Chapitre 2
Le mouvement brownien

Résumé Ce chapitre est consacré à la construction du mouvement brownien et à l'étude de certaines de ses propriétés. Nous introduisons d'abord le pré-mouvement brownien (terminologie non canonique!) qu'on définit facilement à partir d'une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}_+$. Le passage du pré-mouvement brownien au mouvement brownien exige la propriété additionnelle de continuité des trajectoires, ici obtenue via le lemme classique de Kolmogorov. La fin du chapitre discute quelques propriétés importantes des trajectoires browniennes, et établit la propriété de Markov forte, avec son application classique au principe de réflexion.

2.1 Le pré-mouvement brownien

Dans ce chapitre, on se place à nouveau sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Définition 2.1. Soit G une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Le processus $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par

$$B_t = G(\mathbf{1}_{[0,t]})$$

est appelé pré-mouvement brownien.

Proposition 2.1. *Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien (centré) de fonction de covariance*

$$K(s,t) = \min\{s,t\} \stackrel{\text{(not.)}}{=} s \wedge t.$$

Démonstration. Par définition d'une mesure gaussienne, les variables B_t appartiennent à un même espace gaussien, et $(B_t)_{t\geq 0}$ est donc un processus gaussien. De plus, pour tous $s,t \geq 0$,

$$E[B_sB_t] = E[G([0,s])G([0,t])] = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, \mathbf{1}_{[0,s]}(r)\mathbf{1}_{[0,t]}(r) = s \wedge t. \qquad \square$$

J.-F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique,*
Mathématiques et Applications 71, DOI: 10.1007/978-3-642-31898-6_2,

Proposition 2.2. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs réelles. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un pré-mouvement brownien;*
(ii) $(X_t)_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien centré de covariance $K(s,t)=s\wedge t$;*
(iii) $X_0=0$ *p.s. et pour tous $0\leq s<t$, la variable X_t-X_s est indépendante de $\sigma(X_r, r\leq s)$ et suit la loi $\mathscr{N}(0,t-s)$;*
(iv) $X_0=0$ *p.s. et pour tout choix de $0=t_0<t_1<\cdots<t_p$, les variables $X_{t_i}-X_{t_{i-1}}$, $1\leq i\leq p$ sont indépendantes, la variable $X_{t_i}-X_{t_{i-1}}$ suivant la loi $\mathscr{N}(0,t_i-t_{i-1})$.*

Démonstration. L'implication (i)⇒(ii) est la Proposition 2.1. Montrons l'implication (ii)⇒(iii). On suppose que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré de covariance $K(s,t)=s\wedge t$, et on note H l'espace gaussien engendré par $(X_t)_{t\geq 0}$. Alors X_0 suit une loi $\mathscr{N}(0,0)$ et donc $X_0=0$ p.s. Ensuite, fixons $s>0$ et notons H_s l'espace vectoriel engendré par $(X_r, 0\leq r\leq s)$, $\tilde{H}_s$ l'espace vectoriel engendré par $(X_{s+u}-X_s, u\geq 0)$. Alors H_s et $\tilde{H}_s$ sont orthogonaux puisque, pour $r\in[0,s]$ et $u\geq 0$,

$$E[X_r(X_{s+u}-X_s)] = r\wedge(s+u)-r\wedge s = r-r = 0.$$

Comme H_s et $\tilde{H}_s$ sont aussi contenus dans le même espace gaussien H, on déduit du Théorème 1.2 que $\sigma(H_s)$ et $\sigma(\tilde{H}_s)$ sont indépendantes. En particulier, si on fixe $t>s$, la variable X_t-X_s est indépendante de $\sigma(H_s)=\sigma(X_r, r\leq s)$. Enfin, en utilisant la forme de la fonction de covariance, on voit aisément que X_t-X_s suit la loi $\mathscr{N}(0,t-s)$.

L'implication (iii)⇒(iv) est facile : en prenant $s=t_{p-1}$ et $t=t_p$ on obtient d'abord que $X_{t_p}-X_{t_{p-1}}$ est indépendante de $(X_{t_1},\ldots,X_{t_{p-1}})$ et on continue par récurrence.

Montrons l'implication (iv)⇒(i). Il découle facilement de (iv) que X est un processus gaussien. Ensuite, si f est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}_+$ de la forme $f=\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}$, on pose

$$G(f)=\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_{t_i}-X_{t_{i-1}})$$

(observer que cette définition ne dépend pas de l'écriture choisie pour f). On vérifie immédiatement que si g est une autre fonction en escalier du même type on a

$$E[G(f)G(g)] = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Grâce à la densité des fonctions en escalier dans $L^2(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\mathrm{d}t)$, on en déduit que l'application $f\mapsto G(f)$ s'étend en une isométrie de $L^2(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\mathrm{d}t)$ dans l'espace gaussien engendré par X. Enfin, par construction, $G([0,t])=X_t-X_0=X_t$. □

Remarque. La propriété (iii) (avec seulement le fait que la loi de X_t-X_s ne dépend que de $t-s$) est souvent appelée propriété d'indépendance et de stationnarité des accroissements. Le pré-mouvement brownien est un cas particulier de la classe des processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Corollaire 2.1. *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un pré-mouvement brownien. Alors, pour tout choix de $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, la loi du vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ a pour densité*

$$p(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})}} \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\Big),$$

où par convention $x_0 = 0$.

Démonstration. Les variables $B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$ étant indépendantes et de lois respectives $\mathcal{N}(0,t_1), \mathcal{N}(0,t_2-t_1), \ldots, \mathcal{N}(0,t_n-t_{n-1})$, le vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ a pour densité

$$q(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})}} \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{2(t_i-t_{i-1})}\Big),$$

et il suffit de faire le changement de variables $x_i = y_1 + \cdots + y_i$ pour $i \in \{1,\ldots,n\}$. □

Remarque. Le Corollaire 2.1, avec la propriété $B_0 = 0$, détermine les *lois marginales de dimension finie* du pré-mouvement brownien (rappelons qu'il s'agit de la donnée, pour tout choix de $t_1,\ldots,t_p \in \mathbb{R}_+$, de la loi de $(B_{t_1},\ldots,B_{t_p})$). La propriété (iv) de la Proposition 2.2 montre qu'un processus ayant les mêmes lois marginales qu'un pré-mouvement brownien doit aussi être un pré-mouvement brownien.

Proposition 2.3. *Soit B un pré-mouvement brownien. Alors,*

(i) *$-B$ est aussi un pré-mouvement brownien;*
(ii) *pour tout $\lambda > 0$, le processus $B_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}$ est aussi un pré-mouvement brownien (invariance par changement d'échelle);*
(iii) *pour tout $s \geq 0$, le processus $B_t^{(s)} = B_{s+t} - B_s$ est un pré-mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$ (propriété de Markov simple).*

Démonstration. (i) et (ii) sont très faciles. Démontrons (iii). Avec les notations de la preuve de la Proposition 2.2, la tribu engendrée par $B^{(s)}$ est $\sigma(\tilde{H}_s)$, qui est indépendante de $\sigma(H_s) = \sigma(B_r, r \leq s)$. Pour voir que $B^{(s)}$ est un pré-mouvement brownien, il suffit de vérifier la propriété (iv) de la Proposition 2.2, ce qui est immédiat puisque $B_{t_i}^{(s)} - B_{t_{i-1}}^{(s)} = B_{s+t_i} - B_{s+t_{i-1}}$. □

Si B est un pré-mouvement brownien et G est la mesure gaussienne associée, on note souvent pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+), \mathrm{d}t)$,

$$G(f) = \int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}B_s$$

et de même

$$G(f\mathbf{1}_{[0,t]}) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}B_s \quad , \quad G(f\mathbf{1}_{]s,t]}) = \int_s^t f(r)\,\mathrm{d}B_r\,.$$

Cette notation est justifiée par le fait que si $u < v$,

$$\int_u^v \mathrm{d}B_s = G(]u,v]) = B_v - B_u.$$

L'application $f \mapsto \int_0^\infty f(s)\,\mathrm{d}B_s$ (c'est-à-dire la mesure gaussienne G) est alors appelée intégrale de Wiener par rapport au pré-mouvement brownien B. Rappelons que $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}B_s$ suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \int_0^\infty f(s)^2\mathrm{d}s)$.

Comme les mesures gaussiennes ne sont pas de "vraies" mesures, la notation $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}B_s$ ne correspond pas à une "vraie" intégrale dépendant de ω. Une partie importante de la suite de ce cours est consacrée à étendre la définition de $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}B_s$ à des fonctions f qui peuvent dépendre de ω.

2.2 La continuité des trajectoires

Définition 2.2. Si $(X_t)_{t\in T}$ est un processus aléatoire à valeurs dans un espace E, les trajectoires de X sont les applications $T \ni t \mapsto X_t(\omega)$ obtenues en fixant ω. Les trajectoires constituent donc une famille, indexée par $\omega \in \Omega$, d'applications de T dans E.

Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un pré-mouvement brownien. Au stade où nous en sommes, on ne peut rien affirmer au sujet des trajectoires de B : il n'est même pas évident (ni vrai en général) que ces applications soient mesurables. Le but de ce paragraphe est de montrer que, quitte à modifier "un peu" B, on peut faire en sorte que ses trajectoires soient continues.

Définition 2.3. Soient $(X_t)_{t\in T}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\in T}$ deux processus aléatoires indexés par le même ensemble T et à valeurs dans le même espace E. On dit que $\tilde{X}$ est une modification de X si

$$\forall t \in T, \qquad P[\tilde{X}_t = X_t] = 1.$$

Remarquons que le processus $\tilde{X}$ a alors mêmes lois marginales de dimension finie que X. En particulier, si X est un pré–mouvement brownien, $\tilde{X}$ est aussi un pré-mouvement brownien. En revanche, les trajectoires de $\tilde{X}$ peuvent avoir un comportement très différent de celles de X. Il peut arriver par exemple que les trajectoires de $\tilde{X}$ soient toutes continues alors que celles de X sont toutes discontinues.

Définition 2.4. Les deux processus X et $\tilde{X}$ sont dits indistinguables s'il existe un sous-ensemble négligeable N de Ω tel que

$$\forall \omega \in \Omega\backslash N,\ \forall t \in T, \quad X_t(\omega) = X'_t(\omega).$$

Dit de manière un peu différente, les processus X et $\tilde{X}$ sont indistinguables si

$$P(\forall t \in T,\ X_t = \tilde{X}_t) = 1.$$

(Cette formulation est légèrement abusive car l'événement $\{\forall t \in T,\ X_t = \tilde{X}_t\}$ n'est pas forcément mesurable.)

Si deux processus sont indistinguables, l'un est une modification de l'autre. La notion d'indistinguabilité est cependant (beaucoup) plus forte : deux processus indistinguables ont p.s. les mêmes trajectoires. Dans la suite on identifiera deux processus indistinguables. Une assertion de la forme "il existe un unique processus tel que ..." doit toujours être comprise "à indistinguabilité près", même si cela n'est pas dit explicitement.

Si $T = I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si X et $\tilde{X}$ sont deux processus dont les trajectoires sont p.s. continues, alors $\tilde{X}$ est une modification de X si et seulement si X et $\tilde{X}$ sont indistinguables. En effet, si $\tilde{X}$ est une modification de X on a p.s. $\forall t \in I \cap \mathbb{Q}$, $X_t = \tilde{X}_t$ (on écarte une réunion *dénombrable* d'ensembles de probabilité nulle) d'où p.s. $\forall t \in I$, $X_t = \tilde{X}_t$ par continuité. Le même argument marche si on suppose seulement les trajectoires continues à droite, ou à gauche.

Théorème 2.1 (lemme de Kolmogorov). *Soit $X = (X_t)_{t\in I}$ un processus aléatoire indexé par un intervalle borné I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace métrique complet (E,d). Supposons qu'il existe trois réels $q, \varepsilon, C > 0$ tels que, pour tous $s,t \in I$,*

$$E[d(X_s,X_t)^q] \leq C\,|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Alors, il existe une modification $\tilde{X}$ de X dont les trajectoires sont höldériennes d'exposant α pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[$: cela signifie que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[$, il existe une constante $C_\alpha(\omega)$ telle que, pour tous $s,\ t \in I$,

$$d(\tilde{X}_s(\omega),\tilde{X}_t(\omega)) \leq C_\alpha(\omega)\,|t-s|^{\alpha}.$$

En particulier, $\tilde{X}$ est une modification continue de X (unique à indistinguabilité près d'après ci-dessus).

Remarques. (i) Si I est non borné, par exemple si $I = \mathbb{R}_+$, on peut appliquer le Théorème 2.1 à $I = [0,1], [1,2], [2,3]$, etc. et on trouve encore que X a une modification continue, qui est localement höldérienne d'exposant α pour tout $\alpha \in]0, \varepsilon/q[$.

(ii) Il suffit de montrer que pour $\alpha \in]0, \varepsilon/q[$ fixé, X a une modification dont les trajectoires sont höldériennes d'exposant α. En effet, on applique ce résultat à une suite $\alpha_k \uparrow \varepsilon/q$ en observant que les processus obtenus sont alors tous indistinguables, d'après la remarque précédant le théorème.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture, on prend $I = [0,1]$, mais la preuve est la même pour un intervalle borné quelconque. On note D l'ensemble (dénombrable) des nombres dyadiques de l'intervalle $[0,1[$, c'est-à-dire des réels $t \in [0,1]$ qui s'écrivent

$$t = \sum_{k=1}^{p} \varepsilon_k 2^{-k}$$

où $p \geq 1$ est un entier et $\varepsilon_k = 0$ ou 1, pour tout $k \in \{1,\ldots,p\}$.

L'hypothèse du théorème entraîne que, pour $a > 0$ et $s,t \in I$,

$$P[d(X_s,X_t) \geq a] \leq a^{-q} E[d(X_s,X_t)^q] \leq C\,a^{-q}\,|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

Fixons $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[$ et appliquons cette inégalité à $s = (i-1)2^{-n}$, $t = i2^{-n}$ (pour $i \in \{1,\dots,2^n\}$) et $a = 2^{-n\alpha}$:

$$P\Big[d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\alpha}\Big] \leq C\,2^{nq\alpha} 2^{-(1+\varepsilon)n}.$$

En sommant sur i on trouve

$$P\Big[\bigcup_{i=1}^{2^n} \{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\alpha}\}\Big] \leq 2^n \cdot C\,2^{nq\alpha-(1+\varepsilon)n} = C\,2^{-n(\varepsilon-q\alpha)}.$$

Par hypothèse, $\varepsilon - q\alpha > 0$. En sommant maintenant sur n on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\Big[\bigcup_{i=1}^{2^n} \{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\alpha}\}\Big] < \infty,$$

et le lemme de Borel-Cantelli montre que

$$\text{p.s. } \exists n_0(\omega) : \ \forall n \geq n_0(\omega),\ \forall i \in \{1,\dots,2^n\}, \quad d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \leq 2^{-n\alpha}.$$

En conséquence, la constante $K_\alpha(\omega)$ définie par

$$K_\alpha(\omega) = \sup_{n\geq 1} \left(\sup_{1\leq i\leq 2^n} \frac{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}})}{2^{-n\alpha}} \right)$$

est finie p.s. (Pour $n \geq n_0(\omega)$, le terme entre parenthèses est majoré par 1, et d'autre part, il n'y a qu'un nombre fini de termes avant $n_0(\omega)$.)

A ce point nous utilisons un lemme d'analyse élémentaire, dont la preuve est reportée après la fin de la preuve du Théorème 2.1.

Lemme 2.1. *Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans l'espace métrique (E,d). Supposons qu'il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $K < \infty$ tels que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $i \in \{1,2,\dots,2^n\}$,*

$$d(f((i-1)2^{-n}), f(i2^{-n})) \leq K\,2^{-n\alpha}.$$

Alors on a, pour tous $s,t \in D$,

$$d(f(s),f(t)) \leq \frac{2K}{1-2^{-\alpha}}\,|t-s|^{\alpha}$$

On déduit immédiatement du lemme et de la définition de $K_\alpha(\omega)$ que, sur l'ensemble $\{K_\alpha(\omega) < \infty\}$ (qui est de probabilité 1), on a, pour tous $s,t \in D$,

$$d(X_s,X_t) \leq C_\alpha(\omega)\,|t-s|^\alpha,$$

où $C_\alpha(\omega) = 2(1-2^{-\alpha})^{-1}K_\alpha(\omega)$. En conséquence, sur l'ensemble $\{K_\alpha(\omega) < \infty\}$, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est höldérienne sur D, donc uniformément continue sur D. Puisque (E,d) est complet, cette fonction a un unique prolongement continu à $I = [0,1]$, et ce prolongement est lui aussi höldérien d'exposant α. De manière plus précise, on pose pour tout $t \in [0,1]$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s\to t,\, s\in D} X_s(\omega) & \text{si } K_\alpha(\omega) < \infty\,, \\ x_0 & \text{si } K_\alpha(\omega) = \infty\,, \end{cases}$$

où x_0 est un point de E fixé de manière arbitraire.

D'après les remarques précédentes, le processus $\tilde{X}$ a des trajectoires höldériennes d'exposant α sur $[0,1]$. Il reste à voir que $\tilde{X}$ est une modification de X. Pour cela, fixons $t \in I$. L'hypothèse du théorème entraîne que

$$\lim_{s\to t} X_s = X_t$$

au sens de la convergence en probabilité. Comme par définition $\tilde{X}_t$ est aussi la limite p.s. de X_s quand $s \to t$, $s \in D$, on conclut que $X_t = \tilde{X}_t$ p.s. □

Démonstration du Lemme 2.1. Fixons $s,t \in D$ avec $s < t$. Soit $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $2^{-p} \leq t-s$. Alors il est facile de voir qu'on peut trouver un entier $k \geq 0$ et deux entiers $l,m \geq 0$ tels que

$$\begin{aligned} s &= k2^{-p} - \varepsilon_{p+1}2^{-p-1} - \ldots - \varepsilon_{p+l}2^{-p-l} \\ t &= k2^{-p} + \varepsilon'_p 2^{-p} + \varepsilon'_{p+1}2^{-p-1} + \ldots + \varepsilon'_{p+m}2^{-p-m}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_i, \varepsilon'_j = 0$ ou 1. Notons

$$\begin{aligned} s_i &= k2^{-p} - \varepsilon_{p+1}2^{-p-1} - \ldots - \varepsilon_{p+i}2^{-p-i} && (\text{pour } 0 \leq i \leq l) \\ t_j &= k2^{-p} + \varepsilon'_p 2^{-p} + \varepsilon'_{p+1}2^{-p-1} + \ldots + \varepsilon'_{p+j}2^{-p-j} && (\text{pour } 0 \leq j \leq m). \end{aligned}$$

Alors, en observant que $s = s_l, t = t_m$ et qu'on peut appliquer l'hypothèse du lemme aux couples (s_0,t_0), (s_{i-1},s_i) (pour $1 \leq i \leq l$) et (t_{j-1},t_j) (pour $1 \leq j \leq m$), on trouve

$$\begin{aligned} d(f(s),f(t)) &= d(f(s_l),f(t_m)) \\ &\leq d(f(s_0),f(t_0)) + \sum_{i=1}^{l} d(f(s_{i-1}),f(s_i)) + \sum_{j=1}^{m} d(f(t_{j-1}),f(t_j)) \\ &\leq K\,2^{-p\alpha} + \sum_{i=1}^{l} K\,2^{-(p+i)\alpha} + \sum_{j=1}^{m} K\,2^{-(p+j)\alpha} \\ &\leq 2K\,(1-2^{-\alpha})^{-1}\,2^{-p\alpha} \\ &\leq 2K\,(1-2^{-\alpha})^{-1}\,(t-s)^\alpha \end{aligned}$$

puisque $2^{-p} \leq t-s$. Cela termine la preuve du Lemme 2.1. $\square$

Nous appliquons maintenant le Théorème 2.1 au pré-mouvement brownien.

Corollaire 2.2. *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un pré-mouvement brownien. Le processus B a une modification dont les trajectoires sont continues, et même localement höldériennes d'exposant $\frac{1}{2} - \delta$ pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$.*

Démonstration. Pour $s < t$, la variable $B_t - B_s$ suit une loi $\mathcal{N}(0, t-s)$, et donc $B_t - B_s$ a même loi que $\sqrt{t-s}N$, où N suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. En conséquence, pour tout $q > 0$,

$$E[|B_t - B_s|^q] = (t-s)^{q/2} E[|N|^q] = C_q\,(t-s)^{q/2}$$

avec $C_q = E[|N|^q] < \infty$. Dès que $q > 2$, on peut appliquer le théorème avec $\varepsilon = \frac{q}{2} - 1$. On trouve ainsi que B a une modification dont les trajectoires sont continues, et même localement höldériennes d'exposant α pour tout $\alpha < (q-2)/(2q)$. En choisissant q grand on trouve le résultat souhaité. $\square$

Définition 2.5. Un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien (réel, issu de 0) si :

(i) $(B_t)_{t\geq 0}$ est un pré-mouvement brownien.
(ii) Les trajectoires de B, c'est-à-dire les applications $t \mapsto B_t(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, sont toutes continues.

L'existence du mouvement brownien découle du corollaire précédent. En effet la modification obtenue dans ce corollaire est encore un pré-mouvement brownien, et ses trajectoires sont continues. Dans la suite on ne parlera plus de pré-mouvement brownien et on s'intéressera uniquement au mouvement brownien.

Il est important de remarquer que l'énoncé de la Proposition 2.3 reste vrai mot pour mot si on remplace partout pré-mouvement brownien par mouvement brownien. En effet, avec les notations de cette proposition, on vérifie immédiatement que les processus $-B, B^{\lambda}, B^{(s)}$ ont des trajectoires continues si c'est le cas pour B.

Mesure de Wiener. Notons $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. La donnée d'un mouvement brownien B fournit donc une application

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto (t \mapsto B_t(\omega)) \end{aligned}$$

et il est facile de vérifier que cette application est mesurable lorsque $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est muni de la plus petite tribu, notée $\mathscr{C}$, qui rende mesurables les applications coordonnées $\mathrm{w} \mapsto \mathrm{w}(t)$ (on montre aisément que cette tribu coïncide avec la tribu borélienne pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact). La **mesure de Wiener**, ou loi du mouvement brownien, est par définition la mesure-image de $P(d\omega)$ par cette application. C'est donc une mesure de probabilité sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Si $W(d\mathrm{w})$ désigne la mesure de Wiener, le Corollaire 2.1 montre que, pour $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, et $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
&W(\{\mathrm{w};\mathrm{w}(t_0)\in A_0,\mathrm{w}(t_1)\in A_1,\dots,\mathrm{w}(t_n)\in A_n\})\\
&\quad = P(B_{t_0}\in A_0,B_{t_1}\in A_1,\dots,B_{t_n}\in A_n)\\
&\quad = \mathbf{1}_{A_0}(0)\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\frac{\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\dots(t_n-t_{n-1})}}\exp\Big(-\sum_{i=1}^n\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\Big),
\end{aligned}$$

où $x_0=0$ par convention.

Les valeurs ainsi obtenues pour $W(\{\mathrm{w};\mathrm{w}(t_0)\in A_0,\mathrm{w}(t_1)\in A_1,\dots,\mathrm{w}(t_n)\in A_n\})$ caractérisent la probabilité W : en effet, la classe des ensembles de la forme $\{\mathrm{w};\mathrm{w}(t_0)\in A_0,\mathrm{w}(t_1)\in A_1,\dots,\mathrm{w}(t_n)\in A_n\}$ (les “cylindres”) est stable par intersection finie et engendre la tribu $\mathscr{C}$, ce qui, par un argument standard de classe monotone (voir l’Appendice A1), suffit pour dire qu’une mesure de probabilité sur $\mathscr{C}$ est caractérisée par ses valeurs sur cette classe. Une conséquence des considérations précédentes est le fait que la construction de la mesure de Wiener ne dépend pas du choix du mouvement brownien B : la loi du mouvement brownien est unique (et bien définie!). Si B' est un autre mouvement brownien, on aura pour tout $A\in\mathscr{C}$,

$$P((B'_t)_{t\geq 0}\in A)=W(A)=P((B_t)_{t\geq 0}\in A).$$

Remarquons que dans l’écriture $P((B_t)_{t\geq 0}\in A)$, il faut interpréter $(B_t)_{t\geq 0}$ comme la “fonction continue aléatoire” $t\mapsto B_t(\omega)$ qui est une variable aléatoire à valeurs dans $C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Nous utiliserons fréquemment la dernière propriété sans plus de commentaires. Voir par exemple la deuxième partie de la preuve du Corollaire 2.3 ci-dessous.

Si l’on prend maintenant comme espace de probabilité

$$\Omega=C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\quad \mathscr{F}=\mathscr{C},\quad P(\mathrm{dw})=W(\mathrm{dw}),$$

le processus, dit *canonique*,

$$X_t(\mathrm{w})=\mathrm{w}(t)$$

est un mouvement brownien (d’après le Corollaire 2.1 et les formules ci-dessus). C’est la construction canonique du mouvement brownien.

2.3 Comportement des trajectoires du mouvement brownien

Dans ce paragraphe, nous obtenons quelques informations sur l’allure des trajectoires du mouvement brownien. Nous fixons donc un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ (issu de 0 comme c’est toujours le cas pour l’instant). Un ingrédient très utile est le résultat suivant, connu sous le nom de loi du tout ou rien de Blumenthal.

Théorème 2.2. *Pour tout $t\geq 0$, soit $\mathscr{F}_t$ la tribu définie par*

$$\mathscr{F}_t=\sigma(B_s,s\leq t),$$

et soit

$$\mathscr{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathscr{F}_s.$$

La tribu $\mathscr{F}_{0+}$ est grossière, au sens où $\forall A \in \mathscr{F}_{0+}$, $P(A) = 0$ ou 1.

Démonstration. Soient $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ et soit $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Soit aussi $A \in \mathscr{F}_{0+}$. Alors, par un argument de continuité,

$$E[\mathbf{1}_A\, g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})] = \lim_{\varepsilon \to 0} E[\mathbf{1}_A\, g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \ldots, B_{t_k} - B_\varepsilon)].$$

Mais, dès que $\varepsilon < t_1$, les variables $B_{t_1} - B_\varepsilon, \ldots, B_{t_k} - B_\varepsilon$ sont indépendantes de $\mathscr{F}_\varepsilon$ (par la propriété de Markov simple) et donc aussi de la tribu $\mathscr{F}_{0+}$. Il en découle que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{1}_A\, g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})] &= \lim_{\varepsilon \to 0} P(A)\, E[g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \ldots, B_{t_k} - B_\varepsilon)] \\ &= P(A)\, E[g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})]. \end{aligned}$$

Ainsi on trouve que $\mathscr{F}_{0+}$ est indépendante de $\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_k})$. Comme cela est vrai pour toute famille finie $\{t_1, \ldots, t_k\}$ de réels strictement positifs, $\mathscr{F}_{0+}$ est indépendante de $\sigma(B_t, t > 0)$. Finalement $\sigma(B_t, t > 0) = \sigma(B_t, t \geq 0)$ puisque B_0 est la limite simple de B_t quand $t \to 0$. Comme $\mathscr{F}_{0+} \subset \sigma(B_t, t \geq 0)$, on voit que $\mathscr{F}_{0+}$ est indépendante d'elle-même, ce qui entraîne que $\mathscr{F}_{0+}$ est grossière. $\square$

Corollaire 2.3. *On a p.s., pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0, \qquad \inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ (avec la convention $\inf \varnothing = \infty$). Alors,

$$p.s., \ \forall a \in \mathbb{R}, \quad T_a < \infty.$$

En conséquence, p.s.,

$$\limsup_{t \to \infty} B_t = +\infty, \quad \liminf_{t \to \infty} B_t = -\infty.$$

Remarque. Il n'est pas a priori évident que la variable $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s$ soit mesurable : il s'agit d'un supremum non dénombrable de fonctions mesurables. Cependant, parce que nous savons que les trajectoires de B sont continues, on peut se restreindre aux valeurs **rationnelles** de $s \in [0, \varepsilon]$ et on obtient alors un supremum dénombrable de variables aléatoires. Nous utiliserons ce type de remarque implicitement dans la suite.

Démonstration. Soit (ε_p) une suite de réels strictement positifs décroissant vers 0, et soit

$$A = \bigcap_p \Big\{ \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0 \Big\}.$$

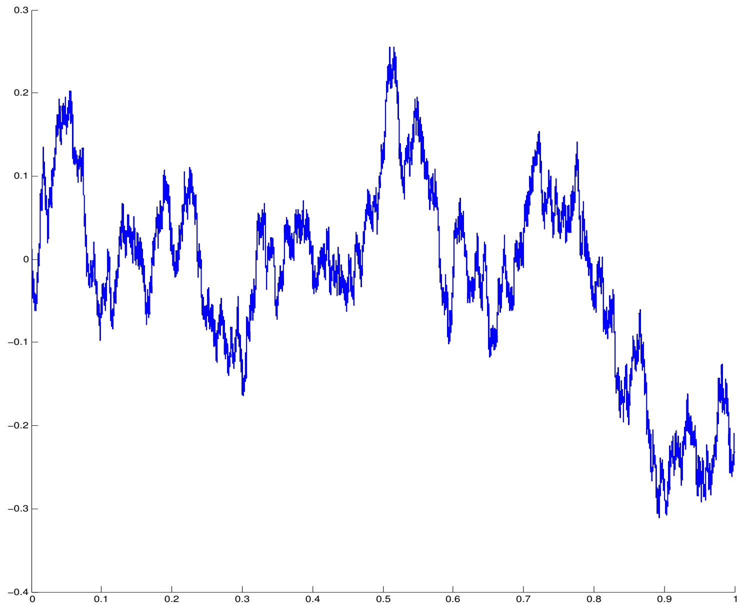

Fig. 2.1 Simulation d'une trajectoire de mouvement brownien sur l'intervalle de temps $[0,1]$

Il s'agit d'une intersection décroissante, et il en découle aisément que l'événement A est $\mathscr{F}_{0+}$-mesurable. D'autre part,

$$P(A) = \lim_{p\to\infty} \downarrow P\Big(\sup_{0\le s\le \varepsilon_p} B_s > 0\Big),$$

et

$$P\Big(\sup_{0\le s\le \varepsilon_p} B_s > 0\Big) \ge P(B_{\varepsilon_p} > 0) = \frac{1}{2},$$

ce qui montre que $P(A) \ge 1/2$. D'après le Théorème 2.2 on a $P(A) = 1$, d'où

$$\text{p.s. } \forall \varepsilon > 0, \qquad \sup_{0\le s\le \varepsilon} B_s > 0.$$

L'assertion concernant $\inf_{0\le s\le \varepsilon} B_s$ est obtenue en remplaçant B par $-B$.

Ensuite, on écrit

$$1 = P\Big(\sup_{0\le s\le 1} B_s > 0\Big) = \lim_{\delta\downarrow 0} \uparrow P\Big(\sup_{0\le s\le 1} B_s > \delta\Big),$$

et on remarque en appliquant la propriété d'invariance d'échelle (voir la Proposition 2.3(ii) et la notation de cette proposition) avec $\lambda = 1/\delta$ que

$$P\Big(\sup_{0\le s\le 1} B_s > \delta\Big) = P\Big(\sup_{0\le s\le 1/\delta^2} B_s^{1/\delta} > 1\Big) = P\Big(\sup_{0\le s\le 1/\delta^2} B_s > 1\Big).$$

Pour la deuxième égalité, on utilise les remarques suivant la définition de la mesure de Wiener, montrant que la probabilité de l'événement $\{\sup_{0\le s\le 1/\delta^2} B_s > 1\}$ est la même pour n'importe quel mouvement brownien B. En faisant tendre δ vers 0, on trouve

$$P\Big(\sup_{s\ge 0} B_s > 1\Big) = \lim_{\delta\downarrow 0} \uparrow P\Big(\sup_{0\le s\le 1/\delta^2} B_s > 1\Big) = 1.$$

Ensuite, un nouvel argument de changement d'échelle montre que pour tout $M > 0$,

$$P\Big(\sup_{s\ge 0} B_s > M\Big) = 1$$

et en utilisant le changement $B \to -B$ on a aussi

$$P\Big(\inf_{s\ge 0} B_s < -M\Big) = 1.$$

Les dernières assertions du corollaire en découlent facilement : pour la dernière, on observe qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ne peut visiter tous les réels que si $\limsup_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ et $\liminf_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$. □

En utilisant la propriété de Markov simple, on déduit facilement du corollaire que p.s. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.

Proposition 2.4. *Soit* $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ *une suite de subdivisions de* $[0,t]$ *de pas tendant vers* 0 *(i.e.* $\sup_{1\le i\le p_n}(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$*). Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 = t,$$

dans L^2.

Démonstration. C'est une conséquence presque immédiate de la Proposition 1.5, en écrivant $B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n} = G(]t_{i-1}^n, t_i^n])$, si G est la mesure gaussienne associée à B. □

On déduit facilement de la Proposition 2.4 et de la continuité des trajectoires que p.s. la fonction $t \mapsto B_t$ n'est à variation finie sur aucun intervalle non trivial (voir le début du Chapitre 4 pour des rappels sur les fonctions continues à variation finie). En particulier, il n'est pas possible de définir "ω par ω" les intégrales de la forme $\int_0^t f(s)\mathrm{d}B_s$ comme des intégrales usuelles par rapport à une fonction à variation finie. Ceci justifie les commentaires de la fin du paragraphe 2.1.

2.4 La propriété de Markov forte

Notre but est d'étendre la propriété de Markov simple (Proposition 2.3 (iii)) au cas où l'instant déterministe s est remplacé par un temps aléatoire T. Nous devons d'abord préciser la classe des temps aléatoires admissibles. On garde la notation $\mathscr{F}_t$ introduite dans le Théorème 2.2 et on note aussi $\mathscr{F}_\infty = \sigma(B_s, s \geq 0)$.

Définition 2.6. Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0,\infty]$ est un temps d'arrêt si, pour tout $t \geq 0$, $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$.

On peut remarquer que si T est un temps d'arrêt on a aussi pour tout $t > 0$,

$$\{T < t\} = \bigcup_{q \in [0,t[\cap \mathbb{Q}} \{T \leq q\} \in \mathscr{F}_t.$$

Exemples. Les temps $T = t$ (temps constant) ou $T = T_a$ sont des temps d'arrêt (pour le deuxième cas remarquer que $\{T_a \leq t\} = \{\inf_{0 \leq s \leq t} |B_s - a| = 0\}$). En revanche, $T = \sup\{s \leq 1 : B_s = 0\}$ n'est pas un temps d'arrêt (cela découlera par l'absurde de la propriété de Markov forte ci-dessous et de la Corollaire 2.3). Si T est un temps d'arrêt, pour tout $t \geq 0$, $T + t$ est aussi un temps d'arrêt (exercice).

Définition 2.7. Soit T un temps d'arrêt. La tribu du passé avant T est

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F}_\infty : \forall t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}.$$

On vérifie facilement que $\mathscr{F}_T$ est bien une tribu et que la variable aléatoire T est $\mathscr{F}_T$-mesurable (exercice). De plus, si on définit $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} B_T$ en posant

$$\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} B_T(\omega) = \begin{cases} B_{T(\omega)}(\omega) & \text{si } T(\omega) < \infty\,, \\ 0 & \text{si } T(\omega) = \infty\,, \end{cases}$$

alors $\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} B_T$ est aussi une variable aléatoire $\mathscr{F}_T$-mesurable. Pour le voir, on remarque que

$$\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} B_T = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{i2^{-n} \leq T < (i+1)2^{-n}\}} B_{i2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T < (i+1)2^{-n}\}} \mathbf{1}_{\{i2^{-n} \leq T\}} B_{i2^{-n}}.$$

On observe ensuite que, pour tout $s \geq 0$, $B_s \mathbf{1}_{\{s \leq T\}}$ est $\mathscr{F}_T$-mesurable, parce que si A est un borélien de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0 (le cas $0 \in A$ est traité par passage au complémentaire) on a

$$\{B_s \mathbf{1}_{\{s \leq T\}} \in A\} \cap \{T \leq t\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } t < s \\ \{B_s \in A\} \cap \{s \leq T \leq t\} & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

qui est $\mathscr{F}_t$-mesurable dans les deux cas (écrire $\{s \leq T \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{T < s\}^c$).

Théorème 2.3 (Propriété de Markov forte). *Soit T un temps d'arrêt. On suppose que $P(T < \infty) > 0$ et on pose, pour tout $t \geq 0$,*

$$B_t^{(T)} = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}(B_{T+t} - B_T)$$

Alors, sous la probabilité conditionnelle $P(\cdot \mid T < \infty)$, le processus $(B_t^{(T)})_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_T$.

Démonstration. Nous établissons d'abord le théorème dans le cas où $T < \infty$ p.s. Pour cela, nous allons montrer que, si $A \in \mathscr{F}_T$, $0 \leq t_1 < \cdots < t_p$ et F est une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$E[\mathbf{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)})] = P[A]\,E[F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p})]. \tag{2.1}$$

Cela suffit pour établir les différentes assertions du théorème : le cas $A = \Omega$ montre que $B^{(T)}$ est un mouvement brownien (remarquer que les trajectoires de $B^{(T)}$ sont continues) et d'autre part (2.1) entraîne que pour tout choix de $0 \leq t_1 < \cdots < t_p$, le vecteur $(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)})$ est indépendant de $\mathscr{F}_T$, d'où il découle par un argument de classe monotone (Appendice A1) que $B^{(T)}$ est indépendant de $\mathscr{F}_T$.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $[T]_n$ le plus petit réel de la forme $k2^{-n}$ supérieur ou égal à T, avec $[T]_n = \infty$ si $T = \infty$ (il est facile de voir que $[T]_n$ est un temps d'arrêt, mais nous n'aurons pas besoin de cela). Pour montrer (2.1), on observe d'abord que p.s.

$$F(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)}) = \lim_{n\to\infty} F(B_{t_1}^{([T]_n)}, \ldots, B_{t_p}^{([T]_n)}),$$

d'où par convergence dominée,

$$\begin{aligned}
&E[\mathbf{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)})] \\
&= \lim_{n\to\infty} E[\mathbf{1}_A F(B_{t_1}^{([T]_n)}, \ldots, B_{t_p}^{([T]_n)})] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n}<T\leq k2^{-n}\}} F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \ldots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}})],
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on a distingué les valeurs possibles de $[T]_n$. Pour $A \in \mathscr{F}_T$, l'événement $A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\} = (A \cap \{T \leq k2^{-n}\}) \cap \{T \leq (k-1)2^{-n}\}^c$ est $\mathscr{F}_{k2^{-n}}$-mesurable. D'après la propriété de Markov simple (Proposition 2.3 (iii)), on a donc

$$\begin{aligned}
&E[\mathbf{1}_{A\cap\{(k-1)2^{-n}<T\leq k2^{-n}\}} F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \ldots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}})] \\
&= P[A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}]\,E[F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p})],
\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à sommer sur k pour arriver au résultat souhaité.

Finalement, lorsque $P[T = \infty] > 0$, les mêmes arguments conduisent à

$$E[\mathbf{1}_{A\cap\{T<\infty\}} F(B_{t_1}^{(T)}, \ldots, B_{t_p}^{(T)})] = P[A \cap \{T < \infty\}]\,E[F(B_{t_1}, \ldots, B_{t_p})]$$

et le résultat recherché en découle à nouveau. $\square$

Une application importante de la propriété de Markov forte est le principe de réflexion illustré dans la preuve du théorème suivant.

Théorème 2.4. *Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup_{s \le t} B_s$. Alors, si $a \ge 0$ et $b \le a$, on a*

$$P[S_t \ge a, B_t \le b] = P[B_t \ge 2a - b].$$

En particulier, S_t a même loi que $|B_t|$.

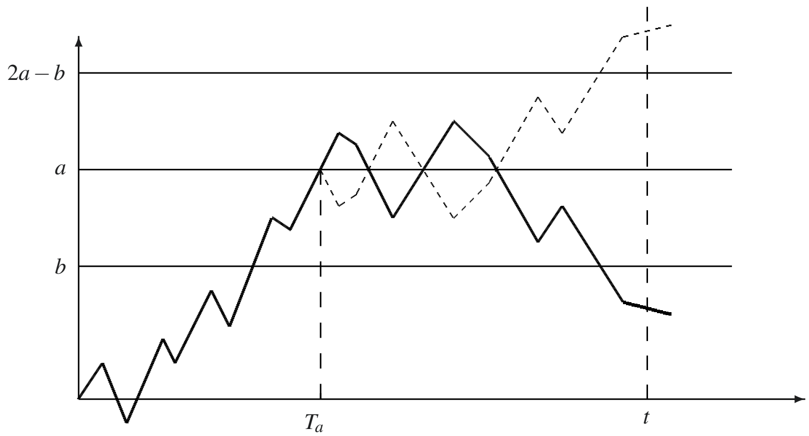

Fig. 2.2 Illustration du principe de réflexion : la probabilité, conditionnellement à $\{T_a \le t\}$, que la courbe soit sous b à l'instant t coïncide avec la probabilité que la courbe réfléchie au niveau a après T_a (en pointillés) soit au-dessus de $2a - b$ à l'instant t

Démonstration. On applique la propriété de Markov forte au temps d'arrêt

$$T_a = \inf\{t \ge 0 : B_t = a\}.$$

On a déjà vu (Corollaire 2.3) que $T_a < \infty$ p.s. Ensuite, avec la notation du Théorème 2.3, on a

$$P[S_t \ge a, B_t \le b] = P[T_a \le t, B_t \le b] = P[T_a \le t, B^{(T_a)}_{t-T_a} \le b - a],$$

puisque $B^{(T_a)}_{t-T_a} = B_t - B_{T_a} = B_t - a$. Notons $B' = B^{(T_a)}$, de sorte que d'après le Théorème 2.3, le processus B' est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_{T_a}$ donc en particulier de T_a. Comme B' a même loi que $-B'$, le couple (T_a, B') a aussi même loi que $(T_a, -B')$. Soit $H = \{(s, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}_+ \times C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : s \le t, \mathrm{w}(t - s) \le b - a\}$. La probabilité précédente vaut

$$P[(T_a, B') \in H] = P[(T_a, -B') \in H]$$

$$\begin{aligned}&= P[T_a \leq t, -B^{(T_a)}_{t-T_a} \leq b-a]\\&= P[T_a \leq t, B_t \geq 2a-b]\\&= P[B_t \geq 2a-b]\end{aligned}$$

parce que l'événement $\{B_t \geq 2a-b\}$ est p.s. contenu dans $\{T_a \leq t\}$.

Pour la deuxième assertion on observe que

$$P[S_t \geq a] = P[S_t \geq a, B_t \geq a] + P[S_t \geq a, B_t \leq a] = 2P[B_t \geq a] = P[|B_t| \geq a],$$

d'où le résultat voulu. □

On déduit immédiatement du théorème précédent que la loi du couple (S_t, B_t) a pour densité

$$g(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{a>0,b<a\}}.$$

Corollaire 2.4. *Pour tout $a > 0$, T_a a même loi que $\frac{a^2}{B_1^2}$ et a donc pour densité*

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

Démonstration. On écrit, en utilisant le Théorème 2.4 dans la deuxième égalité,

$$P[T_a \leq t] = P[S_t \geq a] = P[|B_t| \geq a] = P[B_t^2 \geq a^2] = P[tB_1^2 \geq a^2] = P[\frac{a^2}{B_1^2} \leq t].$$

Ensuite, puisque B_1 suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on calcule facilement la densité de a^2/B_1^2. □

Généralisations. Soit Z une variable aléatoire réelle. Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé mouvement brownien (réel) issu de Z si on peut écrire $X_t = Z + B_t$ où B est un mouvement brownien issu de 0 et *indépendant* de Z.

Un processus $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien en dimension d issu de 0 si ses composantes $B^1, \ldots, B^d$ sont des mouvements browniens réels issus de 0 *indépendants*. On vérifie facilement que si Φ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^d$, le processus $(\Phi(B_t))_{t\geq 0}$ est encore un mouvement brownien en dimension d.

Enfin, si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^d)$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on dit que X est un mouvement brownien en dimension d issu de Z si on peut écrire $X_t = Z + B_t$ où B est un mouvement brownien en dimension d issu de 0 et *indépendant* de Z.

La plupart des résultats qui précèdent peuvent être étendus au mouvement brownien en dimension d. En particulier, la propriété de Markov forte reste vraie, avec exactement la même démonstration.

Exercices

Dans tous les exercices ci-dessous, $(B_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien réel issu de 0. On note $S_t = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$.

Exercice 2.1. (Inversion du temps)
1. Montrer que le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par $W_0 = 0$ et $W_t = tB_{1/t}$ pour $t > 0$ est indistinguable d'un mouvement brownien réel issu de 0 (vérifier d'abord que W est un pré-mouvement brownien).
2. En déduire que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{B_t}{t} = 0$ p.s.

Exercice 2.2. Pour tout réel $a \geq 0$, on pose $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$. Montrer que le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires, au sens où, pour tous $0 \leq a \leq b$, la variable $T_b - T_a$ est indépendante de la tribu $\sigma(T_c, 0 \leq c \leq a)$ et a même loi que T_{b-a}.

Exercice 2.3. (Pont brownien) On pose $W_t = B_t - tB_1$ pour tout $t \in [0,1]$.
1. Montrer que $(W_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien centré et donner sa fonction de covariance.
2. Soient $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < 1$. Montrer que la loi de $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_p})$ a pour densité

$$g(x_1,\ldots,x_p) = \sqrt{2\pi}\, p_{t_1}(x_1) p_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots p_{t_p-t_{p-1}}(x_p - x_{p-1}) p_{1-t_p}(-x_p),$$

où $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)$. Justifier le fait que la loi de $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_p})$ peut être interprétée comme la loi de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_p})$ conditionnellement à $B_1 = 0$.
3. Vérifier que les deux processus $(W_t)_{t\in[0,1]}$ et $(W_{1-t})_{t\in[0,1]}$ ont même loi (comme dans la définition de la mesure de Wiener cette loi est une mesure de probabilité sur l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 2.4. (Maxima locaux) Montrer que p.s. les maxima locaux du mouvement brownien sont distincts : p.s. pour tout choix des rationnels p,q,r,s tels que $p < q < r < s$ on a

$$\sup_{p\leq t\leq q} B_t \neq \sup_{r\leq t\leq s} B_t .$$

Exercice 2.5. (Non-différentiabilité) A l'aide de la loi du tout ou rien, montrer que, p.s.,

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \quad , \quad \liminf_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty .$$

En déduire que pour tout $s \geq 0$, la fonction $t \mapsto B_t$ n'est p.s. pas dérivable à droite en s.

Exercice 2.6. (Zéros du mouvement brownien) Soit $H := \{t \in [0,1] : B_t = 0\}$. En utilisant le Corollaire 2.3 et la propriété de Markov forte, montrer que H est p.s. un sous-ensemble compact sans point isolé et de mesure de Lebesgue nulle de l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 2.7. (Retournement du temps) On pose $B'_t = B_1 - B_{1-t}$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que les deux processus $(B_t)_{t\in[0,1]}$ et $(B'_t)_{t\in[0,1]}$ ont même loi (comme dans la définition de la mesure de Wiener ces lois sont des mesures de probabilité sur l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 2.8. (Loi de l'arcsinus) On pose $T := \inf\{t \geq 0 : B_t = S_1\}$.
1. Montrer que $T < 1$ p.s. (on pourra utiliser l'exercice précédent) puis que T n'est pas un temps d'arrêt.
2. Vérifier que les trois variables aléatoires S_t, $S_t - B_t$ et $|B_t|$ ont même loi.
3. Montrer que T suit la loi dite de l'arcsinus qui a pour densité

$$g(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\mathbf{1}_{]0,1[}(t).$$

4. Montrer que les résultats des questions **1.** et **3.** restent vrais si on remplace T par $L := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$.

Exercice 2.9. (Loi du logarithme itéré) Le but de l'exercice est de montrer la propriété suivante:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad \text{p.s.}$$

On pose $h(t) = \sqrt{2t\log\log t}$.

1. Montrer que, pour tout $t > 0$, $P(S_t > u\sqrt{t}) \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u\sqrt{2\pi}}$, quand u tend vers $+\infty$.

2. On se donne deux réels r et c tels que $1 < r < c^2$. Etudier le comportement des probabilités $P(S_{r^n} > c\,h(r^{n-1}))$ quand $n \to \infty$ et en déduire que p.s.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \leq 1.$$

3. Montrer qu'il existe p.s. une infinité de valeurs de n telles que

$$B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}}h(r^n).$$

En déduire le résultat annoncé.
4. Que vaut la limite $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}$?

http://www.springer.com/978-3-642-31897-9

Mouvement brownien, martingales et calcul
stochastique
Le Gall, J.-F.
2013, VIII, 176 p. 2 ill., Softcover
ISBN: 978-3-642-31897-9