Kapitel 6

Fachwerke

6

6 Fachwerke

Lernziele: Wir betrachten in diesem Kapitel Tragwerke, die nur aus Stäben bestehen. Solche Tragwerke bezeichnet man als Fachwerke. Die Studierenden sollen erkennen können, wann ein Fachwerk statisch und kinematisch bestimmt ist. Sie werden mit Verfahren zur systematischen Ermittlung der Stabkräfte vertraut gemacht, und sie sollen diese Verfahren sachgerecht anwenden können.

D. Gross et al., *Technische Mechanik,*
DOI 10.1007/978-3-642-13806-5_6,

6.1 Statische Bestimmtheit

Ein Tragwerk, das nur aus (geraden) Stäben besteht, die in sogenannten Knoten miteinander verbunden sind, heißt Stabwerk oder *Fachwerk*. Um die in den Stäben auftretenden Kräfte berechnen zu können, machen wir folgende idealisierende Annahmen:

1. die Stäbe sind an den Knoten zentrisch und gelenkig miteinander verbunden (die Knoten sind reibungsfreie Gelenke),
2. die äußeren Kräfte greifen nur in den Knoten an.

Durch diese Voraussetzungen für das „ideale Fachwerk“ ist gewährleistet, dass alle Stäbe nur auf Zug oder Druck beansprucht werden.

In realen Konstruktionen sind diese Idealisierungen nur angenähert erfüllt. So sind zum Beispiel die Stabenden miteinander oder mit Knotenblechen verschweißt. Dadurch treten an den Knoten örtlich begrenzte Störeffekte auf, die allerdings keinen Einfluss auf das globale Tragverhalten haben. Zum anderen greifen im wirklichen Fachwerk auch längs der Stäbe verteilte Lasten (z.B. das Eigengewicht der Stäbe) an. Diese Kräfte werden im idealisierten Fachwerk entweder vernachlässigt oder ihre Resultierenden werden näherungsweise durch statisch gleichwertige Kräftegruppen an den benachbarten Knoten ersetzt.

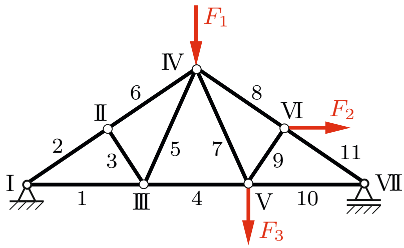


Abb. 6.1

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel im wesentlichen mit ebenen Fachwerken; räumliche Fachwerke behandeln wir nur am Rande. Als Beispiel betrachten wir in Abb. 6.1 ein Fachwerk aus 11 Stäben, die in 7 Knoten miteinander verbunden sind (Knoten, an denen Lagerkräfte angreifen, werden mitgezählt). Es ist üblich, die Stäbe mit arabischen Zahlen und die Knoten mit römischen Zahlen zu numerieren.

Zur Ermittlung der Stabkräfte schneiden wir alle Knoten frei. Für die zentrale Kräftegruppe an jedem Knoten stehen zwei Kräftegleichgewichtsbedingungen zur Verfügung (vgl. Abschnitt 2.3). Damit erhalten wir im Beispiel insgesamt $7 \cdot 2 = 14$ Gleichungen zur Bestimmung der 14 Unbekannten (11 Stabkräfte und 3 Lagerkräfte).

Ein Fachwerk heißt *statisch bestimmt*, wenn die Lager- und die Stabkräfte allein aus den Gleichgewichtsbedingungen (d.h. aus der Statik) bestimmbar sind. Allgemein erhält man bei einem *ebenen* Fachwerk mit k Knoten, s Stäben und r Lagerreaktionen $2\,k$ Gleichungen für die $s + r$ Unbekannten. Damit die Stab- und die Lagerkräfte ermittelt werden können, muss daher die *notwendige Bedingung*

$$2\,k = s + r \tag{6.1}$$

erfüllt sein.

Bei einem *räumlichen* Fachwerk stehen an jedem Knoten drei Gleichgewichtsbedingungen, d.h. insgesamt $3\,k$ Gleichungen zur Verfügung. Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit lautet dann

$$3\,k = s + r\,. \tag{6.2}$$

Bei dem Fachwerk nach Abb. 6.2a ist mit $k = 7$, $s = 10$ und $r = 2 \cdot 2$ (zwei Festlager) wegen $2 \cdot 7 = 10 + 4$ die notwendige Bedingung (6.1) erfüllt. Da es außerdem unbeweglich ist, ist es statisch bestimmt.

Ein Fachwerk heißt *kinematisch bestimmt*, wenn die Lage aller Knotenpunkte festliegt. Bewegliche Fachwerke sind kinematisch unbestimmt und müssen ausgeschlossen werden. Die Abb. 6.2b und c zeigen solche „Ausnahmefachwerke". Auch hier ist jeweils mit $k = 6$, $s = 9$ und $r = 3$ die notwendige Bedingung (6.1)

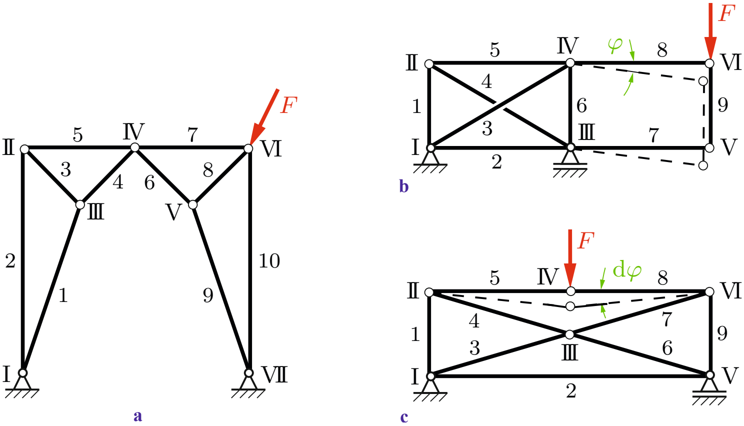


Abb. 6.2

für statische Bestimmtheit erfüllt. Dennoch lassen sich die Stabkräfte nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnen: Gleichung (6.1) ist nicht hinreichend für statische Bestimmtheit. Die Stäbe 7 und 8 des Fachwerks nach Abb. 6.2b lassen sich um einen endlichen Winkel φ drehen (Gelenkviereck, Beweglichkeit im Großen), während sich die Stäbe 5 und 8 des Fachwerks in Abb. 6.2c um einen infinitesimalen Winkel $\mathrm{d}\varphi$ drehen können (Beweglichkeit im Kleinen).

6.2 Aufbau eines Fachwerks 6.2

Im folgenden werden drei Möglichkeiten zum Aufbau von statisch und kinematisch bestimmten ebenen Fachwerken gegeben.

1. Bildungsgesetz: An einem Einzelstab werden zwei weitere Stäbe so angefügt, dass ein Dreieck entsteht. Dann schließt man an zwei beliebigen Knoten des Dreiecks je einen weiteren Stab an und verbindet diese Stäbe zu einem neuen Knoten. Dieses Verfahren ist in Abb. 6.3 illustriert und lässt sich beliebig fortsetzen.

Ein in dieser Form aufgebautes Fachwerk heißt *einfaches Fachwerk*. Die Lage der Knotenpunkte liegt eindeutig fest. Dabei muss allerdings vermieden werden, zwei Stäbe so anzuschließen, dass sie auf einer Geraden liegen (gestrichelte Stäbe in Abb. 6.3: Ausnahmefachwerk).

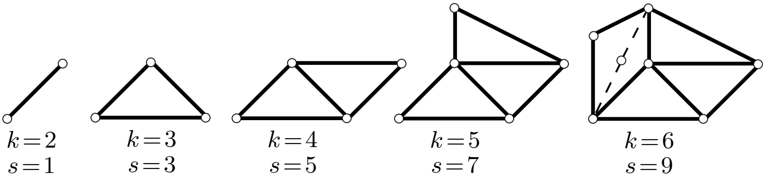


Abb. 6.3

Für die Fachwerke in Abb. 6.3 gilt die Beziehung

$$2\,k = s + 3\,. \tag{6.3}$$

Bei jedem weiteren Schritt erhöht sich die Anzahl der Stäbe um zwei und die Anzahl der Knoten um eins, so dass (6.3) gültig bleibt. Bei einem statisch bestimmt gelagerten einfachen Fachwerk treten $r = 3$ Lagerreaktionen auf. Durch Vergleich mit (6.3) erkennt man, dass in diesem Fall die Bedingung (6.1) erfüllt ist.

2. Bildungsgesetz: Zwei nach dem ersten Bildungsgesetz konstruierte Fachwerke werden durch drei Stäbe verbunden (Abb. 6.4a), die nicht alle parallel und nicht zentral sein dürfen. An die Stelle von zwei Stäben kann auch ein beiden Teilfachwerken gemeinsamer Knoten treten. So sind in Abb. 6.4b die beiden Stäbe 2 und 3 aus Abb. 6.4a durch den Knoten I ersetzt worden.

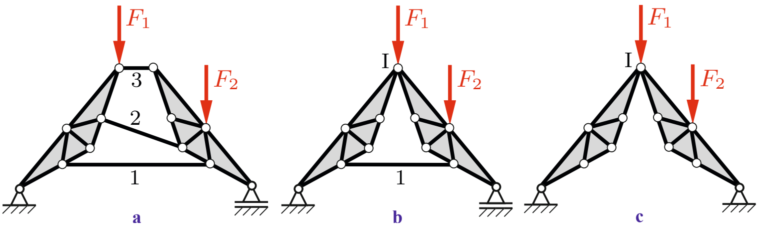


Abb. 6.4

Verbinden wir zwei einfache Fachwerke *nur* in einem einzigen Knoten, so erhalten wir ein bewegliches Tragwerk. Die kinematische und die statische Bestimmtheit müssen dann durch eine zusätzliche Lagerung erzeugt werden. In Abb. 6.4c sind die beiden einfachen Teilfachwerke nur im Knoten I zusammengeschlossen, d.h. der Stab 1 in Abb. 6.4b ist entfernt worden. Damit das so entstandene Fachwerk nicht beweglich ist, wird das einwertige Lager aus Abb. 6.4b jetzt durch ein zweiwertiges Lager ersetzt. Das Fachwerk ist dann ein Dreigelenkbogen.

Wie man durch Abzählen leicht nachprüfen kann, ist in allen Fällen nach Abb. 6.4 die Bedingung (6.1) für statische Bestimmtheit erfüllt.

3. Bildungsgesetz: Entfernen wir einen Stab aus einem Fachwerk, das nach dem ersten oder dem zweiten Bildungsgesetz aufgebaut ist, so wird es beweglich. Wir müssen daher einen neuen Stab an einer anderen Stelle des Fachwerks so einfügen, dass es wieder starr wird. Da sich dann weder die Anzahl der Stäbe noch die Anzahl der Knoten ändert, ist die Bedingung (6.1) auch für das neue Fachwerk erfüllt.

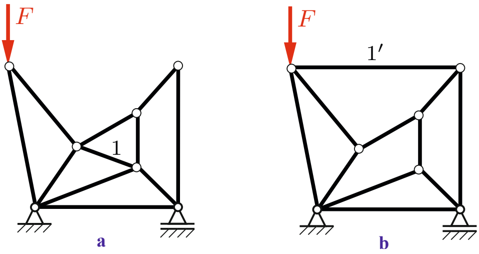


Abb. 6.5

Ein Beispiel ist in Abb. 6.5 dargestellt. Entfernen wir aus dem einfachen Fachwerk in Abb. 6.5a den Stab 1, so wird das Fachwerk beweglich. Durch Einfügen des neuen Stabes 1′ erhalten wir dann das statisch und kinematisch bestimmte nichteinfache Fachwerk nach Abb. 6.5b.

6.3 Ermittlung der Stabkräfte

6.3

6.3.1 Knotenpunktverfahren

Ein Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte besteht darin, sämtliche Knoten freizuschneiden und an jedem Knoten die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen. Diese Methode heißt *Knoten-*

punktverfahren. Es ist ein systematisches Verfahren, das bei statisch und kinematisch bestimmten Fachwerken immer zum Ziel führt.

Bei der praktischen Durchführung ist es zweckmäßig, zuerst nach Stäben mit der Stabkraft Null zu suchen. Wir nennen solche Stäbe *Nullstäbe*. Wenn Nullstäbe vor Beginn der Rechnung erkannt werden, reduziert sich die Anzahl der Unbekannten.

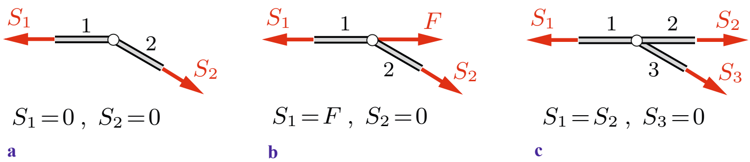


Abb. 6.6

Die folgenden Regeln helfen beim Auffinden der Nullstäbe:

1. Sind an einem *unbelasteten* Knoten zwei Stäbe angeschlossen, die nicht in gleicher Richtung liegen („unbelasteter Zweischlag"), so sind beide Stäbe Nullstäbe (Abb. 6.6a).
2. Sind an einem *belasteten* Knoten zwei Stäbe angeschlossen und greift die äußere Kraft in Richtung des einen Stabes an, so ist der andere Stab ein Nullstab (Abb. 6.6b).
3. Sind an einem *unbelasteten* Knoten drei Stäbe angeschlossen, von denen zwei in gleicher Richtung liegen, so ist der dritte Stab ein Nullstab (Abb. 6.6c).

Diese drei Regeln folgen aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten.

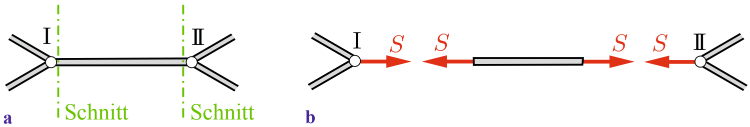


Abb. 6.7

Führen wir nach Abb. 6.7a an den Knoten I und II Schnitte durch einen Stab, so müssen wir an den freigeschnittenen Stabenden jeweils die Stabkraft S anbringen (Abb. 6.7b). Wegen actio = reactio wirkt die Kraft S auch auf die Knoten I und II. Entsprechend der Vereinbarung, dass Zugkräfte positiv sind, wirken positive Stabkräfte von den Knoten weg (d.h. sie *ziehen* an den Knoten); negative Stabkräfte zeigen Druck an und wirken auf die Knoten zu.

Es ist nicht immer möglich anschaulich festzustellen, ob ein Stab ein Zug- oder ein Druckstab ist. Aus diesem Grund werden wir zunächst immer annehmen, dass alle Stäbe eines Fachwerkes unter Zug stehen. Ergibt dann die Berechnung eine negative Kraft für einen Stab, dann steht dieser in Wirklichkeit unter Druck.

Die $s + r$ unbekannten Stab- und Lagerkräfte lassen sich beim ebenen Fachwerk aus den $2k$ Gleichgewichtsbedingungen für die k Knoten bestimmen. Zusätzlich kann man noch die drei Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem verwenden. Da diese aber nicht unabhängig von den Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten sind, stellen sie nur eine Probe für die Richtigkeit der Analyse dar. Bei der praktischen Lösung von Aufgaben kann es zweckmäßig sein, zunächst die Lagerreaktionen aus dem Gleichgewicht für das Gesamtsystem zu bestimmen. In diesem Fall liefern drei andere Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten eine Probe für die Analyse.

Angemerkt sei, dass das Knotenpunktverfahren sowohl bei ebenen als auch bei räumlichen Fachwerken anwendbar ist. Bei Raumfachwerken hat man dann an jedem Knoten drei Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen.

Beispiel 6.1 Das Fachwerk nach Abb. 6.8a wird durch die Kraft F belastet. Gesucht sind die Lager- und die Stabkräfte. **B6.1**

Lösung Das Fachwerk ist nach dem ersten Bildungsgesetz aufgebaut. Da drei Lagerkräfte auftreten, ist das Fachwerk nach Abschnitt 6.2 statisch und kinematisch bestimmt.

Im Freikörperbild (Abb. 6.8b) numerieren wir Stäbe und Knoten. Nullstäbe kennzeichnen wir durch Nullen: Stab 4 (nach Regel 2), die Stäbe 5 und 9 (nach Regel 3) und die Stäbe 10 und 13 (nach Regel 1).

Um die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren, ist es zweckmäßig, die Lagerkräfte vorab zu berechnen. Aus dem Kräfte- und

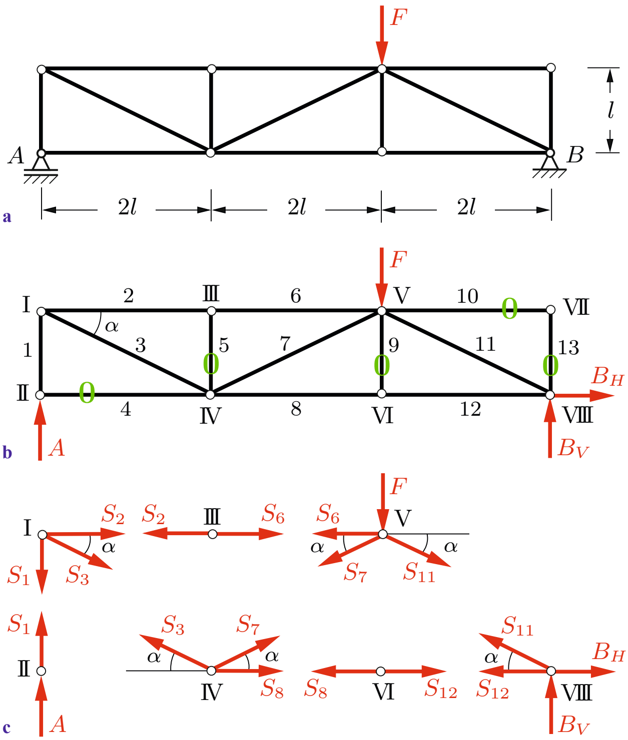


Abb. 6.8

dem Momentengleichgewicht am Gesamtsystem folgen

$$\rightarrow: \qquad \underline{\underline{B_H = 0}}\,,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad -4\,l\,F + 6\,l\,B_V = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B_V = \frac{2}{3}\,F}}\,,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{B}: \quad -6\,l\,A + 2\,l\,F = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{A = \frac{1}{3}\,F}}\,.$$

Abbildung 6.8c zeigt die freigeschnittenen Knoten, wobei alle Stabkräfte als Zugkräfte angenommen werden. Die bereits erkannten Nullstäbe werden weggelassen. Aus diesem Grund braucht Knoten VII nicht mehr betrachtet zu werden. Kräftegleichgewicht an den Knoten liefert:

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{I}) & \rightarrow: & S_2 + S_3 \cos\alpha = 0\,, \\
 & \downarrow: & S_1 + S_3 \sin\alpha = 0\,, \\
\mathrm{II}) & \uparrow: & S_1 + A = 0\,, \\
\mathrm{III}) & \rightarrow: & S_6 - S_2 = 0\,, \\
\mathrm{IV}) & \rightarrow: & S_8 + S_7 \cos\alpha - S_3 \cos\alpha = 0\,, \\
 & \uparrow: & S_7 \sin\alpha + S_3 \sin\alpha = 0\,, \\
\mathrm{V}) & \rightarrow: & S_{11} \cos\alpha - S_6 - S_7 \cos\alpha = 0\,, \\
 & \downarrow: & S_7 \sin\alpha + S_{11} \sin\alpha + F = 0\,, \\
\mathrm{VI}) & \rightarrow: & S_{12} - S_8 = 0\,, \\
\mathrm{VIII}) & \rightarrow: & B_H - S_{11} \cos\alpha - S_{12} = 0\,, \\
 & \uparrow: & B_V + S_{11} \sin\alpha = 0\,.
\end{array}
$$

Dies sind elf Gleichungen zur Berechnung der acht noch unbekannten Stabkräfte und der drei Lagerkräfte. Da die Lagerkräfte aber bereits durch Gleichgewichtsüberlegungen am Gesamtsystem bestimmt wurden, vereinfacht sich die Auflösung des Gleichungssystems, und drei Gleichungen können als Probe verwendet werden. Man erhält mit $\sin\alpha = l/\sqrt{5\,l^2} = 1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2\,l/\sqrt{5\,l^2} = 2/\sqrt{5}$:

$$
\underline{\underline{S_1 = -\frac{1}{3}\,F}}\,, \qquad \underline{\underline{S_2 = S_6 = -\frac{2}{3}\,F}}\,, \qquad \underline{\underline{S_3 = \frac{\sqrt{5}}{3}\,F}}\,,
$$

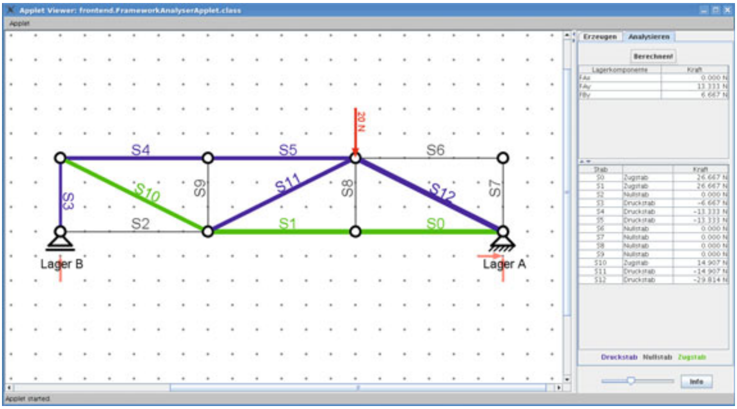
$$
\underline{\underline{S_7 = -\frac{\sqrt{5}}{3}\,F}}\,, \qquad \underline{\underline{S_8 = S_{12} = \frac{4}{3}\,F}}\,, \qquad \underline{\underline{S_{11} = -\frac{2}{3}\sqrt{5}\,F}}\,.
$$

Es ist zweckmäßig, die Stabkräfte einschließlich der Vorzeichen in einer Stabkrafttabelle zusammenzustellen, wobei wir auf den gemeinsamen Faktor F beziehen. Die Minuszeichen bei den Stabkräften S_1, S_2, S_6, S_7 und S_{11} zeigen an, dass diese Stäbe Druckstäbe sind.

Stabkrafttabelle

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\dfrac{S_i}{F}$	$-\dfrac{1}{3}$	$-\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	0	0	$-\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	$\dfrac{4}{3}$	0	0	$-\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$	$\dfrac{4}{3}$	0

Dieses Beispiel - und viele weitere Beispiele zur Ermittlung von Stabkräften in ebenen Fachwerken - können Sie auch mit dem TM-Tool „Fachwerksanalyse“ bearbeiten (siehe Screenshot). Es steht Ihnen zusammen mit einer Reihe weiterer TM-Tools unter der auf dem Umschlag angegebenen Adresse frei zur Verfügung.



B6.2 **Beispiel 6.2** Das Raumfachwerk nach Abb. 6.9 wird in den Knoten IV und V jeweils durch eine Kraft F belastet. Es sind die Kräfte in den Stäben 1 bis 6 zu berechnen.

Lösung Wir schneiden die Knoten V und IV frei und bringen die Stabkräfte $S_1 \ldots S_6$ als Zugkräfte an. Die Gleichgewichtsbedingungen für diese Knoten lauten dann zunächst in Vektorform

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}: &\qquad S_1\boldsymbol{e}_y + S_2\boldsymbol{e}_{\mathrm{V/VI}} - S_4\boldsymbol{e}_x + F\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}\,,\\
\mathrm{IV}: &\quad -S_1\boldsymbol{e}_y + S_3\boldsymbol{e}_{\mathrm{IV/VI}} - S_5\boldsymbol{e}_x + S_6\boldsymbol{e}_{\mathrm{IV/II}} + F\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0}\,.
\end{aligned}
$$

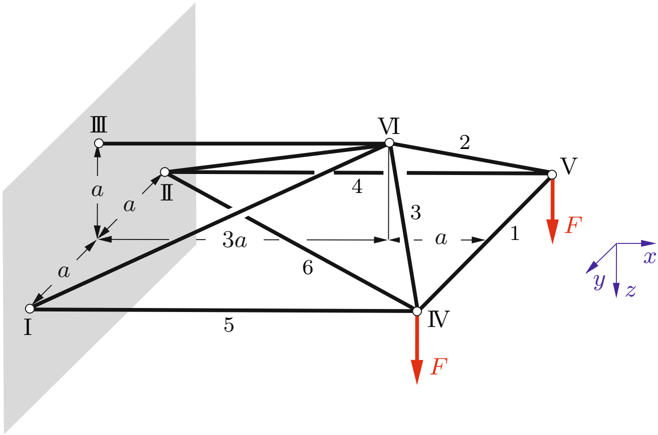


Abb. 6.9

Dabei lassen sich die zunächst noch unbekannten Einheitsvektoren aus den Verbindungsvektoren zwischen den Knoten ermitteln. So erhält man zum Beispiel für $\boldsymbol{e}_{\mathrm{V/VI}}$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{V/VI}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}\begin{pmatrix}-a\\ a\\ -a\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Entsprechend gilt für die weiteren Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{IV/VI}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_{\mathrm{IV/II}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Damit lauten die Gleichgewichtsbedingungen in Komponenten

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}: \quad & -S_2\tfrac{1}{\sqrt{3}} - S_4 = 0\,, & \mathrm{IV}: \quad & -S_3\tfrac{1}{\sqrt{3}} - S_5 - S_6\tfrac{2}{\sqrt{5}} = 0\,,\\
& S_1 + S_2\tfrac{1}{\sqrt{3}} = 0\,, & & -S_1 - S_3\tfrac{1}{\sqrt{3}} - S_6\tfrac{1}{\sqrt{5}} = 0\,,\\
& -S_2\tfrac{1}{\sqrt{3}} + F = 0\,, & & -S_3\tfrac{1}{\sqrt{3}} + F = 0\,.
\end{aligned}$$

Auflösen liefert der Reihe nach

$$\underline{\underline{S_2 = \sqrt{3}\,F}}\,,\qquad \underline{\underline{S_1 = -F}}\,,\qquad \underline{\underline{S_4 = -F}}\,,$$

$$\underline{\underline{S_3 = \sqrt{3}\,F}}\,,\qquad \underline{\underline{S_6 = 0}}\,,\qquad \underline{\underline{S_5 = -F}}\,.$$

6.3.2 Cremona-Plan

Die Ermittlung der Stabkräfte kann auch zeichnerisch erfolgen. Dabei gehen wir davon aus, dass in einem ersten Schritt die Lagerkräfte bereits bestimmt wurden. Wir wollen das Vorgehen an Hand des Fachwerks in Abb. 6.10a erläutern.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für das Gesamtsystem (Abb. 6.10b) finden wir zunächst

$$A_H = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,F\,,\quad A_V = -\frac{3}{2}\sqrt{2}\,F\,,\quad B = 2\sqrt{2}\,F\,.$$

Nach dem Numerieren der Stäbe und der Knoten denken wir uns zur Ermittlung der Stabkräfte wieder alle Knoten freigeschnitten. Bei der zeichnerischen Lösung verlangt das Kräftegleichgewicht an den Knoten jeweils ein geschlossenes Krafteck (vgl. Abschnitt 2.3).

Wir beginnen am Knoten I. Um das Krafteck für diesen Knoten zu konstruieren, zeichnen wir zuerst die bereits berechneten Kraftkomponenten A_H und A_V maßstäblich nach ihrer Größe und in ihrem wirklichen Richtungssinn (Abb. 6.10c). Durch die Stabkräfte S_1 und S_2, deren Richtungen bekannt sind, wird das Krafteck geschlossen.

Damit liegen die Richtungssinne von S_1 und S_2 am Knoten I fest. Wir kennzeichnen sie in Abb. 6.10b durch Pfeile. Jeweils gleichgroße Gegenkräfte wirken wegen actio = reactio an den gegenüberliegenden Knoten II und IV. Sie werden durch Gegenpfeile markiert.

Entsprechend finden wir bei nun bekanntem S_2 durch das geschlossene Krafteck am Knoten II die Stabkräfte S_3 und S_4. Gleichgewicht am Knoten III liefert schließlich die Kraft S_5. Wir tragen die Kraftrichtungen von S_3 bis S_5 an den Knoten ebenfalls in das Fachwerk ein. Das Krafteck am Knoten IV dient abschließend als Kontrolle.

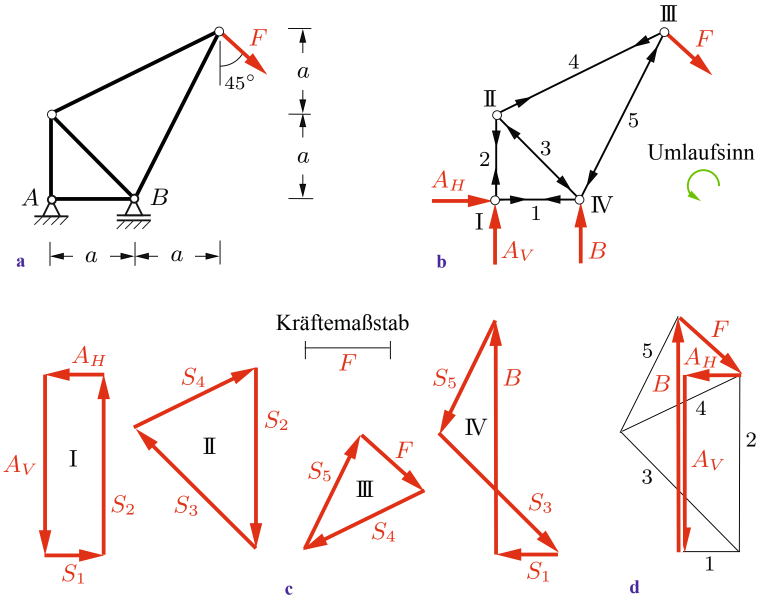


Abb. 6.10

In Abb. 6.10c taucht jede Stabkraft in zwei Kraftecken auf. Man kann das Vorgehen systematisieren, indem man alle Kraftpläne so aneinander fügt, dass jede Stabkraft nur noch einmal gezeichnet werden muss. Der so entstehende Kräfteplan wird nach Luigi Cremona (1830–1903) benannt.

Folgende Schritte sind bei der Konstruktion eines Cremona-Plans durchzuführen:

1. Zeichnen des Freikörperbildes und Berechnung der Lagerkräfte.
2. Numerieren der Stäbe.
3. Ermittlung etwa vorhandener Nullstäbe. Kennzeichnen dieser Stäbe durch eine Null im Freikörperbild.
4. Festlegung eines Kräftemaßstabs und eines Umlaufsinns.
5. Zeichnen des geschlossenen Kraftecks aus den eingeprägten Kräften und den Lagerreaktionen. Dabei Kräfte in der Reihenfolge aneinanderfügen, wie sie beim Umlauf um das Fachwerk im gewählten Umlaufsinn auftreten.
6. Beginnend an einem Knoten mit höchstens *zwei* unbekannten Stabkräften für jeden Knoten das geschlossene Kräftepolygon

zeichnen. Kräfte dabei ebenfalls in der Reihenfolge antragen, die durch den Umlaufsinn gegeben ist.
7. Da jede Stabkraft zweimal (mit entgegengesetzter Orientierung) auftritt, keine Pfeile in das Kräftepolygon einzeichnen (die Stabkraft im Polygon nur durch die entsprechende Stabnummer kennzeichnen). Einzeichnen der Pfeile und der Gegenpfeile an den Knoten.
8. Letzte Kraftecke als Kontrolle verwenden.
9. Angabe aller Stabkräfte mit Vorzeichen in einer Tabelle.

Um den Cremona-Plan für das Fachwerk in Abb. 6.10a zu konstruieren, wählen wir den Umlaufsinn entgegen dem Uhrzeiger. Anschließend zeichnen wir nach Punkt 5 das geschlossene Krafteck der äußeren Kräfte in der Reihenfolge A_H, A_V, B, F (Abb. 6.10d).

Die Ermittlung der Stabkräfte beginnen wir am Knoten I. Das Krafteck wird so konstruiert, dass es sich in der Reihenfolge A_H, A_V, S_1 und S_2 (Umlaufsinn!) schließt. Die Kraftrichtungen werden ins Freikörperbild eingetragen.

Anschließend gehen wir zum Knoten II weiter. Von den dort angreifenden Kräften S_2, S_3 und S_4 tritt S_2 bereits im Cremona-Plan auf. Die Richtung von S_2 folgt aus dem Pfeil am Knoten II. Das Krafteck wird nun mit S_3 und S_4 geschlossen, und die Kraftrichtungen werden wieder in das Fachwerk eingetragen. Am Knoten III sind schließlich F und S_4 bereits im Cremona-Plan enthalten, so dass das Krafteck nur mit S_5 geschlossen werden muss (Kontrolle: die Richtung von S_5 muss mit der Richtung von Stab 5 übereinstimmen). Das Krafteck für den Knoten IV dient als weitere Kontrolle.

Aus dem Cremona-Plan können wir die Beträge der Stabkräfte im Rahmen der Zeichengenauigkeit ablesen; die Vorzeichen folgen aus den Pfeilrichtungen im Freikörperbild:

i	1	2	3	4	5
S_i/F	0,7	2,1	$-2,0$	1,6	$-1,6$

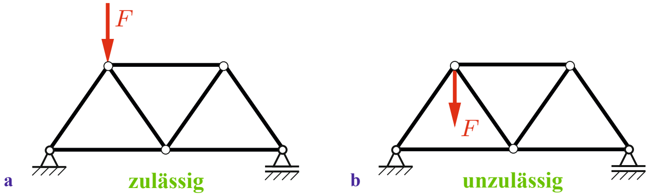


Abb. 6.11

Der Cremona-Plan lässt sich in der geschilderten Form nur für *einfache* Fachwerke zeichnen, wobei äußere Kräfte nur an Außenknoten angreifen dürfen. Die Kräfte sind dabei stets außerhalb des Fachwerks zu zeichnen (Abb. 6.11a) und *nicht* innerhalb (Abb. 6.11b).

B6.3

Beispiel 6.3 Das Fachwerk nach Abb. 6.12a wird durch die beiden Kräfte $F_1 = 2F$ und $F_2 = F$ belastet.

Gesucht sind die Stabkräfte.

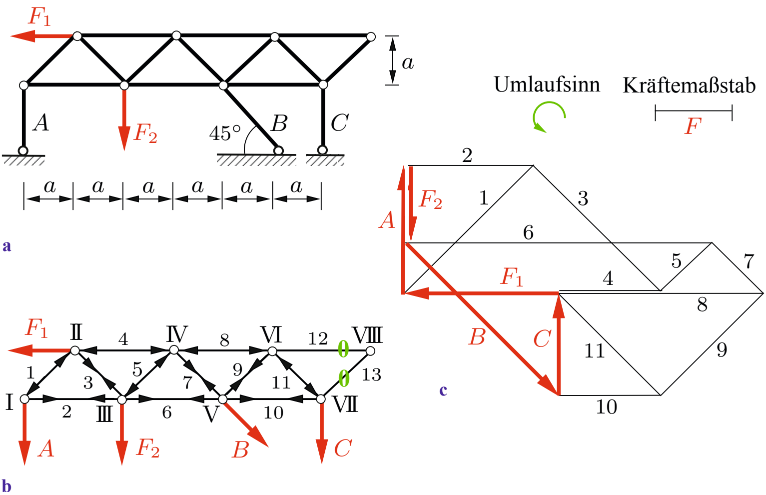


Abb. 6.12

Lösung Durch Anwenden der Gleichgewichtsbedingungen auf das Gesamtsystem (Abb. 6.12b) berechnen wir zuerst die Lagerkräfte:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{I}}: \quad a\,F_1 - 2\,a\,F_2 - 2\sqrt{2}\,a\,B - 6\,a\,C = 0\,,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{VII}}: \qquad a\,F_1 + 6\,a\,A + 4\,a\,F_2 + \sqrt{2}\,a\,B = 0\,,$$

$$\rightarrow: \qquad -F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,B = 0\,.$$

Auflösen liefert

$$A = -\frac{5}{3}\,F\,, \quad B = 2\sqrt{2}\,F\,, \quad C = -\frac{4}{3}\,F\,.$$

Die Pendelstützen A, B und C sind im Freikörperbild als Zugstäbe angenommen worden. Die Ergebnisse zeigen, dass die Stäbe A und C in Wirklichkeit auf Druck beansprucht werden.

Wir numerieren die Stäbe und die Knoten und stellen fest, dass die Stäbe 12 und 13 Nullstäbe sind (vgl. Abschnitt 6.3.1, Regel 1). Sie werden im Freikörperbild durch eine Null gekennzeichnet. Nach Wahl des Umlaufsinns (entgegen dem Uhrzeiger) und des Kräftemaßstabs zeichnen wir zunächst das geschlossene Krafteck der äußeren Kräfte in der Reihenfolge A, F_2, B, C, F_1 (Abb. 6.12c). Dabei ist zu beachten, dass die Kräfte in den Pendelstützen jetzt im wirklichen Richtungssinn zu zeichnen sind.

Die Ermittlung der Stabkräfte beginnen wir am Knoten I: die bekannte Lagerkraft A und die unbekannten Stabkräfte S_2 und S_1 müssen in dieser Reihenfolge ein geschlossenes Krafteck bilden (Abb. 6.12c). Die entsprechenden Kraftrichtungen (Stab 1: Druck, Stab 2: Zug) werden in das Freikörperbild eingetragen.

Mit der nun bekannten Kraft S_1 können wir am Knoten II in gleicher Weise durch das geschlossene Krafteck F_1, S_1, S_3, S_4 die Stabkräfte S_3 und S_4 bestimmen. Durch Weiterschreiten zu den Knoten III bis VI lässt sich der Cremona-Plan vollständig konstruieren. Das Krafteck für den Knoten VII dient als Kontrolle.

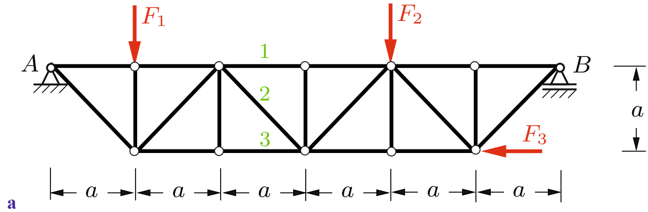
Aus dem Kräfteplan entnehmen wir die Beträge der Stabkräfte; die Vorzeichen folgen aus den Pfeilrichtungen im Freikörperbild:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
S_i/F	$-2,4$	1,7	$2,4$	$-1,3$	$-0,9$	4,0	0,9	$-2,7$	1,9	1,3	$-1,9$	0	0

6.3.3 Rittersches Schnittverfahren

Sind nur *einzelne* Stabkräfte eines Fachwerks zu bestimmen, so ist es oft vorteilhaft, das *Schnittverfahren* nach August Ritter (1826–1908) anzuwenden. Bei diesem Verfahren zerlegen wir das Fachwerk durch einen Schnitt in zwei Teile. Dabei müssen *drei* Stäbe geschnitten werden, die nicht alle zum gleichen Knoten gehören dürfen, oder der Schnitt ist durch *einen* Stab und *ein* Gelenk zu führen.

Zur Erläuterung der Methode betrachten wir das Fachwerk nach Abb. 6.13a, bei dem die Kräfte in den Stäben 1 bis 3 gesucht sind. Nach Ermittlung der Lagerreaktionen denken wir uns das Fachwerk mit einem Schnitt durch die drei Stäbe 1 bis 3 in zwei Teile zerlegt. An den freigeschnittenen Stäben werden jeweils die entsprechenden Stabkräfte als Zugkräfte eingezeichnet (Abb. 6.13b).



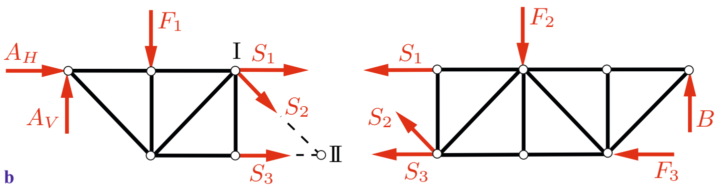


Abb. 6.13

Sowohl der rechte als auch der linke Teilkörper müssen für sich im Gleichgewicht sein. Wir können daher durch Anwenden der drei Gleichgewichtsbedingungen auf einen der beiden Teilkörper die drei unbekannten Stabkräfte berechnen. Dabei ist es sinnvoll, möglichst Momentengleichungen um die Schnittpunkte von je zwei Stabkräften zu verwenden. Dann gehen diese Kräfte nicht in die entsprechende Momentengleichung ein, und wir erhalten damit jeweils *eine* Gleichung für *eine* Stabkraft. Gleichgewicht am linken Teilkörper liefert auf diese Weise:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{I}}: \quad -2\,a\,A_V + a\,F_1 + a\,S_3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_3 = 2\,A_V - F_1\,,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{II}}: \quad -3\,a\,A_V - a\,A_H + 2\,a\,F_1 - a\,S_1 = 0$$

$$\rightarrow \qquad S_1 = 2\,F_1 - 3\,A_V - A_H\,,$$

$$\uparrow: \quad A_V - F_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,S_2 = 0 \qquad \rightarrow \qquad S_2 = \sqrt{2}\,(A_V - F_1)\,.$$

Mit den bereits ermittelten Lagerkräften sind dann die Stabkräfte bekannt.

Das Schnittverfahren lässt sich oft auch anwenden, ohne dass die Lagerkräfte vorher berechnet werden müssen. So erhält man zum Beispiel die Stabkräfte S_1 bis S_3 des Fachwerks in Abb. 6.14a direkt nach Schneiden der entsprechenden Stäbe aus den Gleichgewichtsbedingungen für das rechte Teilsystem (Abb. 6.14b).

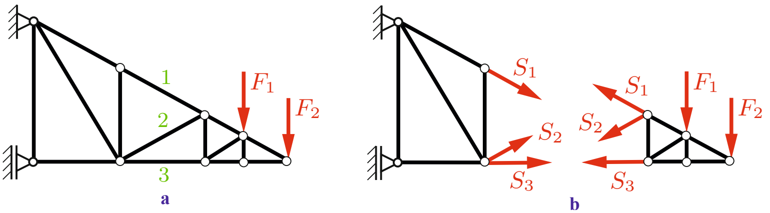


Abb. 6.14

Bei räumlichen Fachwerken kann das Schnittverfahren sinngemäß angewendet werden. Da für den starren Körper dann sechs Gleichgewichtsbedingungen vorliegen, muss man das Fachwerk durch einen Schnitt trennen, der durch sechs Stäbe oder durch drei Stäbe und einen Knoten geht.

B6.4 **Beispiel 6.4** Das Fachwerk nach Abb. 6.15a wird durch zwei Kräfte $F_1 = 2\,F$ und $F_2 = F$ belastet.

Wie groß ist die Kraft im Stab 4?

Lösung Zur Ermittlung der Lagerkräfte zeichnen wir das Freikörperbild (Abb. 6.15b) und wenden die Gleichgewichtsbedingungen an:

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: \quad -3\,a\,F_1 + a\,F_2 + 6\,a\,B = 0 \quad \rightarrow \quad B = \frac{3\,F_1 - F_2}{6} = \frac{5}{6}\,F\,,$$

$$\overset{\curvearrowleft}{B}: \quad -6\,a\,A_V + 3\,a\,F_1 + a\,F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_V = \frac{3\,F_1 + F_2}{6} = \frac{7}{6}\,F\,,$$

$$\rightarrow: \quad A_H - F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_H = F_2 = F\,.$$

Trennt man das Fachwerk mit einem Schnitt durch die Stäbe 4 bis 6 (Abb. 6.15c), so liefert das Momentengleichgewicht am linken Teil bezüglich I die gesuchte Kraft S_4:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{I}}: \quad 2\,a\,S_4 + 2\,a\,A_H - 3\,a\,A_V = 0$$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{S_4}} = \frac{1}{2}\,(3\,A_V - 2\,A_H) = \underline{\underline{\frac{3}{4}\,F}}\,.$$

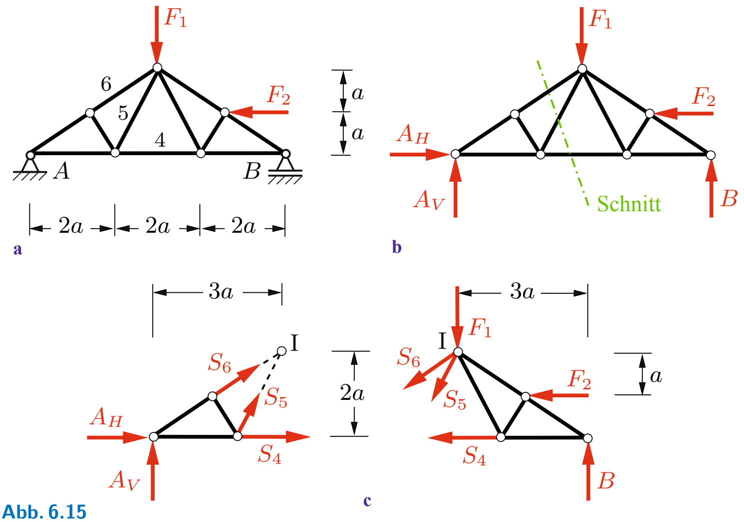


Abb. 6.15

Zur Probe wenden wir die Momentenbedingung am rechten Teil bezüglich I an:

$$\overset{\curvearrowleft}{\mathrm{I}}: \quad -\,2\,a\,S_4 + 3\,a\,B \;-\; a\,F_2 = 0$$

$$\rightarrow \quad S_4 = \frac{1}{2}(3\,B - F_2) = \frac{3}{4}\,F\,.$$

6.4

6.4 Zusammenfassung

- Ein Fachwerk besteht aus geraden Stäben, die in Gelenken miteinander verbunden sind.
- Ein Fachwerk ist statisch bestimmt, wenn die Stab- und Lagerkräfte allein aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Dies ist der Fall, wenn die Zahl der unbekannten Lager- und Stabkräfte gleich der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist und das Fachwerk unbeweglich ist.
- Ein Fachwerk ist kinematisch bestimmt, wenn es unbeweglich ist. Ein Fachwerk, das endliche oder infinitesimale Bewegungen ausführen kann, ist kinematisch unbestimmt.
- Die Stab- und Lagerkräfte können mit dem Knotenpunktverfahren ermittelt werden:
  - ◇ Freischneiden aller Knoten.
  - ◇ Freikörperbilder skizzieren; alle eingeprägten Kräfte sowie Stab- und Lagerkräfte einzeichnen. Dabei Vorzeichenkonvention für Stabkräfte beachten: alle Stabkräfte als Zugkräfte ansetzen.
  - ◇ Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen an allen Knoten. Im ebenen Fall sind dies für jeden Knoten 2 Gleichungen, im räumlichen Fall für jeden Knoten 3 Gleichungen.
  - ◇ Auflösen der Gleichungen nach den Unbekannten.
  - ◇ Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich Null ist. Dann ist das Fachwerk statisch und kinematisch bestimmt.
- Die Stabkräfte können bei ebenen Fachwerken auch grafisch mit Hilfe des Cremona-Plans ermittelt werden.
- Sind nur einzelne Stabkräfte gesucht, so ist es meist zweckmäßig, das Rittersche Schnittverfahren anzuwenden.

http://www.springer.com/978-3-642-13805-8

Technische Mechanik 1
Statik
Gross, D.; Hauger, W.; Schröder, J.; Wall, W.A.
2011, IX, 298 S. 184 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-642-13805-8