

# Préface

Cet ouvrage est issu des notes d'un cours d'introduction au calcul stochastique enseigné en DEA puis en deuxième année de master, à l'Université Pierre et Marie Curie et à l'Université Paris-Sud. L'objectif de ce cours était de donner une présentation concise mais rigoureuse de la théorie de l'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales continues, en portant une attention particulière au mouvement brownien. Le présent ouvrage s'adresse à des étudiants ayant bien assimilé un cours de probabilités avancées, incluant notamment les outils de la théorie de la mesure et la notion d'espérance conditionnelle, au niveau de la première année de master. Nous supposons aussi une certaine familiarité avec la notion d'uniforme intégrabilité (voir par exemple le chapitre II du livre de Neveu [7]). Pour la commodité du lecteur, nous avons rappelé en appendice les résultats de la théorie des martingales discrètes, souvent mais pas toujours enseignés en première année de master, que nous utilisons dans notre étude des martingales en temps continu.

Le premier chapitre est une présentation rapide des vecteurs et processus gaussiens, dont l'objectif principal est d'arriver à la notion de mesure gaussienne, qui permet dans le second chapitre de donner une construction simple du mouvement brownien. Nous discutons les propriétés fondamentales du mouvement brownien, y compris la propriété de Markov forte et son application au principe de réflexion. Le Chapitre 2 permet en outre d'introduire dans le cadre relativement simple du mouvement brownien les notions importantes de filtration et de temps d'arrêt, qui sont étudiées de manière plus systématique et abstraite dans le Chapitre 3. Ce chapitre traite aussi les martingales et surmartingales à temps continu, en mettant l'accent sur les théorèmes de régularité des trajectoires et sur le théorème d'arrêt qui, utilisé conjointement avec le calcul stochastique, constitue un outil puissant pour des calculs explicites. Le Chapitre 4 présente les semimartingales continues, en commençant par une discussion détaillée des fonctions et processus à variation finie. On introduit ensuite les martingales locales, en se restreignant comme dans la suite de l'ouvrage au cas des trajectoires continues. Une attention particulière est portée au théorème clé d'existence de la variation quadratique d'une martingale locale. Le Chapitre 5 est le cœur du présent ouvrage, avec la construction de l'intégrale

stochastique par rapport à une semimartingale continue, la preuve dans ce cadre de la célèbre formule d'Itô, et de nombreuses applications importantes (théorème de caractérisation de Lévy, inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, représentation des martingales dans la filtration brownienne, théorème de Girsanov, formule de Cameron-Martin, etc.). Les équations différentielles stochastiques, autre application très importante de la théorie du calcul stochastique, qui motiva l'invention par Itô de cette théorie, sont étudiées dans le Chapitre 7. Entre-temps, le Chapitre 6, qui présente les grandes idées de la théorie des processus de Markov avec l'accent sur le cas particulier des semigroupes de Feller, peut apparaître comme une digression à notre propos principal. Cependant, la théorie développée dans le Chapitre 6, outre qu'elle met en évidence des liens féconds avec la théorie des martingales, a le grand avantage de s'appliquer aux solutions d'équations différentielles stochastiques, dont les propriétés markoviennes jouent un rôle crucial dans nombre d'applications.

À la fin de chaque chapitre sont proposés un certain nombre d'exercices, dont la résolution est vivement conseillée au lecteur. Ces exercices sont particulièrement nombreux à la fin du Chapitre 5, car le calcul stochastique est d'abord une technique, qu'on ne saurait assimiler sans traiter un nombre suffisant d'exemples explicites. La grande majorité des exercices du présent ouvrage est issue soit des textes d'examens de cours enseignés à l'Université Pierre et Marie Curie et à l'Université Paris-Sud, soit des travaux dirigés assurés parallèlement à ces cours.

Le lecteur désireux d'aller plus loin dans la théorie et les applications du calcul stochastique pourra consulter les ouvrages classiques de Karatzas et Shreve [5], Revuz et Yor [9] et Rogers et Williams [10]. Pour une perspective historique sur le développement de la théorie, voir les articles originaux d'Itô [4], et le petit livre de McKean [6] qui contribua beaucoup à populariser ces travaux.

Je remercie Mylène Maïda pour son aide dans la mise au point et la compilation des exercices. Merci aussi à Igor Kortchemski pour la simulation de mouvement brownien qui illustre le Chapitre 2. Pour conclure, je tiens à remercier tout particulièrement Marc Yor, qui m'a appris l'essentiel de ce que je connais de la théorie du calcul stochastique, et dont les nombreuses remarques m'ont aidé à améliorer ce texte.

Orsay, France, Mai 2012

Jean-François Le Gall



<http://www.springer.com/978-3-642-31897-9>

Mouvement brownien, martingales et calcul  
stochastique

Le Gall, J.-F.

2013, VIII, 176 p. 2 ill., Softcover

ISBN: 978-3-642-31897-9