

# Inhalt

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Prolog.....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Bemerkungen zu den Zielsetzungen dieses Buches.....   | 1         |
| 1.2 Erinnerung an Skalare, Vektoren und Tensoren .....  | 5         |
| 1.2.1 Beispiel 1: Glasfaseroptik - Einpressen einer Kugellinse in<br>eine Hülse.....  | 6         |
| 1.2.2 Beispiel 2: Verbundwerkstoffe - Thermospannungen um<br>Fasern.....  | 10        |
| 1.2.3 Beispiel 3: Risse.....  | 12        |
| <b>2. Koordinatentransformationen.....</b>  | <b>15</b> |
| 2.1 Eine (persönliche) Vorbemerkung.....  | 15        |
| 2.2 Erste Definitionen und Begriffe in Indexschreibweise.....   | 15        |
| Übung 2.2.1: <i>Linielement</i> .....   | 17        |
| Übung 2.2.2: <i>Metrischer Tensor für Kugelkoordinaten</i> .....  | 19        |
| Übung 2.2.3: <i>Linielement in Kugelkoordinaten</i> .....   | 21        |
| Übung 2.2.4: <i>Dekoration</i> .....  | 22        |
| 2.3 Vektorielle Interpretation der Metrik.....  | 23        |
| Übung 2.3.1: <i>Metrik eines ebenen schiefwinkligen<br/>Koordinatensystems</i> .....  | 26        |
| Übung 2.3.2: <i>Elliptische Koordinaten</i> .....   | 27        |
| 2.4 Ko- und kontravariante Komponenten .....  | 27        |
| Übung 2.4.1: <i>Transformationsformel für ein rechtwinkliges auf ein<br/>schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene</i> ..... | 30        |
| Übung 2.4.2: <i>Kontravariante Metrikkomponenten</i> .....  | 31        |
| Übung 2.4.3: <i>Überführen kovarianter in kontravariante<br/>Komponenten</i> .....  | 31        |
| Übung 2.4.4: <i>Die Komponenten des Metrikensors als ko- und<br/>kontravariante Komponenten des Einheitstensors</i> .....         | 33        |
| Übung 2.4.5: <i>Die ko- und kontravarianten Komponenten des<br/>Ortsvektors in Zylinder- und Kugelkoordinaten</i> .....           | 33        |
| Übung 2.4.6: <i>Die ko- und kontravarianten Komponenten des<br/>Spannungstensors in Zylinderkoordinaten</i> .....                 | 34        |
| Übung 2.4.7: <i>Die ko- und kontravarianten Komponenten des<br/>Spannungstensors in Kugelkoordinaten</i> .....                    | 34        |
| 2.5 Ko- und kontravariante Darstellung vektoriell betrachtet.....   | 35        |
| Übung 2.5.1: <i>Basisvektoren für schiefwinkelige Koordinaten</i> .....   | 36        |
| Übung 2.5.2: <i>Die Spur eines Tensors zweiter Stufe</i> .....  | 37        |
| 2.6 Physikalische Komponenten von Vektoren und Tensoren .....   | 37        |
| Übung 2.6.1: <i>Diagonalität des metrischen Tensors für orthogonale<br/>Koordinatensysteme</i> .....                              | 38        |

|              |   |           |
|--------------|---|-----------|
| Übung 2.6.2: | <i>Die Länge eines Vektors, ausgedrückt in physikalischen Komponenten</i> .....         | 39        |
| Übung 2.6.3: | <i>Die physikalischen Komponenten des Spannungstensors in Zylinderkoordinaten</i> ..... | 39        |
| Übung 2.6.4: | <i>Die physikalischen Komponenten des Metrikensors</i> .....                            | 40        |
| Übung 2.6.5: | <i>Die Fließspannungsbedingung nach VON MISES</i> .....                                 | 41        |
| 2.7          | Ein wenig Differentialgeometrie .....   | 42        |
| Übung 2.7.1: | <i>Topologie der Kugeloberfläche</i> .....  | 45        |
| Übung 2.7.2  | <i>Topologie der Zylinderoberfläche</i> .....   | 45        |
| 2.8          | Would you like to know more? .....  | 45        |
| <b>3.</b>    | <b>Bilanzen (insbesondere in kartesischen Systemen)</b> .....                           | <b>47</b> |
| 3.1          | Vorbemerkungen .....  | 47        |
| 3.2          | Massen- und Impulsbilanz.....   | 49        |
| Übung 3.2.1: | <i>Die CAUCHYSche Formel</i> .....  | 51        |
| 3.3          | Allgemeine globale Bilanzgleichung.....   | 52        |
| 3.4          | Transporttheorem für Volumina.....  | 54        |
| Übung 3.4.1: | <i>Rund um den GAUSSschen Satz</i> .....  | 55        |
| Übung 3.4.2: | <i>Eine Darstellung der JACOBI-determinante</i> .....                                   | 61        |
| Übung 3.4.3: | <i>Zur Zeitableitung der JACOBI-determinante (direkter Beweis)</i> .....                | 63        |
| 3.5          | Transporttheoreme für Flächen .....   | 65        |
| 3.6          | Kombination der Bilanzgleichung mit Transporttheoremen .....                            | 67        |
| 3.7          | Allgemeine Bilanzen in regulären und singulären Punkten.....                            | 67        |
| 3.8          | Konkrete lokale Bilanzgleichungen in regulären Punkten .....                            | 69        |
| Übung 3.8.1: | <i>Varianten der lokalen Massenbilanz</i> .....   | 70        |
| Übung 3.8.2: | <i>Varianten der lokalen Impulsbilanz</i> .....   | 71        |
| 3.9          | Konkrete lokale Bilanzgleichungen in singulären Punkten .....                           | 74        |
| Übung 3.9.1: | <i>Sprungbilanz für den Impuls im statischen Fall</i> .....                             | 75        |
| 3.10         | Would you like to know more? .....  | 76        |
| <b>4.</b>    | <b>Ortsableitungen von Feldern</b> .....  | <b>77</b> |
| 4.1          | Ortsableitungen von Skalaren.....   | 77        |
| 4.2          | Ortsableitungen von Vektoren.....   | 78        |
| Übung 4.2.1: | <i>CHRISTOFFELsymbole ausgedrückt durch die Metrik</i> ....                             | 79        |
| Übung 4.2.2: | <i>CHRISTOFFELsymbole für Zylinderkoordinaten</i> .....                                 | 79        |
| Übung 4.2.3: | <i>CHRISTOFFELsymbole für Kugelkoordinaten</i> .....                                    | 79        |
| Übung 4.2.4: | <i>CHRISTOFFELsymbole für elliptische Koordinaten</i> .....                             | 79        |
| Übung 4.2.5: | <i>Kovariante Ableitung kovarianter Vektorkomponenten</i> .....                         | 80        |
| Übung 4.2.6: | <i>Die Divergenz eines Vektorfeldes</i> .....   | 81        |
| Übung 4.2.7: | <i>Der LAPLACEoperator</i> .....  | 81        |
| 4.3          | Invariante Schreibweise von Ortsableitungen skalarer Felder.....                        | 82        |
| Übung 4.3.1: | <i>Der LAPLACEoperator in Zylinderkoordinaten neu gesehen</i> .....                     | 84        |

Übung 4.3.2: *Der LAPLACEoperator absolut und indexbezogen geschrieben* .....84

4.4 Ortsableitungen von Tensoren.....84

Übung 4.4.1: *Die kovariante Ableitung des Metriktensors* .....86

Übung 4.4.2: *Die kovariante Ableitung für gemischte Tensoren zweiter Stufe* .....87

Übung 4.4.3: *Die kovariante Ableitung für Tensoren beliebiger Stufe* .....87

4.5 Would you like to know more? .....87

**5. Bilanzgleichungen in krummlinigen Koordinatensystemen .....89**

5.1 Die Massenbilanz in regulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem.....89

5.2 Die Massenbilanz (regulär) in Zylinderkoordinaten.....90

Übung 5.2.1: *Die Massenbilanz (regulär) in Kugelkoordinaten*.....90

5.3 Die Impulsbilanz in regulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem.....91

Übung 5.3.1: *Alternative Schreibweisen der Impulsbilanz (regulär) in beliebigen Koordinaten* .....91

5.4 Die Impulsbilanz (regulär) in Zylinderkoordinaten .....92

Übung 5.4.1: *Die Impulsbilanz (regulär) in physikalischen Zylinderkoordinaten*.....92

5.5 Impulsbilanz der Statik.....92

5.6 Impulsbilanz (regulär) der Statik in Zylinderkoordinaten .....93

Übung 5.6.1: *Impulsbilanz (regulär) der Statik in Kugelkoordinaten*.....93

5.7 Die Energiebilanz in regulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem.....94

Übung 5.7.1: *Die Bilanz der kinetischen Energie (regulär) in beliebigen Koordinaten*.....97

Übung 5.7.2: *Die Bilanz der inneren Energie (regulär) in beliebigen Koordinaten*.....98

5.8 Die Bilanzen für Masse, Impuls und Energie in singulären Punkten in einem beliebigen Koordinatensystem .....98

5.9 Das Transporttheorem für Volumenintegrale in beliebigen Koordinatensystemen .....99

5.10 Globale Bilanzen für Masse, Impuls und Energie .....100

5.11 Would you like to know more? .....100

**6. Materialgleichungen in beliebigen Koordinatensystemen .....103**

6.1 Eingangsbemerkungen.....103

6.2 Das HOOKESche Gesetz .....104

Übung 6.2.1: *LAMÉ-NAVIERsche Gleichungen und der eindimensionale Zugstab*.....106

|              |   |            |
|--------------|---|------------|
| Übung 6.2.2: | <i>LAMÉ-NAVIERsche Gleichungen und elementarer Schubversuch .....</i>                                   | 108        |
| Übung 6.2.3: | <i>HOOKESches Gesetz und Verzerrungstensor in kontravarianter und anderen Schreibweisen .....</i>       | 109        |
| Übung 6.2.4: | <i>HOOKESches Gesetz und Verzerrungstensor in Zylinderkoordinaten.....</i>                              | 110        |
| Übung 6.2.5: | <i>HOOKESches Gesetz und Verzerrungstensor in Kugelkoordinaten.....</i>                                 | 110        |
| Übung 6.2.6: | <i>Linearer Verzerrungstensor und Deformationsgradient .....</i>  | 111        |
| 6.3          | Das NAVIER-STOKES Gesetz .....  | 112        |
| Übung 6.3.1: | <i>Das NAVIER-STOKES Gesetz alternativ geschrieben .....</i>  | 113        |
| Übung 6.3.2: | <i>NAVIER-STOKES Gesetz und Verzerrungstensor in physikalischen Zylinder- und Kugelkoordinaten.....</i> | 113        |
| 6.4          | Das ideale Gasgesetz .....  | 114        |
| 6.5          | Die innere Energie von Gasen und Festkörpern .....  | 117        |
| Übung 6.5.1: | <i>Spezifische Wärme von Gasen bei konstantem Druck .....</i>   | 119        |
| Übung 6.5.2: | <i>Spezifische Wärme eines Festkörpers .....</i>  | 122        |
| Übung 6.5.3: | <i>Die Adiabatangleichung.....</i>  | 124        |
| 6.6          | Die FOURIERSche Wärmeleitungsgleichung.....   | 124        |
| Übung 6.6.1: | <i>Richtung des Wärmeflusses und des Temperaturgradienten .....</i>                                     | 125        |
| 6.7          | Would you like to know more? .....  | 125        |
| <b>7.</b>    | <b>Erste Feldgleichungen.....</b>   | <b>127</b> |
| 7.1          | Eine Vorbemerkung .....   | 127        |
| 7.2          | Globale Problemstellungen mit Kontrollvolumen.....  | 128        |
| Übung 7.2.1: | <i>Versagen der Halterung zwischen zwei Gaskammern .....</i>  | 135        |
| 7.3          | Die NAVIER-LAMÉschen Gleichungen .....  | 135        |
| Übung 7.3.1: | <i>Kontra- und kovariante Form der NAVIER-LAMÉschen Gleichungen.....</i>                                | 137        |
| Übung 7.3.2: | <i>Der linear-elastische, kreisförmige Torsionsstab .....</i>   | 138        |
| 7.4          | Die NAVIER-STOKESschen Gleichungen .....  | 139        |
| Übung 7.4.1: | <i>Planparallele Plattenströmung .....</i>  | 141        |
| Übung 7.4.2: | <i>Alternative Schreibweisen/Bezeichnungen bei NAVIER-STOKES-Gleichungen .....</i>                      | 141        |
| Übung 7.4.3: | <i>NAVIER-STOKES-Gleichungen in kontravarianter Schreibweise .....</i>                                  | 142        |
| 7.5          | Die Wärmeleitungsgleichung .....  | 143        |
| Übung 7.5.1: | <i>Wärmeleitung durch eine Wand.....</i>  | 146        |
| Übung 7.5.2: | <i>Temperaturverteilung um einen Hitzdraht.....</i>   | 147        |
| 7.6          | Would you like to know more? .....  | 147        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>8.</b> | <b>Beobachterwechsel in der klassischen Kontinuumstheorie .....</b>                        | <b>149</b> |
| 8.1       | Einführung.....  | 149        |
| 8.2       | EUKLIDISCHE Beobachtertransformationen .....   | 150        |
|           | Übung 8.2.1: <i>Alternativschreibweisen der EUKLIDischen Transformation.....</i>           | 152        |
| 8.3       | Objektive Tensorgrößen und kinematische Anwendungen .....                                  | 155        |
|           | Übung 8.3.1: <i>Alternativschreibweisen zum EUKLIDischen Tensor.....</i>                   | 155        |
|           | Übung 8.3.2: <i>Das Kreuzprodukt neu gesehen.....</i>                                      | 159        |
|           | Übung 8.3.3: <i>Zentrifugalbeschleunigung und Co. in absoluter Schreibweise .....</i>      | 163        |
| 8.4       | Massenbilanz und EUKLIDISCHE Transformationen .....  | 164        |
| 8.5       | Die Impulsbilanz in bewegten Koordinatensystemen: Ein beinahe philosophischer Exkurs ..... | 166        |
|           | Übung 8.5.1: <i>Der Spannungstensor als objektive Größe .....</i>                          | 167        |
|           | Übung 8.5.2: <i>Impulsbilanz im bewegten System vektoriell geschrieben .....</i>           | 168        |
|           | Übung 8.5.3: <i>Drehung um eine feste Achse .....</i>                                      | 174        |
|           | Übung 8.5.4: <i>Planung einer Raumstation.....</i>   | 175        |
| 8.6       | Energiebilanzen im rotierenden System .....  | 176        |
|           | Übung 8.6.1: <i>Die Leistung der Scheinkräfte.....</i>                                     | 176        |
|           | Übung 8.6.2: <i>Forminvarianz des ersten Hauptsatzes .....</i>                             | 178        |
| 8.7       | Zeitableitungen in bewegten Systemen .....   | 178        |
| 8.8       | Bemerkung zur Forminvarianz von Materialgleichungen .....                                  | 180        |
| 8.9       | Would you like to know more? .....   | 181        |
| <b>9.</b> | <b>Probleme der linearen Elastizitätstheorie .....</b>                                     | <b>183</b> |
| 9.1       | Einführung.....  | 183        |
| 9.2       | Die sich drehende Kreisscheibe.....  | 183        |
|           | Übung 9.2.1: <i>Nachlese zur rotierenden Kreisscheibe ohne Innenloch.....</i>              | 188        |
|           | Übung 9.2.2: <i>Rotierende Kreisscheibe mit Innenloch.....</i>                             | 188        |
| 9.3       | Das Pipelineproblem: Ein dickwandiger Hohlzylinder unter Innen- und Außendruck.....        | 190        |
|           | Übung 9.3.1: <i>Vorbereitungen zum „Bratwursteffekt“ .....</i>                             | 192        |
|           | Übung 9.3.2: <i>Alternative Herleitung der „Bratwurstgleichungen“ .....</i>                | 193        |
| 9.4       | Thermospannungen in Faserverbundwerkstoffen.....   | 193        |
|           | Übung 9.4.1: <i>Faserverbundwerkstoffe I.....</i>  | 195        |
|           | Übung 9.4.2: <i>Faserverbundwerkstoffe II .....</i>  | 195        |
| 9.5       | Umwandlungsverstärkte keramische Werkstoffe .....  | 196        |
|           | Übung 9.5.1: <i>Verschiebungen und Spannungen im kugelsymmetrischen Fall.....</i>          | 200        |
|           | Übung 9.5.2: <i>Umwandlungstemperatur eines Zirkoneinschlusses.....</i>                    | 202        |
|           | Übung 9.5.3: <i>Erweitertes HOOKESches Gesetz .....</i>                                    | 203        |
| 9.6       | Das Rissmodell von GRIFFITH.....   | 204        |

Übung 9.6.1: *Impulsbilanz in physikalischen elliptischen Koordinaten* ..... 207

Übung 9.6.2: *Spannungsfeld um einen GRIFFITHriss I*..... 208

Übung 9.6.3: *Spannungsfeld um einen GRIFFITHriss II* ..... 208

Übung 9.6.4: *Bruchzähigkeit* ..... 209

9.7 Would you like to know more? ..... 209

**10. Instationäre reibungsbehaftete Fluidmechanik** ..... **211**

10.1 Problemstellung ..... 211

    Übung 10.1.1: *NEWTONsches vs. MAXWELLSches Materialverhalten: Natur der resultierenden Feldgleichungen* ..... 213

10.2 Lösung im NAVIER-STOKES-Fall ..... 215

    Übung 10.2.1: *Fortsetzung einer Funktion und Lösung für die NAVIER-STOKES Plattenströmung* ..... 218

10.3 Lösung im MAXWELL-Fall ..... 219

    Übung 10.3.1: *Strömungsfeld eines MAXWELLfluids* ..... 225

    Übung 10.3.2: *FOURIERreihen zur D’ALEMBERTSchen Darstellung des MAXWELLfalles* ..... 228

10.4 Would you like to know more? ..... 228

**11. Einführung in die zeitunabhängige Plastizitätstheorie** ..... **229**

11.1 Ein konkretes Problem ..... 229

11.2 Die radialsymmetrische Lösung ..... 230

    Übung 11.2.1: *Lineare Spannungs-Dehnungslösung für unter Druck stehende Hohlkugel* ..... 230

    Übung 11.2.2: *Eigenspannungsverteilung* ..... 237

11.3 Die PRANDTL-REUSS-Gleichungen..... 237

    Übung 11.3.1: *Eindimensionaler plastisch fließender Zugstab* ..... 242

    Übung 11.3.2: *Plastische Dehnraten für den Fall der Hohlkugel* ..... 243

11.4 Would you like to know more? ..... 244

**12. Entropie**..... **247**

12.1 Entropie in Bilanzform ..... 247

    Übung 12.1.1: *Der integrierende Faktor im Fall des idealen Gases*..... 251

    Übung 12.1.2: *Die Entropie des idealen Gases*..... 255

12.2 Die Entropiekonzept als Maß für (Un-) Ordnung und (Ir-) Reversibilität..... 255

    Übung 12.2.1: *Entropiezuwachs nach Durchmischen des Inhalts zweier Druckkammern* ..... 260

12.3 Globale Eigenschaften der Entropiegleichung: Die Verfügbarkeit (Availability)..... 261

12.4 Reduktion der Form der Materialfunktionen für ein viskoses wärmeleitendes Fluid ..... 263

12.5 Would you like to know more? ..... 269

**13. Grundlagen der elektrodynamischen Feldtheorie ..... 271**

13.1 Vorbemerkungen ..... 271

13.2 Der Erhaltungssatz für den magnetischen Fluss ..... 273

    Übung 13.2.1: *Der STOKESSche Satz* ..... 276

    Übung 13.2.2: *Transporttheorem für vektorielle Flächendichten* ..... 277

13.3 Elektrische Ladungen, Ströme, elektrische Feldstärke und magnetische Induktion ..... 278

    Übung 13.3.1: *Messverfahren für E und B; elektrische Grundeinheiten* ..... 280

13.4 Erhaltungssatz für die Gesamtladung ..... 281

    Übung 13.4.1: *Die MAXWELLSchen Gleichungen in regulären und in singulären Punkten* ..... 286

    Übung 13.4.2: *Eine Anwendung der Sprungbilanz für das elektrische Feld* ..... 287

13.5 Prinzipielle Messung des Ladungs- und Strompotentials ..... 287

    Übung 13.5.1: *Einheiten und Messverfahren für D und H* ..... 290

    Übung 13.5.2: *Eichung von D und H* ..... 291

13.6 Zerlegung der totalen Ladungsdichte, Begriff der Polarisaton, Umschreibung des COULOMBSchen Gesetzes ..... 292

13.7 Zerlegung der totalen Ströme, Begriff der Magnetisierung, Umschreibung des ØRSTED-AMPÈRESchen Gesetzes ..... 294

13.8 Die MAXWELL-LORENTZ-Äther Relationen ..... 296

    Übung 13.8.1: *Die Vakuumlösungen der MAXWELLSchen Gleichungen nach Heinrich HERTZ* ..... 297

    Übung 13.8.2: *Das COULOMBSche Gesetz in traditioneller Form und die Definitionsgleichung des Amperes (BIOT-SAVART-Gesetz)* ..... 298

13.9 Transformationsverhalten der elektro-magnetischen Feldgrößen ..... 299

    Übung 13.9.1: *Das elektrische Feld als nichtobjektiver Vektor* ..... 301

    Übung 13.9.2: *Das Ladungspotential als objektiver und das magnetische Feld als nichtobjektiver Vektor* ..... 302

    Übung 13.9.3: *Transformationsverhalten des Strompotentials in Materie* ..... 303

    Übung 13.9.4: *Zur Invarianz der MAXWELLSchen Gleichungen* ..... 303

13.10 Transformationsverhalten der MAXWELL-LORENTZ-Ätherrelationen und der MAXWELLSchen Gleichungen ..... 304

    Übung 13.10.1: *MAXWELL-LORENTZ-Ätherrelationen in EUKLIDischen Systemen* ..... 306

    Übung 13.10.2: *Beschleunigung und MAXWELL-LORENTZ-Ätherrelationen bei GALILEItransformationen* ..... 306

13.11 Viererschreibweise der elektromagnetischen Felder ..... 306

    Übung 13.11.1: *Vierschreibweise der elektromagnetischen Transformationsgleichungen im EUKLIDischen Fall* .... 309

|  |            |
|--|------------|
| Übung 13.11.2: <i>MAXWELLSche Gleichungen in<br/>Vierschreibweise: Teil I</i> .....                      | 310        |
| Übung 13.11.3: <i>MAXWELLSche Gleichungen in<br/>Vierschreibweise: Teil II</i> .....                     | 311        |
| Übung 13.11.4: <i>Transformationsgleichung für das vierdimensionale<br/>Ladungs-Strompotential</i> ..... | 311        |
| 13.12 Viererschreibweise der MAXWELL-LORENTZ-<br>Ätherrelationen: Die LORENTZtransformation .....        | 312        |
| Übung 13.12.1: <i>Zeit-Raummetrik der EUKLIDISCHEN Transformation</i> ..                                 | 313        |
| Übung 13.12.2: <i>Weitere Untersuchungen zur LORENTZtransformation</i> ..                                | 317        |
| Übung 13.12.3: <i>Nachtrag zum MICHELSON-MORLEY-Experiment</i> .....                                     | 320        |
| 13.13 Energie und Impuls des elektromagnetischen Feldes.....   | 322        |
| 13.14 Einfachste Materialgleichungen in der Elektrodynamik .....   | 324        |
| 13.15 Would you like to know more? .....   | 327        |
| <b>Bildquellen</b> .....   | <b>329</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b> .....  | <b>333</b> |
| <b>Stichwortverzeichnis</b> .....  | <b>339</b> |





<http://www.springer.com/978-3-642-19869-4>

Streifzüge durch die Kontinuumstheorie

Müller, W.H.

2011, XVI, 342 S. 249 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-642-19869-4