Zeitpunkt $n = 4$ erstmalig zu erreichen.

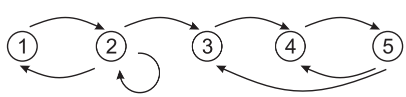
(2) überhaupt zu erreichen.

(c) Wie groß ist die erwartete Anzahl der Besuche im Zustand 3 (bzw. Zustand 2) bei Start im Zustand 3?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Zustand 3 bei Start im Zustand 3 mindestens (genau) 5-mal angenommen?

Modul **Rückkehrverhalten** (Lernziel: Rückkehrverhalten) **2.39**

Bestimmen Sie für eine Markov-Kette mit Übergangsgraph



die Matrix $F = (f_{ij})$ der Rückkehr- und Ersteintrittswahrscheinlichkeiten.

2.40 **Aufgabe**

Gegeben sei eine Markov-Kette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, \ldots, 7\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie den zugehörigen Übergangsgraphen.

(b) Bestimmen Sie für jeden Zustand die Periode.

(c) Bestimmen Sie die rekurrenten Klassen der Markov-Kette.

(d) Berechnen Sie die mittleren Rückkehrzeiten der rekurrenten Zustände.

(e) Stellen Sie die Matrix $F = (f_{ij})$ auf.

(f) Berechnen Sie alle stationären Verteilungen der Markov-Kette.

2.41 **Aufgabe**

Ein Unternehmen verfüge über 1000 Stellen, die mit Mitarbeitern der Lohngruppen L_1, L_2 und L_3 besetzt werden können. Momentan sind 60% in der Lohngruppe L_1 und jeweils 20% in den Lohngruppen L_2 und L_3. Ein Mitarbeiter koste das Unternehmen 2000 GE in der Lohngruppe L_1, 3000 GE in der Lohngruppe L_2 und 4000 GE in der Lohngruppe L_3. Damit entfallen momentan auf einen Mitarbeiter durchschnittlich 2600 GE.

Das Unternehmen geht davon aus, dass in den Lohngruppen L_1 und L_2 jährlich jeweils 10% in die nächsthöhere Lohngruppe aufsteigen und in den Lohngruppen L_2 und L_3 jährlich jeweils 10% ausscheiden und durch neue Mitarbeiter ersetzt werden, die wieder in der Lohngruppe L_1 beginnen.

Beschreiben Sie die Entwicklung des Personalbestands durch eine Markov-Kette und berechnen Sie mit Hilfe der stationären Verteilung die langfristig zu erwartenden durchschnittlichen Kosten pro Mitarbeiter.

Modul Diskrete Suche (Lernziel: Random Walk) **2.42**

Bestimmen Sie das Maximum einer differenzierbaren Funktion $f(x_1, x_2)$ über dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ nicht über die ersten beiden Ableitungen der Funktion f, sondern als Ergebnis einer zufälligen Suche auf den Gitterpunkten $(\frac{i}{m}, \frac{j}{m})$, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, von $[0,1]^2$ (für ein $m \in \mathbb{N}$). Der Suche liegt ein zweidimensionaler Random Walk zugrunde (vgl. Beispiel 2.18).

(a) Führen Sie 5 Suchschritte durch. Wiederholen Sie die Suchschritte mehrfach und notieren Sie sich den auf diese Weise gefundenen maximalen Funktionswert.

(b) Welche Möglichkeiten sehen Sie, das in (a) gefundene Suchergebnis zu verbessern?

(c) Hat das Verfahren eine praktische Bedeutung, auch wenn es bei differenzierbaren Funktionen der „klassischen" Vorgehensweise unterlegen sein sollte?

Aufgabe **2.43**

Zeigen Sie:

(a) Für eine Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}_0$ gilt

$$E(T) = \sum_{t=0}^{\infty} P(T > t).$$

(b) Für eine stetige Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{R}_+$ gilt

$$E(T) = \int_0^{\infty} P(T > t)dt.$$

http://www.springer.com/978-3-642-32911-1

Stochastische Modelle
Eine anwendungsorientierte Einführung
Waldmann, K.-H.; Stocker, U.M.
2013, VIII, 263 S. 46 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-32911-1